Chapitre 2 : Conditions d'optimalité

Table des matières

1. Extremums et points critiques

Définition 1.1

On appelle problème d'optimisation en dimension finie, tout problème de recherche des points $\alpha \in R^n$ qui vérifient :

$$f(\alpha)= \min_{X\in C} f(X) \text{ ou } f(\alpha) = \max_{X\in C} f(X)$$

avec f est une fonction de R^n dans R et $\mathrm{C} \subset \mathrm{R}^n$ appelé contrainte ou ensemble des contraintes.

Dans ce cours, on s'intéresse aux problèmes d'optimisation non linéaires sans contraintes, c'est-à-dire :

$$\min_{X\in R^n} f(X)$$

Avec f est une fonction de R^n dans R différentiable.

Définition 1.2

Soit le problème d'optimisation :

$$\min_{\boldsymbol{X\in R^n}} \boldsymbol{f(X)}$$

On dit qu'une fonction f définie sur D_f de R^n admet :

- Un minimum global en un point $\alpha \in D_f$ si :

  $$f(\alpha) \leq f(X), \quad \forall X \in D_f$$

  et α est appelé une solution globale du problème d'optimisation.

- Un minimum local en un point $\alpha \in D_f$ si :

  $$f(\alpha) \leq f(X), \quad \forall X \in V_\alpha \ avec \ V_\alpha \subset \mathrm{D_f}$$

  V_a : ensemble contenant le voisinage de a.

  et α est appelé une solution locale du problème d'optimisation.

Si ces dernières inégalités sont strictes, on dit que f admet en α un minimum unique (strict) et α sera une solution stricte (unique) du problème d'optimisation en question.

Soit le problème d'optimisation :

$$\max_{\boldsymbol{X\in R^n}} \boldsymbol{f(X)}$$

On dit qu'une fonction f définie sur D_f de R^n admet :

- Un maximum global en un point $\alpha \in D_f$ si :

  $$f(\alpha) \geq f(X), \quad \forall X \in D_f$$

  et α est appelé une solution globale du problème d'optimisation.

- Un maximum local en un point $\alpha \in D_f$ si :

$$f(\alpha) \geq f(X), \quad \forall X \in V_\alpha \; avec \; V_\alpha \subset \mathrm{D_f}$$

$\mathrm{V_a}$: ensemble contenant le voisinage de a.

et α est appelé une solution locale du problème d'optimisation.

Si ces dernières inégalités sont strictes, on dit que f admet en α un maximum unique (strict) et α sera une solution stricte (unique) du problème d'optimisation en question.

Remarque 1.1

$$\max_{X\in C} f(X) = -\min_{X\in C}(-f(X))$$

2. Résultats d'existence et d'unicité

Définition 2.1

Une fonction f est dite coécrive ssi :

$$\lim_{||X||\to+\infty} f(X) = +\infty$$

Exemple 2.1

Soit $f(x,y) = x^2 + y^2$

Posons : $\begin{cases} x = rcos\theta \\ y = rsin\theta \end{cases}$ avec r > 0 et $\theta \in [0,2\pi[\quad r = \left||X|\right|$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to+\infty \\ ||(x,y)||\to+\infty}} f(x,y) = \lim_{r\to+\infty}((rcos\theta)^2 + (rsin\theta)^2)$$

$$= \lim_{r\to+\infty} r^2\cos^2(\theta) + r^2 sin^2(\theta)$$

$$= \lim_{r\to+\infty} r^2(\cos^2(\theta) + sin^2(\theta))$$

$$= \lim_{r\to+\infty} r^2 = +\infty$$

On déduit alors que f est coércive.

Théorème 2.1 (Existence d'une solution)

- Cas d'un problème de **minimisation** : Soit f une fonction réelle de plusieurs variables réelles. Le problème d'optimisation :

$$\boldsymbol{\min_{X\in R^n} f(X)}$$

admet au moins une solution si f est continue et coércive.

- Cas d'un problème de **maximisation** : Soit f une fonction réelle de plusieurs variables réelles. Le problème d'optimisation :

$$\boldsymbol{\max_{X\in R^n} f(X)}$$

admet au moins une solution si f est continue, et $-f$ est coércive.

Théorème 2.2 (Unicité d'une solution)

- Cas d'un problème de **minimisation** : Si de plus des hypothèses de théorème précédent, f est **strictement convexe**, alors le problème admet une unique solution globale (minimum global strict).
- Cas d'un problème de **maximisation** : Si de plus des hypothèses de théorème précédent, f est **strictement concave**, alors le problème admet une unique solution globale (minimum global strict).

3. Condition d'optimalité du premier ordre

Définition 3.1

Soit f une fonction différentiable en $\alpha \in D_f$. On dit que α est un point critique (point stationnaire) de f ssi :

$$\nabla f(\alpha) = 0_{R^n}$$

f admet en ce point critique un minimum, un maximum ou un point selle.

L'image du point critique par la fonction f est dite valeur critique.

Les valeurs qui ne sont pas critiques sont dites valeurs régulières.

Exemple 3.1

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

f est continue, différentiable (de classe C^1) et coércive.

$$\nabla f(X) = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Donc (0,0) est le seul point critique.

Pour déterminer la nature d'un point critique, il faut calculer la hessienne ainsi que les déterminants mineurs principaux.

$$Hess = \nabla^2(X) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{cases} \Delta_1 = 2 > 0 \\ \Delta_2 = 2 * 2 - 0 * 0 = 4 > 0 \end{cases}$$

On remarque que la hessienne est constante et ses déterminants mineurs principaux sont strictement positifs, alors f est une fonction strictement convexe. Ainsi, f admet un minimum global strict au point (0,0).

Exemple 3.2

Soit le problème d'optimisation suivant : $Min\ f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x + y$

1 – Montrer que le problème admet au moins une solution

2 – Cette solution est-elle unique ?

3 – Trouver les points critiques du f et déterminer leur nature.

1 – Montrer que f admet au moins une solution (Théorème 2.1)

Pour cela, il faut montrer que :

- f est continue
- f est coércive

f est un polynôme de deux variables de 2ème degrée → f est continue sur R^2.

Pour montrer que f est coércive, il faut montrer que : $\lim_{||(x,y)||\to+\infty} f(x,y) = +\infty$

Posons : $\begin{cases} x = rcos\theta \\ y = rsin\theta \end{cases}$ avec r > 0 et $\theta \in [0,2\pi[$ $\quad r = ||(x,y)||$

La fonction radiale Φ_f associée à f est :

$$\Phi_f(r,\theta) = r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta) - 2r\cos(\theta) + rsin\theta$$

$$= \mathbf{r^2}(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) - 2r\cos(\theta) + rsin\theta$$

$$= r^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) - r(2cos\theta - sin\theta)$$

$$\lim_{||(x,y)||\to+\infty} f(x,y) = \lim_{r\to+\infty} \Phi_f(r,\theta)$$

$$= \lim_{r\to+\infty} r^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))$$

$$= \lim_{r\to+\infty} r^2 = +\infty$$

Ainsi, f est coércive.

On a trouvé que $\boldsymbol{f}$ **est continue et coércive**, alors le problème admet au moins une solution (i.e. admet un minimum global en un ou plusieurs points).

2 – Cette solution est-elle unique ? çàd le problème admet-il un minimum global en un seul point ? ou bien le problème admet-il un minimum global strict (Théorème 2.2)

Pour répondre à cette question, il faut déterminer la nature de f.

f est deux fois différentiable sur R^2.

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x-2 \\ 2y+1 \end{pmatrix}, Hess = \nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \rightarrow \begin{cases} \Delta_1 = 2 > 0 \\ \Delta_2 = 4 > 0 \end{cases}$$

Les déterminants mineurs principaux sont strictement positifs et donc la matrice Hessiene est définie positive. Ainsi, f est strictement convexe.

Donc, la solution est unique (i.e. f admet un minimum global strict (en un seul point)).

3 – Trouver les points critiques du problème et déterminer leur nature

$$\nabla f(x,y) = 0_{R^n} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x-2=0 \\ 2y+1=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Donc le problème admet un point critique unique (1, -1/2) .

Conclusion : Puisque f admet un minimum global strict (question précédente) et $(1, -\frac{1}{2})$ est le seul point critique, donc f admet un minimum global strict en ce point $(1, -\frac{1}{2})$.

Théorème 3.1 : (Condition nécessaire d'optimalité du premier ordre)

Soit f : $U \subset \mathrm{R}^n \rightarrow$ R différentiable. Si f admet en un point α ∈ U un minimum local, alors :

$$\nabla f(\alpha) = 0_{R^n}$$

Soit f : $U \subset \mathrm{R}^n \rightarrow$ R différentiable. Si f admet en un point α ∈ U un maximum local, alors :

$$\nabla f(\alpha) = 0_{R^n}$$

Remarque 3.1 : dans $\boldsymbol{R^2}$

Soit f : $U \subset \mathrm{R}^2 \rightarrow$ R différentiable. Si f admet en un point α ∈ U un point selle, alors :

$$\nabla f(\alpha) = 0_{R^n}$$

4. Conditions d'optimalité du second ordre

Théorème 4.1 (Condition nécessaire d'optimalité du second ordre)

Soit f : $U \rightarrow R$ deux fois différentiable. Si f admet en α ∈ U un minimum local, alors :

- $\nabla f(\alpha) = 0_{R^n}$ (i.e a est un point critique).
- $\nabla^2 f(\alpha)$ est semi-définie positive.

Soit f : $U \rightarrow R$ deux fois différentiable. Si f admet en α ∈ U un maximum local, alors :

- $\nabla f(\alpha) = 0_{R^n}$ (i.e a est un point critique).
- $\nabla^2 f(\alpha)$ est semi-définie négative.

Théorème 4.2 (Condition suffisante d'optimalité)

Soit f : U → R deux fois différentiable. S'il existe α ∈ U tel que :

- $\nabla f(\alpha) = 0_{R^n}$ (i.e a est un point critique).
- $\nabla^2 f(\alpha)$ est définie positive

alors f admet en α un minimum local strict.

Soit f : U → R deux fois différentiable. S'il existe α ∈ U tel que :

- $\nabla f(\alpha) = 0_{R^n}$ (i.e a est un point critique).
- $\nabla^2 f(\alpha)$ est définie négative.

alors f admet en α un maximum local strict.

Théorème 4.3

Soient U $\subset \mathrm{R}^n$ convexe, f : U → R une fonction et α un point critique de f, alors :

1- Cas 1 : Si f est convexe, alors f admet un minimum global en point α (solution globale du problème). Dans ce cas, f admet le même minimum global en d'autres points.
2- Cas 2 : Si f est strictement convexe, alors f admet un minimum global **strict** en a (en un seul point α) (a est l'unique solution globale du problème de minimisation).
3- Cas 3 : Si f est concave, alors f admet un maximum global en point α (solution globale du problème). Dans ce cas, f admet le même maximum global en d'autres points.
4- Cas 4 : Si f est strictement concave, alors f admet un maximum global **strict** en a (en un seul point α) (a est l'unique solution globale du problème de maximisation).

Théorème 4.4

Soient f : $R^n \rightarrow R$ deux fois différentiable et $\alpha \in D_f$ un point critique de f.

- Cas 1 : Si $\nabla^2 f(\alpha)$ est définie positive alors f admet un minimum local strict en a.
- Cas 2 : Si $\nabla^2 f(\alpha)$ est semi-définie positive alors f admet un minimum local en a.
- Cas 3 : Si $\nabla^2 f(\alpha)$ est définie négative alors f admet un maximum local strict de a.
- Cas 4 : Si $\nabla^2 f(\alpha)$ est semi-définie négative alors f admet un maximum local de a.
- Cas 5 : Si $\nabla^2 f(\alpha)$ ne vérifie aucun cas ci-dessus et $\det(\nabla^2 f(\alpha)) < 0$ alors α est un point selle de f.
- Cas 6 : Si $\nabla^2 f(\alpha)$ ne vérifie aucun cas ci-dessus et $\det(\nabla^2 f(\alpha)) = 0$, on ne peut rien conclure.

Exemple 4.1

$$\boldsymbol{f(x, y) = x^2 - y^2}$$

f est continue et deux fois différentiables.

a. Chercher les points critiques : il faut résoudre le système d'équation : $\nabla f(X) = 0$

$\nabla f(X) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix}$

$\nabla f(X) = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Donc (0,0) est un point critique de la fonction f.

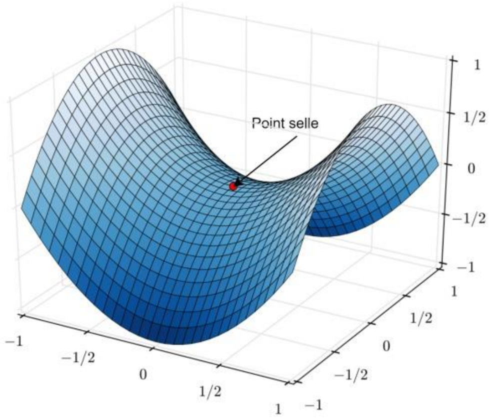
b. Déterminer la nature du point critique :

$$\nabla^2 f(X) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$\nabla^2 f(X)$ est une matrice constante.

Les déterminants mineurs principaux de $\nabla^2 f(X)$ sont $\Delta_1 = 2 > 0$

et $\Delta_2 = 2.(-2) - 0.0 = -4$. Donc, la matrice Hessienne au point (0,0) ($\nabla^2 f(a)$) est ni définie positive, ni semi-définie positive, ni définie négative, ni semi-définie négative et $\det(\nabla^2 f(a)) = -4 < 0$ (le 5ème cas), alors le point (0,0) est **un point selle**.



Dans le cas où n=2, nous utilisons la notion de **Monge**.

Théorème 4.5 (notion de Monge)

Soient f : R² → R deux fois différentiable et $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in$ D_f un point critique de f. On pose :

r = $\frac{d^2f}{dx^2}(\alpha_1, \alpha_2)$, $s = \frac{d^2f}{dxdy}(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{d^2f}{dydx}(\alpha_1, \alpha_2)$ t = $\frac{d^2f}{dy^2}(\alpha_1, \alpha_2)$

$$Hess = \nabla^2 f(X) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$$

- Si $rt - s^2 > 0$ (Δ_2) et $r > 0$ (Δ_1), f admet un minimum local strict en a.
- Si $rt - s^2 = 0$ et $r > 0$, f admet un minimum local en a.
- Si $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$, f admet un maximum local strict en a.
- Si $rt - s^2 = 0$ et $r < 0$, f admet un maximum local en a.
- Si $rt - s^2 < 0$, α est un point selle (col) de f.

Exercice 1

Soit f une fonction définie par : $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 + 3x^2y + 3y$

1- Les points suivants sont-ils des points critiques A(1,-1), B(-1,1), C(2,-3) ?
2- Déterminer la nature des points A, B et C (si c'est possible).

1 - Les points suivants sont-ils des points critiques A(1,-1), B(-1,1), C(2,-3) ?

Rappel : Définition 3.1 : Soit f une fonction différentiable en $\alpha \in D_f$. On dit que α est un point critique (point stationnaire) de f ssi :

$$\nabla f(\alpha) = 0_{R^n}$$

f est différentiable sur R^2.

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 + 3y^2 + 6xy \\ 6xy + 3x^2 + 3 \end{pmatrix}$$

Point A(1,-1)

$$\nabla f(1,-1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\nabla f(A) = 0_{R^2}$, et donc le point $A(1,-1)$ est un point critique de f.

Point B(-1,1)

$$\nabla f(-1,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\nabla f(B) = 0_{R^2}$, et dont le point $\mathrm{B}(-1,1)$ est un point critique de f.

Point C(2,-3)

$$\nabla f(2,-3) = \begin{pmatrix} 3 \\ -21 \end{pmatrix}$$

$\nabla f(C) \neq 0_{R^2}$, et donc le point $\mathrm{C}(2,-3)$ n'est pas un point critique de f.

2 - Déterminer la nature des points critiques

f est deux fois différentiables sur R^2 (de classe C^2).

Calcul de la matrice Hessienne : et utiliser le thèorème 4.5 (notion de Monge)

$$Hess = \nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x + 6y & 6y + 6x \\ 6y + 6x & 6x \end{pmatrix}$$

Point A(1,-1)

$$Hess = \nabla^2 f(1,-1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \mathrm{r} = \Delta_1 = 0 \\ rt - s^2 = \Delta_2 = 0 \end{cases}$$

On ne peut rien conclure.

Point B(-1,1)

$$Hess = \nabla^2 f(-1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \mathrm{r} = \Delta_1 = 0 \\ rt - s^2 = \Delta_2 = 0 \end{cases}$$

On ne peut rien conclure.

Exercice 2

Soit la fonction f suivante :

$$f(x,y) = 2xy - 2x^2 - y^2 + 4x - y$$

1- f est-elle continue ? f elle-elle coércive ?
2- Quelle est la nature f ? (convexe, strictement convexe, concave, strictement concave)
3- Trouver les points critiques de f.
4- Déterminer leur nature.

1- <u>*f* est-elle continue ? f elle-elle coércive ?</u>

f est un polynôme de deux variables de 2ème degrée → f est continue sur R^2.

Pour voir si f est coércive on non, il faut calculer : $\lim\limits_{||(x,y)||\to+\infty} f(x,y) = +\infty$

Posons : $\begin{cases} x = r cos\theta \\ y = r sin\theta \end{cases}$ avec r > 0 et $\theta \in [0,2\pi[$ $r = ||(x,y)||$

La fonction radiale Φ_f associée à f est :

$$\Phi_f(r,\theta) = 2\,r^2\cos(\theta)\sin(\theta) - 2\,r^2\cos^2(\theta) - r^2\sin^2(\theta) + 4\,r\cos(\theta) - r\sin(\theta)$$

$$= r^2\left(2\cos(\theta)\sin(\theta) - \cos^2(\theta) - \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)\right) + r\,(4\cos(\theta) - \sin(\theta))$$

$$= r^2\,(2\cos(\theta)\sin(\theta) - \cos^2(\theta) - 1) + r\,(4\cos(\theta) - \sin(\theta))$$

$$\lim_{(x,y)\to+\infty} f(x,y) = \lim_{r\to+\infty} \Phi_f(r,\theta)$$

$$= \lim_{r\to+\infty} r^2\,(2\cos(\theta)\sin(\theta) - \cos^2(\theta) - 1) + r\,(4\cos(\theta) - \sin(\theta))$$

$$= \lim_{r\to+\infty} r^2\,(2\cos(\theta)\sin(\theta) - \cos^2(\theta) - 1)$$

Il est clair que : $\lim\limits_{r\to+\infty} r^2 = +\infty$

Donc la limite $\lim\limits_{r\to+\infty} \Phi_f(r,\theta)$ dépend du signe de $\mathbf{2\cos(\theta)\sin(\theta) - \cos^2(\theta) - 1}$

$$-1 \le \cos(\theta) \le 1$$

$$-1 \le \sin(\theta) \le 1$$

Alors :

$$-1 \le \cos(\theta)\sin(\theta) \le 1$$

On multiple cette inégalité par 2, on obtient :

$$-2 \le 2\cos(\theta)\sin(\theta) \le 2 \qquad (L1)$$

D'un autre coté :

$$0 \le \cos^2(\theta) \le 1$$

Si on multiplie cette inégalité par (-1), on obtient :

$$-1 \leq -\cos^2(\theta) \leq 0$$

On rajoute -1 à cette inégalité, on obtient :

$$-1 - \mathbf{1} \leq -\cos^2(\theta) - \mathbf{1} \leq 0 - \mathbf{1}$$

$$-2 \leq -\cos^2(\theta) - \mathbf{1} \leq -\mathbf{1} \quad (\mathbf{L2})$$

Donc, (L1) + (L2) donne :

$$-4 \leq 2\cos(\theta)\sin(\theta) - \cos^2(\theta) - 1 \leq 1$$

Donc, le signe de $2\cos(\theta)\sin(\theta) - \cos^2(\theta) - 1$ dépends de θ

Ainsi, la limite de f dépend de θ, et donc $\lim\limits_{||(x,y)|| \to +\infty} f(x,y)$ n'existe pas.

- ➔ f n'est pas coércive.

2- Quelle est la nature de f ? (convexe, strictement convexe, concave, strictement concave) (voir le chapitre 1)

f est deux fois différentiables sur R^2 (f est de classe C^2).

$$\nabla f(x,y) = \begin{cases} 2y - 4x + 4 \\ 2x - 2y - 1 \end{cases}$$

$$Hess = \nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \Delta_1 = -4 < 0 \\ \Delta_2 = -4 * (-2) - 2 * 2 = 4 > 0 \end{cases}$$

Les deux déterminants mineurs principaux sont de signes alternés avec Δ_1 négatif, et donc la matrice Hess est définie négative.

Ainsi, la fonction f est strictement concave.

3- Recherche des points critiques du problème d'optimisation (définition 3.1)

Le recherche des points critiques de f consiste à résoudre le système d'équation :

$$\nabla f(x,y) = 0_{R^2}$$

$$\nabla f(x,y) = 0_{R^2} \leftrightarrow \begin{cases} 2y - 4x + 4 = 0 \\ 2x - 2y - 1 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} y - 2x + 2 = 0 & (L1) \\ 2x - 2y - 1 = 0 & (L2) \end{cases}$$

(Ll) + (L2) : $-y + 1 = 0 \leftrightarrow y = 1$

On remplace y par 1 dans (L1), on obtient : $x = \frac{3}{2}$

Alors, f admet un seule point critique $(\frac{3}{2}, 1)$.

4- Nature des points critiques

f admet un seul point critique $(\frac{3}{2}, 1)$. En plus, f est strictement concave.

Donc f admet un maximum global strict en ce point $(\frac{3}{2}, 1)$. (Théorème 4.3 → 4ème cas).