Chapitre 1 : Notions de calcul différentiel

Soit $n \in N^* - \{1\}$

1. Normes

Définition 1.1

- Un vecteur $x \in R^n$ est un objet composé de n nombres réels. Il peut être considéré comme un point dans un espace de dimension n.
- En général, nous considérons les vectrices colonnes :

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad x^T = [x_1, x_2, \dots, x_n]$$ (Le transposé de vecteur colonne x).

- Rappel des opérations vectorielles standard : $x + y, x - y, \alpha x \ (\alpha \in R)$ L
- Norme 1 d'un vecteur $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de R^n, la quantité :

$$||x||_1 := |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

- Norme euclidienne (norme 2, l_2-norm) d'un vecteur $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$ de R^n, la quantité :

$$||x||_2 := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

- Norme infini dite aussi distance de Tchebychev d'un vecteur $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$ de R^n, la quantité :

$$||x||_\infty := \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$$

Remarque 1.1
La distance entre deux points $x, y \in R^n$ est égale à $||x - y||_2$

Exemple 1.1
Soit $x = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$||x||_1 = |-5| + |3| = 8$$
$$||x||_2 := \sqrt{(-5)^2 + (3)^2} = \sqrt{34}$$
$$||x||_\infty := \max(|-5|, |3|) = 5$$

Définition 1.2

- Le produit scalaire entre deux vecteurs de la même dimension $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^t$ de R^nest donné par :

$$< x, y > = \sum_{j=1}^{n} x_j \, y_j = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

- On dit que deux vecteurs x et y sont perpendiculaires ($x \perp y$) ssi $x.y = 0$

Exemple 1.2

Soient $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$x^t.y = (1,0)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1.2 + 0.1 = 2$$

Remarque 1.2

On remarque que la norme euclidienne d'un vecteur $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$ de R^n n'est que :

$$||x||_2 \coloneqq \sqrt{x^t.x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

Elle représente sa distance par rapport au point d'origine (0,0,…,0).

Définition 1.3

- Une matrice A de dimension $m * n$ ($A \in R^{m*n}$) est un tableau rectangulaire de $m * n$ éléments avec m lignes et n colonnes.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Alternativement, A est un ensemble de n vecteurs colonne $A_{.1}, \dots, A_{.n} \in R^m$ où encore un ensemble de m vecteurs ligne $A_{1.}, \dots, A_{m.} \in R^n$

$$A = [A_{.1}, \dots, A_{.n}] \text{ où } A = \begin{bmatrix} A_{1.} \\ A_{2.} \\ \vdots \\ A_{m.} \end{bmatrix}$$

- Soient $A, B \in R^{m*n}$ et $C = A \pm B$, alors $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$ pour $i = 1, \dots, m$ et $j = 1, \dots, n$

- Soit $A \in R^{m*k}$, $B \in R^{k*n}$ et $C = AB$, alors $c_{ij} = \sum_{l=1}^{k} a_{il}\, b_{lj}$
- Le déterminant d'une matrice carrée $A \in R^{n*n}$ peut être calculé par la formule suivante :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\, (-1)^{1+j} \det(A_{1j})$$

avec A_{1j} la matrice obtenue en enlevant de la matrice A sa première ligne et sa $j^{ième}$ colonne.

Exemple 1.3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 18$$

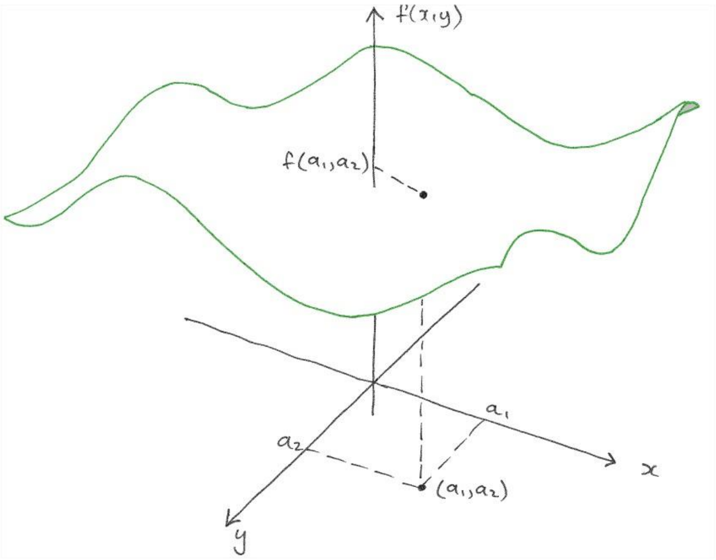
$(-2)[1 * 3 - 0 * 3] - 2$[(-1)*3-2*3)]+(-3)[(-1)*0-2*1] = 18

2. Fonctions réelles de plusieurs variables réelles

Définition 2.1

On dit que $f : R^n \rightarrow R$ est une fonction réelle de plusieurs variables réelles (pour abréger, on dit seulement fonction) s'il existe un domaine $D_f \subset R^n$ tel que $f : D_f \rightarrow R$ est une application, i.e. :

$$\forall X \in D_f, \exists ! \ z \in R \ tel \ que \ z = f(X)$$



D_f est appelé domaine de définition de f.

Exemple 2.1

$$f_1 : R^2 \rightarrow R$$
$$(x, y) \rightarrow f(x, y) = x^2 y + 1$$

$$f_2 : R^2 \rightarrow R$$
$$(x, y) \rightarrow f(x, y) = \frac{x + y}{x - y}$$

$$f_3 : R^2 \rightarrow R$$
$$(x, y) \rightarrow f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

$$f_2 : R^2 \rightarrow R$$
$$(x, y) \rightarrow f(x, y) = ln(x * |y|)$$

Définition 2.2 : Fonction radiale

Soit f une fonction de R^n dans R. On appelle une fonction radiale associée à f, la fonction notée Φ_f définie par :

$$\Phi_f : R_+ * [0,\pi]^{n-2} * [0,2\pi[\rightarrow R$$

$$\left(r, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-2}, \theta\right) \rightarrow f(X) = \lim_{r \to 0} \Phi_f \ (r, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-2}, \theta)$$

Avec $r = \left||X|\right|_2$.

Remarque 2.1

Pour calculer une fonction radiale, il suffit d'utiliser les coordonnées polaires en dimension deux, les coordonnées sphériques en dimensions trois ou les coordonnées hyper-sphériques en dimensions supérieurs à trois.

Exemples 2.2

- Soit $f(x, y) = x^2 + xy - 1$
  Posons : $\begin{cases} x = rcos(\theta) \\ y = rsin(\theta) \end{cases}$ avec $r > 0$ et $\theta \in [0,2\pi[$

  La fonction radiale Φ_f associée à f est :

  $$\Phi_f(r, \theta) = r^2(cos^2\theta + cos\theta sin\theta) - 1$$

- Soit $f(x, y, z) = xyz$

  $$\begin{cases} x = rcos\theta sin\varphi \\ y = rsin\theta sin\varphi \\ z = cos\varphi \end{cases}$$

  avec $r > 0$, $\theta \in [0,2\pi[$ et $\varphi \in [0, \pi[$.

  La fonction radiale associée à f est donnée par :

  $$\Phi_f(r, \theta, \varphi) = r^3 \cos(\theta) \sin(\theta) sin^2(\varphi) \cos(\varphi)$$

Définition 2.3 : Les limites

Soient f une fonction réelle de plusieurs variables réelles, α un point d'accumulation[1] de D_f et $l \in R \, U \, \{\pm\infty\}$.

[1] Soient E un espace topologique, A une partie non vide de E, et $a \in E$. On dit que le point a est **un point d'accumulation** de A s'il est adhérent à A sans être isolé dans A. Un tel point x n'est pas nécessairement un point de A.

Exemple : Pour $A = \{-1\} \cup [0,1[$, 1 est un point d'accumulation, mais -1 ne l'est pas.

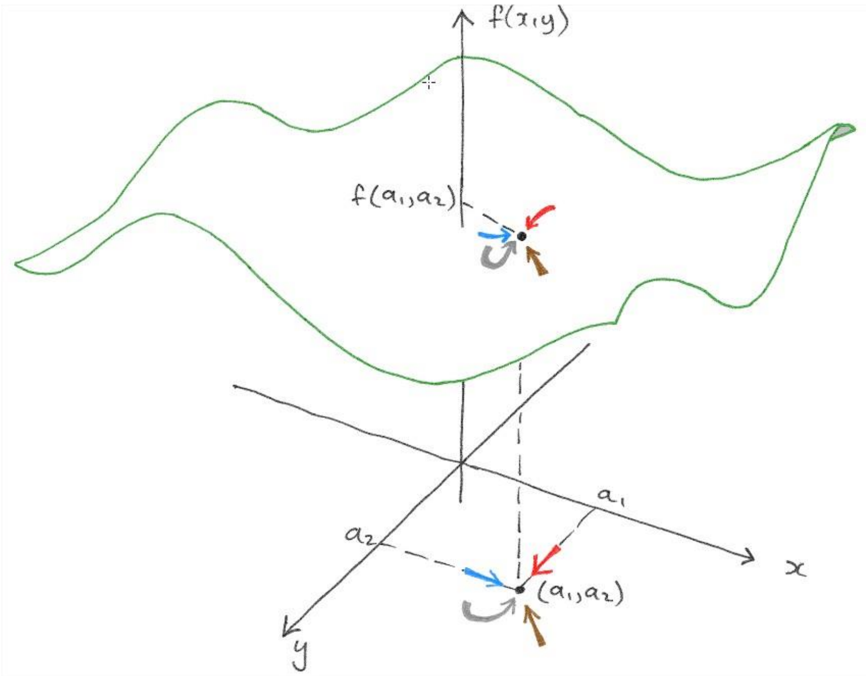
1- On dit que f admet une limite l en α *ssi :*

$$\lim_{r \to 0} \Phi_f\ (r, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-2}, \theta) = l$$

Avec $r = ||X - \alpha||_2$ et **l est indépendant de θ et φ_i**, $\forall i \in \{1, \dots, n-2\}$.

On note alors $f(X) \xrightarrow[||X-\alpha||_2 \to 0]{} l$, $\lim\limits_{X \to \alpha} f(X) = l$, $f \underset{\alpha}{\to} l$, $f(X) \xrightarrow[X \to \alpha]{} l$.

Dans l'exemple de la figure précédente, il existe une infinité de direction permettant de se rapprocher du point (a_1, a_2). Par exemple, on peut se rapprocher de ce point par une ligne parallèle de l'axe des x, par une ligne parallèle de l'axe des y, ou bien par n'importe quelle courbe passant par ce point.



2- On dit que f admet une limite l à l'infini ssi :

$$\lim_{r \to +\infty} \Phi_f\ (r, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-2}, \theta) = l$$

Avec $r = ||X||_2$ et **l est indépendant de θ** et φ_i, $\forall i \in \{1, \dots, n-2\}$.

On note alors $f(X) \xrightarrow[||X||_2 \to +\infty]{} l$, $\lim\limits_{X \to +\infty} f(X) = l$, $f \underset{+\infty}{\to} l$, $f(X) \xrightarrow[X \to +\infty]{} l$.

Remarque 2.2

Après le calcul de la limite au point (a_1, a_2) par un remplacement direct (on remplace x par a_1 et y par a_2), si on obtient :

- Un nombre rationnel a/b, avec $b \neq 0$, alors celle-ci est la valeur de la limite.
- La forme $a/0$ avec $a \neq 0$, alors la limite n'existe pas ($\frac{a}{0}$ est indéfini).
- La forme $\frac{0}{0}$, alors plus de travail est nécessaire ($\frac{0}{0}$ est indéterminée).

Théorèmes 2.1 : Limites spéciales

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x}=0$
3. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1$

Stratégies de calcul des limites

- **Stratégie A : Calcul de la limite par un remplacement direct de x et y**
  - $\lim\limits_{(x,y)\to(1,\pi)}\frac{x}{y}+\cos(xy)=\frac{1}{\pi}-\cos(\pi)$
  - $\lim\limits_{(x,y)\to(4,3)}\frac{x^2-1}{3x+y}=\frac{4^2-1}{3*4+3}=1$
  - $\lim\limits_{(x,y)\to(2,2)}\frac{x+3}{xy-4}=\frac{2+3}{2*2-4}=\frac{5}{0}$ = indéfinie→ la limite n'existe pas
  - $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\tan(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=\frac{0}{0}$ = indéterminée → Essayez avec d'autres stratégies (manipulation de la fonction, cordonnées polaires, rapprochement au point à travers plusieurs directions) (voir le document « limits and continuity.pdf »).

- **Stratégie B : manipuler la fonction en quelque chose que nous connaissons (à partir de connaissances antérieures)**

  - L'exemple précédent : $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\tan(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{\cos(x^2+y^2)}$

  A noter que : $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=\lim\limits_{x^2+y^2\to 0}\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=\lim\limits_{X\to 0}\frac{\sin(X)}{X}=1$ (limite spéciale)

  $$\operatorname{Lim}_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{\cos(x^2+y^2)}=\frac{1}{1}=1$$

  Alors : $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\tan(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=1\left(\frac{1}{1}\right)=1$

- **Stratégie C : Calculer la limite en se rapprochant du point concerné à travers différentes directions**

  Rappelons qu'une fonction admet une limite en un point X si le calcul des limites à travers n'importe quelle direction passant par ce point X donne la même valeur. Sinon, si on trouve que deux directions donnent deux valeurs différents de limite, alors la limite au point X n'existe pas (voir la figure précédente).

  Exemple : Montrer que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy+y^3}{x^2+y^2}$ n'existe pas.

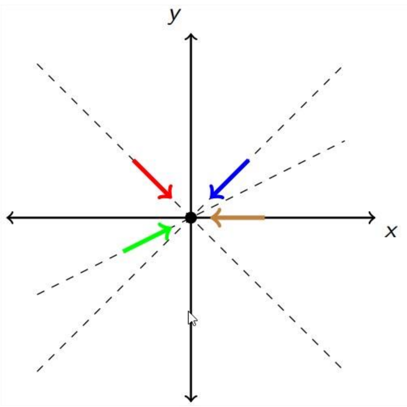
  Essayons avec deux directions passant par le point (0,0) : $x=y$ (ligne) et $y=x^2$ (courbe)

$x = y$	$y = x^2$
$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy + y^3}{x^2 + y^2} = \lim\limits_{(y,y)\to(0,0)} \frac{y^2 + y^3}{y^2 + y^2}$ $(x, y) \to (0,0)$ ou $(y, y) \to (0,0)$ peut être représenté maintenant par seulement $y \to 0$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy + y^3}{x^2 + y^2}$ $= \lim\limits_{y\to 0} \frac{y^2 + y^3}{y^2 + y^2} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{y^2(1 + y)}{2y^2} = \frac{1}{2}$	$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy + y^3}{x^2 + y^2} = \lim\limits_{(x,x^2)\to(0,0)} \frac{x(x^2) + (x^2)^3}{x^2 + (x^2)^2}$ $(x, y) \to (0,0)$ ou $(x, x^2) \to (0,0)$ peut être représenté maintenant par seulement $x \to 0$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy + y^3}{x^2 + y^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3 + x^6}{x^2 + x^4}$ $= \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3(1 + x^3)}{x^2(1 + x^2)}$ $= \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3(1 + x^3)}{x^2(1 + x^2)}$ $= \lim\limits_{x\to 0} \frac{x(1 + x^3)}{(1 + x^2)} = \frac{0(1)}{1} = 0$

Le calcul de la limite à travers deux directions différentes donne deux valeurs différentes (1/2 et 0), donc la limite en point (0,0) n'existe pas.

Exemple : calculer $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$

Puisque la limite sera calculée en point $(0,0)$, il convient d'essayer toutes les directions défini par $y = mx$ $(m \in R)$:



Algébriquement, on utilise l'équation $y = mx$ (remplacer y par mx).

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,mx)\to(0,0)} \frac{2xmx}{x^2 + (mx)^2} = \lim_{(x,mx)\to(0,0)} \frac{x^2 2m}{x^2(1 + m^2)}$$
$$= \lim_{(x,mx)\to(0,0)} \frac{2m}{1 + m^2}$$

(x, y) ou $(x, mx) \to (0,0)$ peut être représenté maintenant par seulement $x \to 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2m}{1 + m^2} = \frac{2m}{1 + m^2}$$

Sachant que x n'apparaisse pas dans l'expression. Ceci indique que plusieurs directions linéaires résultent en différents valeurs.

- Si $m = 0$ (se rapprocher à travers l'axe x), la limite est : $\frac{2*0}{1+0^2} = 0$
- Si $m = 1$ (se rapprocher à travers la droite $y = x$), la limite est : $\frac{2*1}{1+1^2} = 1$

Ainsi, la limite en point (0,0) n'existe pas.

- **Stratégie 4 : Calcul de la limite à travers la fonction radiale (coordonnées polaires, sphériques ou hyper-sphériques).**

Soit $f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = ? \quad x_0 = 0, y_0 = 0$$

Posons : $\begin{cases} x = x_0 + rcos(\theta) \\ y = y_0 + rsin(\theta) \\ r = \left\|(x,y)\right\|_2 = \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$ avec $r > 0$ et $\theta \in [0,2\pi[$

La fonction radiale Φ_f associée à f est

$$\Phi_f(r,\theta) = \frac{\left(rcos(\theta)\right)^3}{r^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} \Phi_f(r,\theta)$$

$$= \lim_{r\to 0} rcos^3(\theta) = \cos^3(\theta) \lim_{r\to 0} r$$

Puisque $\cos^3(\theta)$ est borné ($-1 \leq \cos^3(\theta) \leq 1$) et $\lim_{r\to 0} r = 0$, donc :

$\lim_{r\to 0} \Phi_f(r,\theta)$=0

Ainsi : $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

A noter que $(x,y) \to (0,0)$ peut être remplacé par $r \to 0$

Exemple : Calculer $\lim_{(x,y)\to(0,1)} x^2 + xy - 1 \quad x_0 = 0\,, y_0 = 1$

Posons : $\begin{cases} x = rcos(\theta) \\ y = rsin(\theta) + 1 \end{cases}$ avec $r > 0$ et $\theta \in [0,2\pi[$

La fonction radiale Φ_f associée à f est

$\Phi_f(r,\theta) = r^2\cos^2(\theta)$+ $rcos(\theta)(rsin(\theta) + 1) - 1$

$\Phi_f(r,\theta) = r^2\cos^2(\theta)$+ $r^2cos(\theta)sin(\theta) + rcos(\theta) - 1$

$\Phi_f(r,\theta) = r^2\,(\cos^2(\theta)$+ $cos(\theta)sin(\theta)) + rcos(\theta) - 1$

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} \Phi_f(r,\theta)$$

$$= \lim_{r\to 0} r^2 (\cos^2(\theta) + cos(\theta)sin(\theta)) + rcos(\theta) - 1$$
$$= 0 + 0 - 1$$

Puisque $\cos^2(\theta) + cos(\theta)$ $(\cos^2(\theta) + cos(\theta)sin(\theta)$ est borné :

$-1 \leq sin(\theta) \leq 1$

$-1 \leq cos(\theta) \leq 1$

$\leftarrow \rightarrow -1 \leq sin(\theta)cos(\theta) \leq 1$

$0 \leq \cos^2(\theta) \leq 1$

Donc : $-1 \leq \cos^2(\theta) + cos(\theta)sin(\theta) \leq 1$, le terme est borné.

Par conséquent : $f \underset{(0,1)}{\longrightarrow} -1$

Théorèmes 2.2 : Propriétés des limites de base d'une fonction de deux variables

Le théorème suivant nous permet d'évaluer les limites facilement.

Soient $b, x_0, y_0, L\ et\ K$ des nombres réels. Soit n un nombre entier positive et soient $f\ et\ g$ deux fonctions ayant les limites suivantes :

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \quad \text{et} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = K$$

1. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} b = b$
2. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x = x_0 \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} y = y_0$
3. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x,y) \pm g(x,y)) = L \pm K$
4. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} b.f(x,y) = b.L$
5. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \big(f(x,y).g(x,y)\big) = L.K$
6. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \big(f(x,y)/g(x,y)\big) = L/K$ (avec $K \neq 0$).
7. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)^n = L^n$

Définition 2.4 : Continuité au point

Si de plus $\alpha \in D_f$ et $l = \lim_{X\to\alpha} f(x,y) = f(\alpha)$, alors f est dite continue au point α.

Exemple 2.3

- La fonction f de l'exemple précédent est continue en (0,1) car elle est définie en (0,1) et $f(0,1) = -1 = \lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y)$

Définition 2.5 : Continuité sur D_f

On dit qu'une fonction f définie sur D_f est continue, si elle est continue en tout point de D_f

Exemple 2.4

Soit $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\cos(y)\sin(x)}{x} & x \neq 0 \\ \cos(y) & x = 0 \end{cases}$

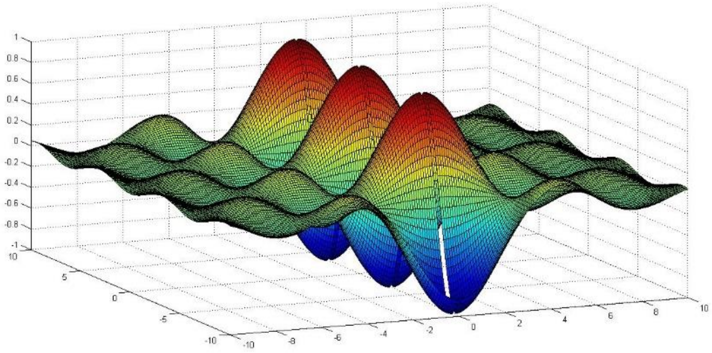
1. **f est-elle continue en point (0,0) ?**
2. **f est-elle continue sur R^2 ?**

1. Afin de déterminer si f est continue en point (0,0) ou pas, on doit comparer entre $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ et $f(0,0)$.

- En appliquant la définition de f, on trouve que $\boldsymbol{f(0,0) = \cos(0) = 1}$
- Calculons maintenant $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$
  - Remplaçons (stratégie A) $x\ et\ y$ par 0 dans $\frac{\cos(y)\sin(x)}{x}$ retourne une valeur indéterminée $\frac{0}{0}$, donc nous devons faire plus de travail pour calculer la limite.Donc, on utilise d'autres stratégies.
  - Stratégie B : Considérons les deux limites suivantes : $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos(y)$ et $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x)}{x}$.
    - La première limite ne contient pas x et puisque $\cos(y)$ est continue, donc :
    $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos(y) = \lim_{y\to 0} \cos(y) = \cos(0) = 1$$
    - La deuxième limite ne contient pas y, donc :
    $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$
    - Selon le théorème 5 :
    $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(y)\sin(x)}{x} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos(y) \, . \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x)}{x} = 1 * 1 = 1$$

Nous avons trouvé que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(y)\sin(x)}{x} = f(0,0)$, et donc f est continue en point (0,0).

2. Une analyse similaire montre que f est continue en tout point (x_0, y_0) de R^2. Tant que $x \neq 0$, on peut évaluer la limite directement en remplaçant x par x_0 et y par y_0. Quand $x = 0$, on a déjà montré dans la question précédente que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(y)\sin(x)}{x} = f(0,0)$. Ainsi, on peut dire que f est continue sur tout R^2 (voir le graphe ci-dessous).



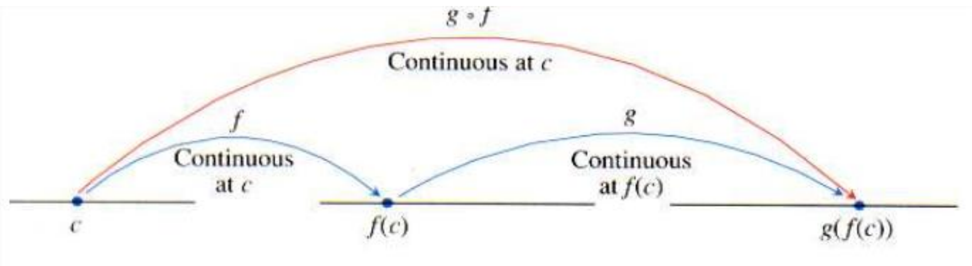
Théorèmes 2.2 : Propriétés des fonctions continues

La continuité est stable par opérations algébriques, lois de composition et multiplications par un réel.

Soient $f\ et\ g$ deux fonctions continues sur l'ensemble B. Soit c un nombre réel, et n un nombre entier positif. Les fonctions suivantes sont continues sur B :

8. $f \pm g$
9. $c.f$
10. $f.g$
11. f/g (tant que $g \neq 0$ sur B)
12. f^n
13. $\sqrt[n]{f}$ (si n est pair, alors $f \geq 0$ sur B)
14. Le théorème de composition : Soit f est une fonction continue sur B, où l'image de l'ensemble B par f est l'ensemble J, et soit g une fonction à une seule variable, continue sur J , alors $\boldsymbol{g(f(x,y))}$ est continue sur B.

Pour le cas de la continuité en un point c.



Exemple 2.5

Soit $f(x,y) = \sin(x^2\cos(y))$. Montrer que f est continue sur R^2.

Considérons $f_1(x,y) = x^2$. Puisque y ne figure pas dans f_1, et la fonction polynomiale x^2 sont continue, on déduit que f_1 est continue sur R^2. Un constatation similaire peut être obtenue pour $f_2(x,y) = \cos(y)$ sur R^2. Le théorème 10 affirme que $f_3 = f_1.f_2$ est continue partout sur R^2, sachant que l'image de R^2 par la fonction f_3 est l'ensemble R. Prenons maintenant : $f_4(x) = \sin(x)$, cette fonction à une seule variable est continue sur R. Le théorème 14 affirme que la composition de $f_4(x) = \sin(x)$ et f_3 est continue, ainsi :

$$f_3 : R^2 \longrightarrow R$$

$$f_4 : R \longrightarrow R$$

$$\longrightarrow \quad f_4(f_3) : R^2 \longrightarrow R$$

$\sin(f_3) = \sin(x^2 \, cos(y))$ est continue sur R^2.

Exercice

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & sinon \end{cases}$$

Etudier la continuité de f en (2,3), (0,1), (1,0) et (0,0).

f est le rapport de deux fonctions xy, x^2+y^2 définies et continues sur $(R^*)^2$(=$R - \{(0,0)\}$), donc elle est continue aux points (2,3), (0,1), (1,0).

Explication : la fonction xy est continue sur $(R^*)^2$. La fonction x^2+y^2 est continue sur $(R^*)^2$. Selon le thérorème 11, la fonction $\frac{xy}{x^2+y^2}$ es continue sur $(R^*)^2$, donc la fonction $f(x,y)$ est continue au point (2,3), (0,1), (1,0).

Pour étudier la continuité en point (0,0), il faut comparer entre : $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ et $f(0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} \Phi_f(r,\theta)$$

Posons : $\begin{cases} x = 0 + rcos(\theta) \\ y = 0 + rsin(\theta) \\ r = \|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$

$$\lim_{r\to 0} \Phi_f(r,\theta) = \lim_{r\to 0} \frac{rcos\theta.rsin\theta}{(rsin\theta)^2+(rcos\theta)^2}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^2cos\theta sin\theta}{r^2}$$

$$= cos\theta sin\theta$$

Dans ce cas, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ dépend de θ, donc f n'admet pas de limite en (0,0). Par la suite, f est discontinue en (0,0).

Définition 2.6 : Fonction coércive

Une fonction f est dite **coécrive** si et seulement si :

$$\lim_{\|X\|\to+\infty} f(X) = +\infty \quad , \ X = (x,y)$$

Exemple 2.6

$f(x,y) = x^2 + y^2$

Posons : $\begin{cases} x = rcos(\theta) \\ y = rsin(\theta) \\ r = \|X\|_2 = \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$ avec $r > 0$ et $\theta \in [0,2\pi[$

$$\lim_{\substack{\|(x,y)\|\to+\infty \\ ou \\ \|X\|\to+\infty}} f(x,y) = \lim_{r\to+\infty} \Phi_f(r,\theta)$$

$$= \lim_{r\to+\infty} (rcos\theta)^2 + (rsin\theta)^2$$

$$= \lim_{r\to+\infty} r^2$$

$$= +\infty$$

On déduit alors que f est **coécrive**.

Définition 2.7 : Fonctions différentiables

Soient $f : R^n \to R$ une fonction réelle de plusieurs variables réelles, $a = (a_1, \dots, a_n) \in D$ et $i \in \{1, \dots, n\}$. **La dérivée partielle** de f en a par rapport à la $i^{ème}$ variable est la limite, si elle existe :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + h, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)}{h}$$

Elle est notée par $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})$, $\partial_i f(a)$ ou encore $f_i'(a)$.

Si pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ existe, on peut alors définir **le vecteur gradient** de f au point a par :

$$\nabla f(\alpha) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

et f est dite différentiable au point α. Si ∇f est défini pour tout $\alpha \in D_f$ alors f est dite différentiable.

Rappel

Une fonction à une seule variable $f : R \to R$ est dite différentiable au point a si la dérivé suivante existe :

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Définition 2.8 : Fonction continûment différentiable

On dit que f est **continûment différentiable** (de classe C^1) si toute ces dérivées partielles existent et sont des fonctions continues.

Exemple 2.7

Le gradient de la fonction $f(x, y) = x^2 + y$ au point (1,0) est : $\nabla f(1,0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \nabla f(1,0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exemple 2.8

Le cas d'une fonction définie par deux formules (Analysez bien cette fonction).

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{(1 + x^2y^2)\sin y}{y}, & si\ y \neq 0, \\ 1, & sinon \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1 + h, 0) - f(1,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1 - 1}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1,0 + h) - f(1,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{(1+1^2h^2)\sin h}{h} - 1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(1+h^2)\sin h - h}{h^2}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(1+h^2)\left(h + o(h^2)\right) - h}{h^2}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^3 + o(h^2)}{h^2}$$

$$= \lim_{h\to 0} h + o(h) = 0$$

Avec $h + o(h^2)$ est le développement limité d'ordre k de $\sin(h)$.

Définition 2.9 : Fonctions deux fois différentiables (la matrice hessienne)

Une fonction $f: R^n \to R$ est dite deux fois différentiable en un point $a \in D_f$ si pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$, la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ admet une dérivée partielle pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$ au point a.

Remarque 2.3

f est deux fois différentiable (de classe C^2), si elle est deux fois différentiable en tout point $a \in D_f$. On définit alors la matrice hessienne de f en $a \in D_f$ par :

$$\nabla^2 f(a) = Hess\, f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial x_1^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial x_1\, \partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial x_n\, \partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}$$

Avec $\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial x_i\, \partial x_j}(a)$ est la dérivée partielle de $\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial x_j}$ en a par rapport à la $i^{ème}$ variable, on la note aussi $\partial_{i,j} f(a)$.

Remarque 2.4

f est dite de classe $C^k, (k \in N^*)$ si les dérivées partielles d'ordre k existent et elles sont continues.

Théorème 2.3 : (Thèorème de Schwarz)

Si $f : R^n \to R$ de classe C^2 en $a \in D_f$, alors :

$$\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial x_i\, \partial x_j}(\alpha) = \frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial x_j\, \partial x_i}(\alpha) \text{, pour tous i, j} \in \{1, \dots, \mathrm{n}\}.$$

Exemple : Soit $f(x, y) = (1 + x^2y^2) \sin y$

Soit $(x, y) \in \mathrm{R}^2$

$$\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial x}(x, y) = 2xy^2 \sin y$$

$$\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial y}(x, y) = (1 + x^2y^2)' \sin y + (1 + x^2y^2)(\sin(y))'$$

$$\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial y}(x, y) = 2x^2y \sin y + (1 + x^2y^2) \cos y$$

Donc : on obtient le vecteur gradient suivant :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy^2 \sin y \\ 2x^2y \sin y + (1 + x^2y^2) \cos y \end{pmatrix}$$

Maintenant, on calcule la matrice hessienne.

$\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial x^2}(x, y) = 2y^2 \sin y$
$\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial x\, \partial y}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial y\, \partial x}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = 2x(y^2 \sin(y))'$

$= \frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial y\, \partial x}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = 2x(2y sin(y) + y^2 \cos(y))$ $= \frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial y\, \partial x}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = 4xy \sin y + 2xy^2 \cos y$
$\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial y^2}(x, y) = ?$ (A calculer)

D'où la hessienne de f est donné par :

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2y^2 \sin y & 4xy \sin y + 2xy^2 \cos y \\ 4xy \sin y + 2xy^2 \cos y & ? \end{pmatrix}$$

3. Rappels d'algèbre

- Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$ une matrice carrée. A est dite symétrique si et seulement si $a_{ij} = a_{ji}$, pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$.
- Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$. On appelle **déterminant mineur principal** d'ordre k, $k \in \{1, \dots, n\}$ le déterminant $\Delta_{\boldsymbol{k}}$ de $(a_{ij})_{\substack{\boldsymbol{1 \le i \le k} \\ \boldsymbol{1 \le j \le k}}}$.
- Soit A une matrice symétrique, alors :
  - A est définie positive ($A > 0$) si $\Delta_{\boldsymbol{k}} > 0$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$.
  - A est semi-définie positive ($A \ge 0$) si $\Delta_{\boldsymbol{k}} > 0$ pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$ et $\Delta_{\boldsymbol{n}} = 0$.
  - A est définie négative ($A < 0$) si pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$

$$\begin{cases} \Delta_{\boldsymbol{k}} > 0, & si\ k\ est\ pair \\ \Delta_{\boldsymbol{k}} < 0, & si\ k\ est\ impair \end{cases}$$

  - A est semi-définie négative ($A \le 0$) si pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$

$$\begin{cases} \Delta_{\boldsymbol{k}} > 0, & si\ k\ est\ pair \\ \Delta_{\boldsymbol{k}} < 0, & si\ k\ est\ impair \end{cases} \text{ et } \Delta_{\boldsymbol{n}} = 0$$

Exemple 3.1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Les mineurs principaux de la matrice A sont :

$$\Delta_1 = a_{11} = 1$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 15$$

$$\Delta_4 = det(A) = 2$$

$\Delta_k > 0$ pour tout $k \in \{1, \dots, 4\}$, donc $A > 0$. (la matrice est définie positive).

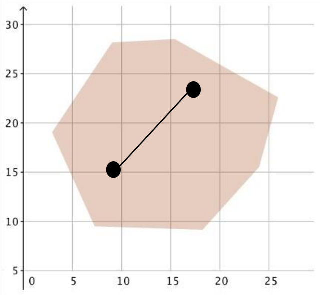
4. Convexité

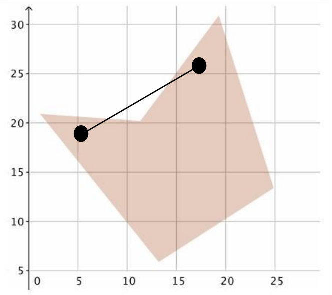
Définition 4.1 : Ensemble convexe

Soit $C \subset R^n$. L'ensemble C est convexe ssi :

$$\forall (A, B) \in C^2, \forall \lambda \in]0,1[, \qquad \lambda A + (1 - \lambda)B \in C$$

Si n=2, on peut interpréter la définition ci-dessus comme suit : si A et B sont deux éléments de C, alors le segment qui relie A et B est inclus dans C





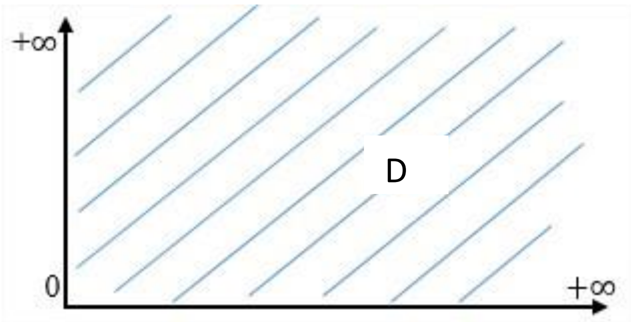
Ensemble convexe   Ensemble non convexe

Remarque 4.1

- R^n est convexe.
- L'intersection de plusieurs ensembles convexes donne un ensemble convexe.
- En général, l'union de plusieurs ensembles convexes ne donne pas un ensemble convexe.

Exemple 4.1

Montrer que $D = [0, +\infty[* [0, +\infty[\subset R^2$ est convexe



On a : $D = \{(x, y) \in R^2, x \geq 0 \text{ et } y \geq 0\}$.

Soient : $A = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in D \rightarrow x_1 \geq 0 \text{ et } y_1 \geq 0$ --- (1)

$B = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in D \rightarrow x_2 \geq 0 \text{ et } y_2 \geq 0$ --- (2)

$\lambda \in]0,1[\leftrightarrow 0 < \lambda < 1 \leftrightarrow 1 - \lambda > 0$ --- (3)

Il faut montrer que : $\lambda A + (1-\lambda)B \in D$

$\lambda. A = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda y_1 \end{pmatrix}$, avec $\lambda x_1 \geq 0 \text{ et } \lambda y_1 \geq 0$ (d'après (1) et (3))

$(1-\lambda)B = (1-\lambda) \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\lambda)x_2 \\ (1-\lambda)y_2 \end{pmatrix}$

avec $(1-\lambda)x_2 \geq 0 \text{ et } (1-\lambda)y_2 \geq 0$ (d'après (2) et (3))

$\rightarrow \lambda. A + (1-\lambda). B = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \\ \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \end{pmatrix}$

Alors, il faut montrer que : $\begin{pmatrix} \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \\ \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \end{pmatrix} \in D$

Donc, il faut montrer que : $\boldsymbol{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \geq 0}$ **et** $\boldsymbol{\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \geq 0}$

D'après (1) et (3) : $\boldsymbol{\lambda x_1 \geq 0}$ et $\boldsymbol{\lambda y_1 \geq 0}$

D'après (2) et (3) : $\boldsymbol{(1-\lambda)x_2 \geq 0}$ et $\boldsymbol{(1-\lambda)y_2 \geq 0}$

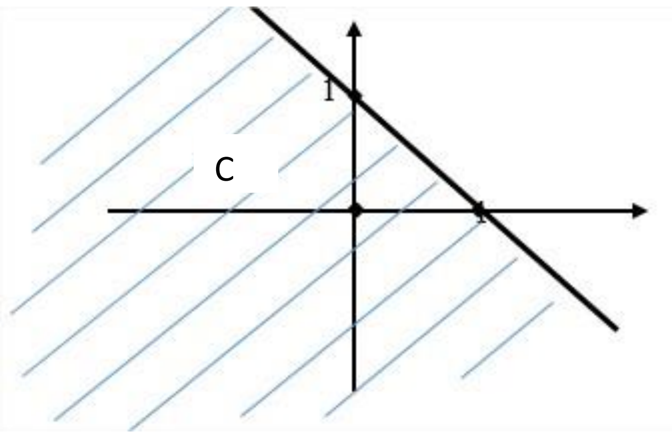
Alors, $\boldsymbol{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \geq 0}$ et $\boldsymbol{\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \geq 0}$

Ainsi $\boldsymbol{\lambda. A + (1-\lambda). B \in D}$

Par conséquent, D est un ensemble convexe.

Exemple 4.2

Montrer que l'ensemble défini par : C = $\{(x_1, x_2) \in R^2, x_1 + x_2 < 1\}$ est convexe.



Soient :

$A = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in D \rightarrow x_1 + y_1 < 1$ --- (1)

$B = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in C \rightarrow x_2 + y_2 < 1$ --- (2)

$\lambda \in]0,1[\rightarrow 0 < \lambda < 1 \leftrightarrow 1 - \lambda > 0$ --- (3)

Il faut montrer que : $\lambda A + (1-\lambda)B \in C$

$\lambda . A = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda y_1 \end{pmatrix}$

$(1-\lambda)B = (1-\lambda) \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\lambda)x_2 \\ (1-\lambda)y_2 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \lambda . A + (1-\lambda) . B = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \\ \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \end{pmatrix}$

Alors, il faut montrer que : $\begin{pmatrix} \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \\ \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \end{pmatrix} \in C$

Donc, il faut montrer que : $\boldsymbol{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 + \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 < 1}$

On a :

D'après (1) et (3) : $\lambda x_1 + \lambda y_1 < \lambda$

D'après (2) et (3) : $(1-\lambda)x_2 + (1-\lambda)y_2 < 1 - \lambda$

$\rightarrow \boldsymbol{\lambda x_1 + \lambda y_1 + (1-\lambda)x_2 + (1-\lambda)y_2 < 1}$

Ainsi : $\lambda A + (1-\lambda)B \in C$

donc A est un ensemble convexe.

Définition 4.2 : Fonction convexe

Soient $f : R^n \rightarrow R$ telle que son domaine de définition D_f est convexe. Alors :

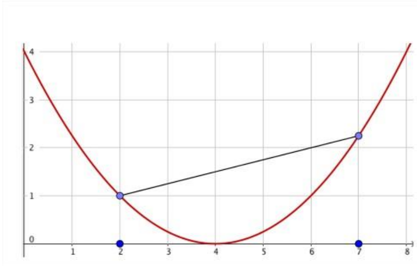
f est convexe ssi :

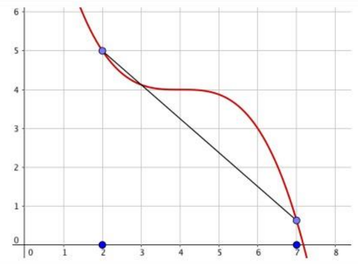
$$\forall (A,B) \in D_f{}^2, \forall \lambda \in]0,1[, \quad f(\lambda A + (1-\lambda)B) \leq \lambda f(A) + (1-\lambda) f(B)$$

En mathématiques, une fonction réelle est dite convexe si :

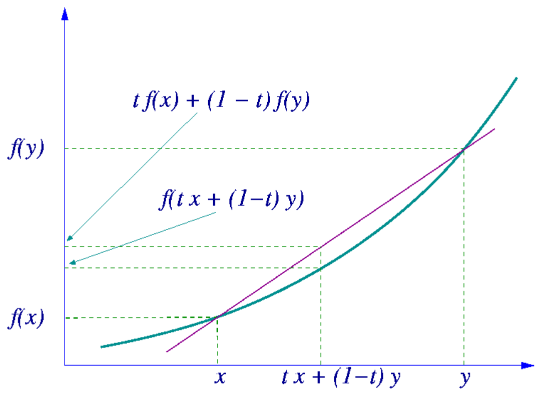
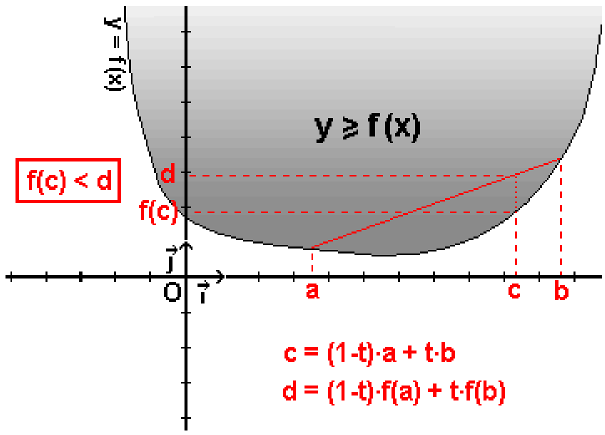
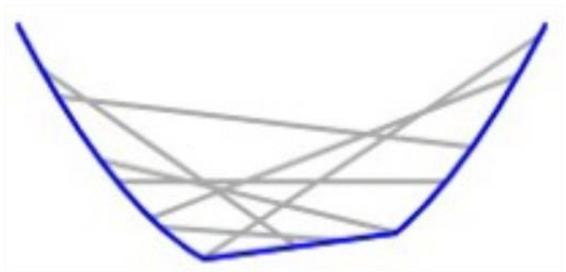
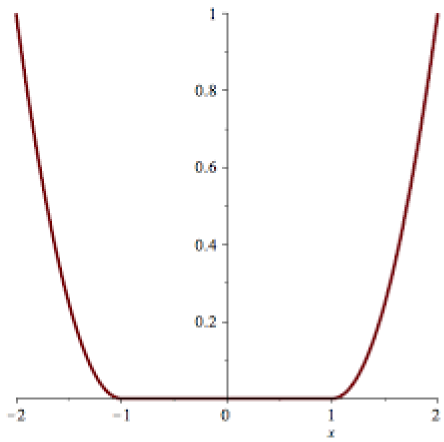
- quels que soient deux points A et B du graphe de la fonction, le segment [AB] est identique ou bien situé au-dessus du graphe, c'est-à-dire que la courbe représentative de la fonction se situe toujours en dessous de ses cordes, ou
- l'épigraphe de la fonction (l'ensemble des points qui sont au-dessus de son graphe) est un ensemble convexe.

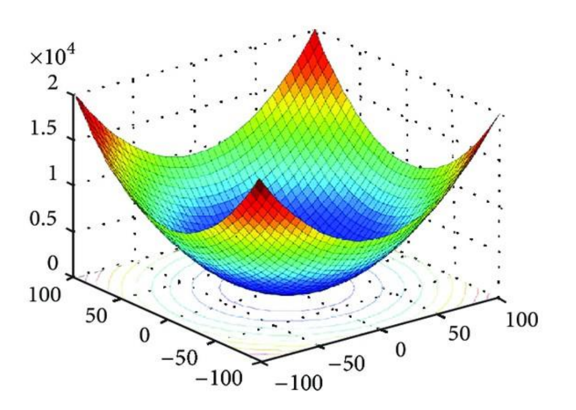
Lorsque l'inégalité est stricte (avec A différent de B et λ dans]0 ; 1[), on parle de fonction **strictement convexe** (le segment [AB] est entièrement situé au-dessus du graphe).

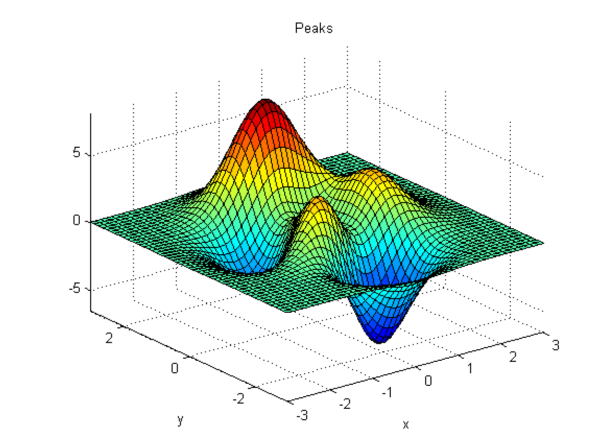




Fonction strictement convexe — Fonction non convexe





Définition 4.3 : Fonction concave

f est concave ssi :

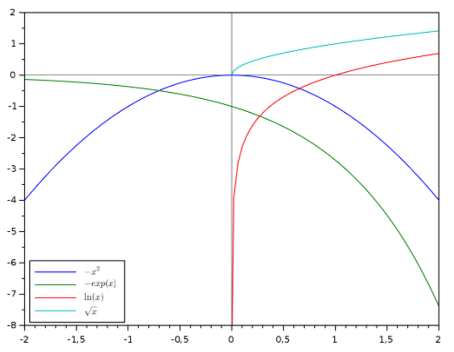
–f est convexe. (l'inégalité est inversée) , càd :

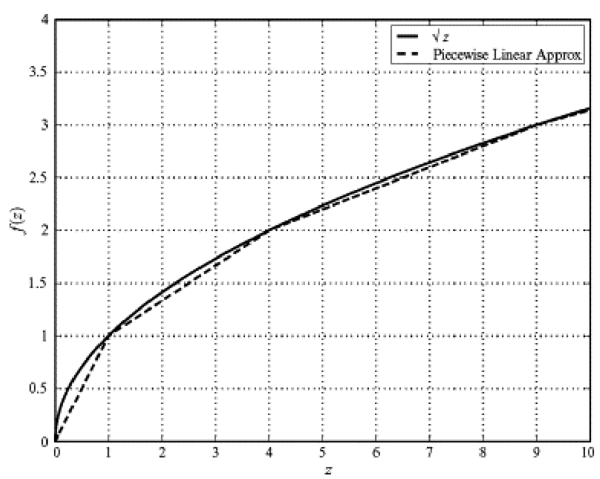
$$\forall (X,Y) \in {D_f}^2, \forall \lambda \in]0,1[, \qquad f(\lambda X + (1-\lambda)Y) \geq \lambda f(X) + (1-\lambda) f(Y)$$

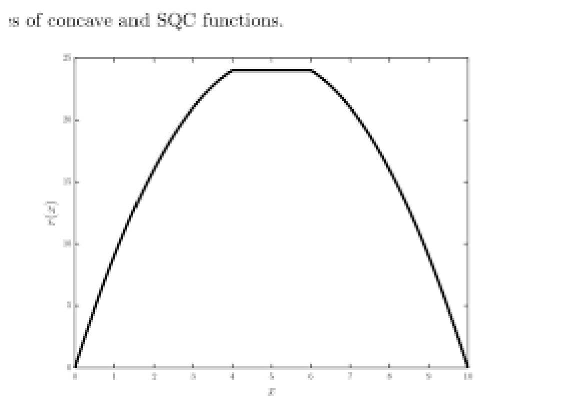
En mathématiques, une fonction réelle est dite concave si :

- quels que soient deux points A et B du graphe de la fonction, le segment [AB] est situé **au-dessous** du graphe, c'est-à-dire que la courbe représentative de la fonction se situe toujours en dessus de ses cordes, ou
- l'hypographe de la fonction (l'ensemble des points qui sont au-dessous de son graphe) est un ensemble convexe.

Lorsque l'inégalité est stricte (avec A différent de B et λ dans]0 ; 1[), on parle de fonction **strictement concave** (le segment [AB] est entièrement situé au-dessous du graphe).







Remarque 4.2

Une fonction linéaire est convexe et concave à la fois.

Théorème 4.1

Soit f : R^n → R est deux fois différentiable.

- Si la hessienne $\nabla^2 f(X)$ est une matrice symétrique définie positive pour tout $X \in D_f$, alors f est strictement convexe.
- Si la hessienne $\nabla^2 f(X)$ est une matrice symétrique semi-définie positive pour tout $X \in D_f$, alors f est convexe.
- Si la hessienne $\nabla^2 f(X)$ est une matrice symétrique définie négative pour tout $X \in D_f$, alors f est strictement concave.
- Si la hessienne $\nabla^2 f(X)$ est une matrice symétrique semi-définie négative pour tout $X \in D_f$, alors f est concave.
-

Exemple 4.3

soit $f : (x, y) \rightarrow f(x, y) = x^2 + y^2$

Montrer que f est strictement convexe

f est continue et deux fois différentiables (de classe C^2)

$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}$, $\nabla^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Les mineurs principaux de $\nabla^2 f(x,y)$ sont $\Delta_1 = 2 > 0$ et $\Delta_2 = 4 > 0$, alors f est une fonction strictement convexe.

Exemple 3.4 : soit $f : (x, y, z) \rightarrow f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz$

Montrer que f est strictement convexe

Remarque 4.3

- Si f_i est (strictement) convexe et $\alpha_i \geq 0 \; \forall \, i = 1, \ldots, m$, alors la fonction g(x) = $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x)$ est (strictement) convexe.

Résumé : Vérification de la convexité

- Appliquer la définition.
- Si la fonction est deux fois différentiable, étudier le type de la matrice hessienne (définie positive, semi-définie positive).
- Vérifier si la fonction est la somme de plusieurs fonctions convexes multipliées par des coefficients positifs.