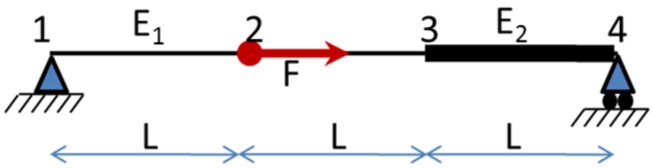
Chapitre 4 : Eléments finis barres

Exercice 1 :

Soit la poutre ci-dessous de longueur « 3L », avec « L=1,00 m » et de section « A=900 cm² ». Elle est soumise à une charge concentrée « F=2MN », appliquée au nœud « 2 ». Cette poutre est de rigidité variable : les tronçons entre les nœuds « 1 » et « 3 » ont une rigidité E_1=10 000 MPa. Alors que le tronçon « 3-4 » a une rigidité E_2=30 000 MPa.

1/ Ecrire la matrice de rigidité de cette poutre.

2/ Déterminer les déplacements aux nœuds.



Discrétisation de cette poutre en des éléments et des nœuds.

Nœuds		
N°	X	Y
1	0	0
2	L	0
3	2L	0
4	3L	0

Eléments				
N°	NO	NE	Longueur	Module de Young
1	1	2	L	E_1
2	2	3	L	E_1
3	3	4	L	E_2

1/ La matrice de rigidité de la poutre :

a/ Matrices de rigidité locales :

La poutre est soumise à un effort de traction-compression dont la forme de la matrice de rigidité est :

$$[\mathbf{K_i}] = \frac{\mathbf{E_i A}}{\mathbf{L}}\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

Elément 1 [MN/ml]	Elément 2 [MN/ml]	Elément 3 [MN/ml]
$[\mathbf{K_I}] = \frac{\mathbf{E_1 A}}{\mathbf{L}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$	$[\mathbf{K_{II}}] = \frac{\mathbf{E_1 A}}{\mathbf{L}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$	$[\mathbf{K_{III}}] = \frac{\mathbf{E_2 A}}{\mathbf{L}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$
$[\mathbf{K_I}] = 900\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$	$[\mathbf{K_{II}}] = 900\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$	$[\mathbf{K_{III}}] = 2\,700\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

b/ Assemblage:

$$[K]=\frac{A}{l}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{c:c:c:c} E_1 & -E_1 & 0 & 0 \\ \hdashline -E_1 & 2E_1 & -E_1 & 0 \\ \hdashline 0 & -E_1 & E_1+E_2 & -E_2 \\ \hdashline 0 & 0 & -E_2 & E_2 \end{array}\right] \end{array}\begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{array}$$

$$[K]=10^2\times\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{c:c:c:c} 9 & -9 & 0 & 0 \\ \hdashline -9 & 18 & -9 & 0 \\ \hdashline 0 & -9 & 36 & -27 \\ \hdashline 0 & 0 & -27 & 27 \end{array}\right] \end{array}\begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{array}$$

2/ Déplacements aux nœuds :

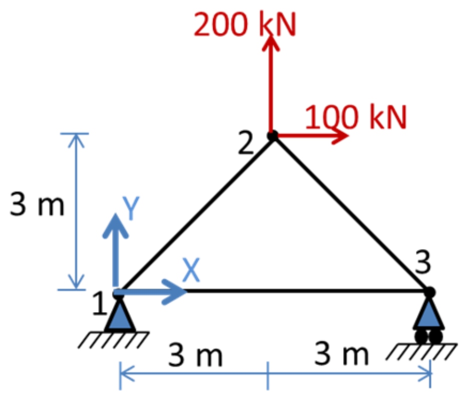
$$10^2\times\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{c:c:c:c} 9 & -9 & 0 & 0 \\ \hdashline -9 & 18 & -9 & 0 \\ \hdashline 0 & -9 & 36 & -27 \\ \hdashline 0 & 0 & -27 & 27 \end{array}\right] \end{array}\left|\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{array}\right| \quad \text{Avec} \quad \left|\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} 0 \\ F=2MN \\ 0 \\ 0 \end{array}\right|$$

Conditions aux limites

Nous avons un appui double au nœud 1 et un appui simple au nœud 4 alors les 2 DDL sont nuls : (u_1=0 et u_4=0). On élimine alors les 1ère et 4ème lignes et colonnes, on obtient alors le système suivant :

$$10^2\begin{bmatrix} 9 & -9 & 0 & 0 \\ -9 & 18 & -9 & 0 \\ 0 & -9 & 36 & -27 \\ 0 & 0 & -27 & 27 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 18 & -9 \\ -9 & 36 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2\times10^{-2} \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{Bmatrix} \boldsymbol{u_2} \\ \boldsymbol{u_3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{1,27\ mm} \\ \mathbf{0,317\ mm} \end{Bmatrix}}$$

Exercice 2 :



Soit le système treillis constitué de 3 barres de mêmes rigidités « E=200 KN/mm² » et de sections égales « A=3000 mm² », (figure ci-contre).

1/ Déterminer la matrice de rigidité de chaque barre de ce système dans le repère local ;

2/Exprimer la rigidité de chaque barre dans un repère global (X,Y) placé au nœud « 1 »

3/ Ecrire la matrice de rigidité du système (Assemblage).

4/ Déterminer les déplacements aux nœuds.

5/ Calculer les efforts dans les barres.

<u>1/ Matrices de rigidité locales :</u>

<u>Définitions des nœuds et les éléments :</u>

Nœuds		
N°	X	Y
1	0	0
2	3	3
3	6	0

Eléments			
N°	NO	NE	Longueur (m)
1	1	2	$3\sqrt{2} = 4{,}24$
2	2	3	$3\sqrt{2} = 4{,}24$
3	1	3	6

La poutre est soumise à un effort de traction-compression dont la forme de la matrice de rigidité est :

$$[\mathbf{K_i}] = \frac{\mathbf{EA}}{\mathbf{L_i}}\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

Elément 1 [KN/ml]	Elément 2 [KN/ml]	Elément 3 [KN/ml]
$[\mathbf{K_I}] = \frac{\mathbf{EA}}{\mathbf{L_1}}\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$	$[\mathbf{K_{II}}] = \frac{\mathbf{EA}}{\mathbf{L_2}}\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$	$[\mathbf{K_{III}}] = \frac{\mathbf{EA}}{\mathbf{L_3}}\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$
$[\mathbf{K_I}] = \mathbf{10^5}\sqrt{\mathbf{2}}\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$	$[\mathbf{K_{II}}] = \mathbf{10^5}\sqrt{\mathbf{2}}\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$	$[\mathbf{K_{III}}] = \mathbf{10^5}\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$

<u>2/La matrice de rigidité globale élémentaire :</u>

Les 3 éléments du système sont orientés d'une manière différente, pour pouvoir calculer les déplacements au niveau des nœuds, on doit considérer un repère commun (X,Y).

Avant de faire l'assemblage, on doit écrire la matrice de chaque élément dans le repère global (X,Y), ce qu'on appelle « matrice de rigidité globale élémentaire ».

La matrice de rigidité de chaque élément transformée dans le repère (X,Y) est donnée par la relation :

$$[\mathbf{K_e}]=[\lambda]^{\mathbf{T}}[\mathbf{k}][\lambda]$$

Avec [λ] étant la matrice de transformation :

Dans le plan (X,Y), elle est égale à : $[\lambda] = \begin{bmatrix} l_{ox} & m_{ox} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_{ox} & m_{ox} \end{bmatrix}$ ce qui nous donne :

$$[\boldsymbol{K_e}] = \frac{\boldsymbol{EA}}{\boldsymbol{L}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{l_{ox}^2} & \boldsymbol{l_{ox}m_{ox}} & \boldsymbol{-l_{ox}^2} & \boldsymbol{-l_{ox}m_{ox}} \\ \boldsymbol{l_{ox}m_{ox}} & \boldsymbol{m_{ox}^2} & \boldsymbol{-l_{ox}m_{ox}} & \boldsymbol{-m_{ox}^2} \\ \boldsymbol{-l_{ox}^2} & \boldsymbol{-l_{ox}m_{ox}} & \boldsymbol{l_{ox}^2} & \boldsymbol{l_{ox}m_{ox}} \\ \boldsymbol{-l_{ox}m_{ox}} & \boldsymbol{-m_{ox}^2} & \boldsymbol{l_{ox}m_{ox}} & \boldsymbol{m_{ox}^2} \end{bmatrix}$$

Et $l_{ox_I} = \frac{X_j - X_i}{L_I}$ et $m_{ox_I} = \frac{Y_j - Y_i}{L_I}$ et i et j étant les nœuds n'origine et d'extrémité des éléments.

Elément 1 [KN/ml] $l_{ox_1} = \frac{3-0}{4,24} = 0,707 = m_{ox_1}$	**Elément 2 [KN/ml]** $l_{ox_2} = \frac{6-3}{4,24} = 0,707 = -m_{ox_2}$	**Elément 3 [KN/ml]** $l_{ox_3} = \frac{6-0}{6} = 1$ et $m_{ox_3} = 0$
$[\mathbf{K_{eI}}] = \mathbf{10^5 \frac{\sqrt{2}}{2}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$	$[\mathbf{K_{eII}}] = \mathbf{10^5 \frac{\sqrt{2}}{2}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$	$[\mathbf{K_{eIII}}] = \mathbf{10^5} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$

On peut écrire les matrices sous la forme :

$[\mathrm{K_{eI}}] = \begin{bmatrix} [K_{11}{}^{I}] & [K_{12}{}^{I}] \\ [K_{21}{}^{I}] & [K_{22}{}^{I}] \end{bmatrix}$; avec $[K_{11}{}^{I}] = [K_{22}{}^{I}] = -[K_{12}{}^{I}] = -[K_{21}{}^{I}] = 10^5 \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

De même :

$[\mathrm{K_{eII}}] = \begin{bmatrix} [K_{22}{}^{II}] & [K_{23}{}^{II}] \\ [K_{32}{}^{II}] & [K_{33}{}^{II}] \end{bmatrix}$; avec $[K_{22}{}^{II}] = [K_{33}{}^{II}] = -[K_{23}{}^{II}] = -[K_{32}{}^{II}] = 10^5 \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Et $[\mathrm{K_{eIII}}] = \begin{bmatrix} [K_{11}{}^{III}] & [K_{13}{}^{III}] \\ [K_{31}{}^{III}] & [K_{33}{}^{III}] \end{bmatrix}$; avec $[K_{11}{}^{III}] = [K_{33}{}^{III}] = -[K_{13}{}^{III}] = -[K_{31}{}^{III}] = 10^5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

<u>3/ Matrice de rigidité su système (Assemblage) :</u>

La matrice de rigidité su système est obtenue par la somme des différentes matrices de rigidité élémentaires. Sa taille est de 2x nombre de nœuds (6x6) :

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{11}{}^{I}] + [K_{11}{}^{III}] & [K_{12}{}^{I}] & [K_{13}{}^{III}] \\ [K_{12}{}^{I}] & [K_{22}{}^{I}] + [K_{22}{}^{II}] & [K_{23}{}^{II}] \\ [K_{13}{}^{III}] & [K_{32}{}^{II}] & [K_{33}{}^{II}] + [K_{33}{}^{III}] \end{bmatrix}$$

$$[\boldsymbol{K}] = \mathbf{10^5}\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}+1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}+1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \mathbf{10^5}\begin{bmatrix} \mathbf{1,707} & \mathbf{0,707} & \mathbf{-0,707} & \mathbf{-0,707} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0,707} & \mathbf{0,707} & \mathbf{-0,707} & \mathbf{-0,707} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-0,707} & \mathbf{-0,707} & \mathbf{1,414} & \mathbf{0} & \mathbf{-0,707} & \mathbf{0,707} \\ \mathbf{-0,707} & \mathbf{-0,707} & \mathbf{0} & \mathbf{1,414} & \mathbf{0,707} & \mathbf{-0,707} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{-0,707} & \mathbf{0,707} & \mathbf{1,707} & \mathbf{-0,707} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0,707} & \mathbf{-0,707} & \mathbf{-0,707} & \mathbf{0,707} \end{bmatrix}$$

4/Les déplacements aux nœuds :

Les conditions aux limites :

Nous avons un appui double au nœud 1 (Ux=0 et Uy=0) et un appui simple au nœud 3 (Uy=0), alors les 3 DDL correspondent aux 1ère, 2ème et 6ème lignes et colonnes. Ces 3 lignes et colonnes seront supprimées, telles que :

$$[\boldsymbol{K}] = \mathbf{10^5}\begin{bmatrix} \mathbf{1,707} & \mathbf{0,707} & \mathbf{-0,707} & \mathbf{-0,707} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0,707} & \mathbf{0,707} & \mathbf{-0,707} & \mathbf{-0,707} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-0,707} & \mathbf{-0,707} & \mathbf{1,414} & \mathbf{0} & \mathbf{-0,707} & \mathbf{0,707} \\ \mathbf{-0,707} & \mathbf{-0,707} & \mathbf{0} & \mathbf{1,414} & \mathbf{0,707} & \mathbf{-0,707} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{-0,707} & \mathbf{0,707} & \mathbf{1,707} & \mathbf{-0,707} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0,707} & \mathbf{-0,707} & \mathbf{-0,707} & \mathbf{0,707} \end{bmatrix} \begin{matrix} \boldsymbol{U_{1x}} \\ \boldsymbol{U_{1y}} \\ \boldsymbol{U_{2x}} \\ \boldsymbol{U_{2y}} \\ \boldsymbol{U_{3x}} \\ \boldsymbol{U_{3y}} \end{matrix}$$

Le vecteur forces est donné par : $\{F\} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \\ 200 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} KN$

On obtient alors le système à résoudre suivant :

$$\mathbf{10^5}\begin{bmatrix} \mathbf{1,414} & \mathbf{0} & \mathbf{-0,707} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1,414} & \mathbf{0,707} \\ \mathbf{-0,707} & \mathbf{0,707} & \mathbf{1,707} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{U_{2x}} \\ \boldsymbol{U_{2y}} \\ \boldsymbol{U_{3x}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 100 \\ 200 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{Bmatrix} \boldsymbol{U_{2x}} \\ \boldsymbol{U_{2y}} \\ \boldsymbol{U_{3x}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0,457\ mm} \\ \mathbf{1,664\ mm} \\ \mathbf{-0,5\ mm} \end{Bmatrix}}$$

5/ Les efforts dans les barres :

Pour calculer les efforts dans les barres, il faut revenir sur les axes locaux (x,y) :

L'effort local dans une barre quelconque est donné par : $N_{ij} = \frac{\mathrm{EA}}{\mathrm{L}}\left(u_j - u_i\right)$

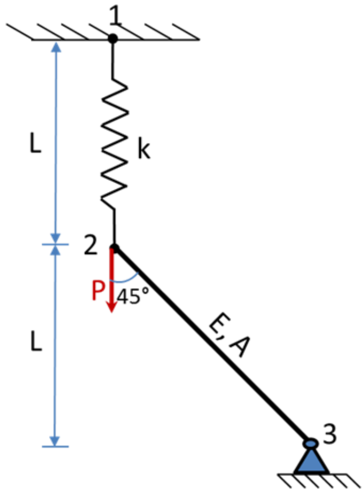
En fonction des coordonnées globales : $\begin{cases} u_i = U_{ix}l_{ox} + U_{iy}m_{ox} \\ u_j = U_{jx}l_{ox} + U_{jy}m_{ox} \end{cases}$

Ce qui donne : $N_{ij} = \frac{E_I A_I}{L_I}[l_{ox} \quad m_{ox}]\begin{Bmatrix} U_{jx} - U_{ix} \\ U_{jy} - U_{iy} \end{Bmatrix}$

Elément 1 [KN]	Elément 2 [KN]	Elément 3 [KN]
$N_I = \frac{EA}{L_I}[l_{oxI} \quad m_{oxI}]\begin{Bmatrix} U_{2x} - U_{1x} \\ U_{2y} - U_{1y} \end{Bmatrix}$	$N_{II} = \frac{EA}{L_{II}}[l_{oxII} \quad m_{oxII}]\begin{Bmatrix} U_{3x} - U_{2x} \\ U_{3y} - U_{2y} \end{Bmatrix}$	$N_{III} = \frac{EA}{L_{III}}[l_{oxIII} \quad m_{oxIII}]\begin{Bmatrix} U_{3x} - U_{1x} \\ U_{3y} - U_{1y} \end{Bmatrix}$
$\boldsymbol{N_I = 212,06\ KN}$	$\boldsymbol{N_{II} = -120,68\ KN}$	$\boldsymbol{N_{III} = -50\ KN}$

Exercice 3 :

Soit le système montré en figure ci-contre. Celui-ci est composé d'une poutre de caractéristiques « E et A » et d'un ressort de rigidité « k ». Une charge d'intensité « P=2 KN » est appliquée au nœud « 2 ».



1/Quel est le nombre de degrés de liberté pour ce système ?

2/ Ecrire la matrice de rigidité locale de chaque élément de cette structure.

3/ Ecrire la matrice globale élémentaire pour chaque élément.

4/ Donner la matrice de rigidité globale de la structure

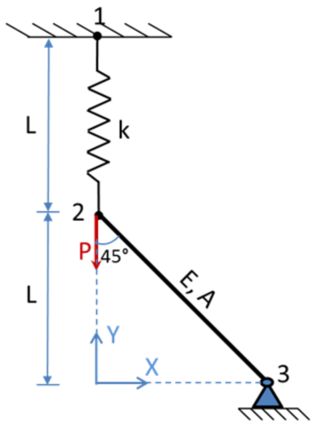
5/ Déterminer le déplacement au nœud 2.

6/ Calculer les efforts normaux dans les éléments.

Données : E = 10 000 MPa, A= 25 mm², L=1,00 m et k = 100 KN/ml.

1/ Le nombre de degrés de liberté pour ce système :

Localement, nous avons un 1DDL par nœud, ce qui nous fait 2DDL par élément. Les éléments ne sont pas orientés dans le même repère, donc on doit se référer par rapport un repère global (X,Y) qu'on placera n'importe où, par exemple :



Dans le repère global, nous avons 2DDL par nœud ce qui nous fait 6DDL pour tout le système.

2/ La matrice de rigidité locale de chaque élément de cette structure :

Elément 1-2 [KN/ml]	Elément 2-3 [KN/ml]
$[\mathbf{K_I}] = \mathbf{k}\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$	$[\mathbf{K_{II}}] = \frac{\mathbf{EA}}{\mathbf{L_2}}\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$
$[\mathbf{K_I}] = \mathbf{100}\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$	$[\mathbf{K_{II}}] = \mathbf{176,77}\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$

3/ La matrice globale élémentaire pour chaque élément :

Elément 1 [KN/ml] $l_{ox_1} = 0\ ;\ m_{ox_1} = -1$	Elément 2 [KN/ml] $l_{ox_2} = \frac{1-0}{\sqrt{2}} = 0{,}707 = -m_{ox_2}$
$[\mathbf{K_{eI}}] = \mathbf{k}\left[\begin{array}{cc|cc} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array}\right] = \mathbf{100}\left[\begin{array}{cc|cc} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array}\right]$	$[\mathbf{K_{eII}}] = \mathbf{88,39}\left[\begin{array}{cc|cc} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \hline \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{array}\right]$

4/ La matrice de rigidité globale de la structure

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{11}{}^{I}] & [K_{12}{}^{I}] & [0] \\ [K_{12}{}^{I}] & [K_{22}{}^{I}] + [K_{22}{}^{II}] & [K_{23}{}^{II}] \\ [0] & [K_{32}{}^{II}] & [K_{33}{}^{II}] \end{bmatrix}$$

Avec : $[\mathrm{K_{eI}}] = \begin{bmatrix} [K_{11}{}^{I}] & [K_{12}{}^{I}] \\ [K_{21}{}^{I}] & [K_{22}{}^{I}] \end{bmatrix}$; avec $[K_{11}{}^{I}] = [K_{22}{}^{I}] = -[K_{12}{}^{I}] = -[K_{21}{}^{I}] = 100\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Et $[K_{eII}] = \begin{bmatrix} [K_{22}{}^{II}] & [K_{23}{}^{II}] \\ [K_{32}{}^{II}] & [K_{33}{}^{II}] \end{bmatrix}$; avec $[K_{22}{}^{II}] = [K_{33}{}^{II}] = -[K_{23}{}^{II}] = -[K_{32}{}^{II}] = 88{,}39 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$[K] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -100 \end{bmatrix} & [0] \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -100 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 88{,}39 & -88{,}39 \\ -88{,}39 & 188{,}39 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -88{,}39 & 88{,}39 \\ 88{,}39 & -88{,}39 \end{bmatrix} \\ [0] & \begin{bmatrix} -88{,}39 & 88{,}39 \\ 88{,}39 & -88{,}39 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 88{,}39 & -88{,}39 \\ -88{,}39 & 88{,}39 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

<u>5/ Le déplacement au nœud 2 :</u>

Les 2DDL des nœuds 1 et 3 sont bloqués, donc on supprime les lignes et colonnes suivantes : ($1^{ère}$, $2^{ème}$, $5^{ème}$ et $6^{ème}$) ce qui reste comme système :

$$\begin{bmatrix} 88{,}39 & -88{,}39 \\ -88{,}39 & 188{,}39 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{2x} \\ U_{2y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{2x} = 0 \\ F_{2y} = -P = -20 \end{Bmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{Bmatrix} U_{2x} = -2\ cm \\ U_{2y} = -2\ cm \end{Bmatrix}}$$

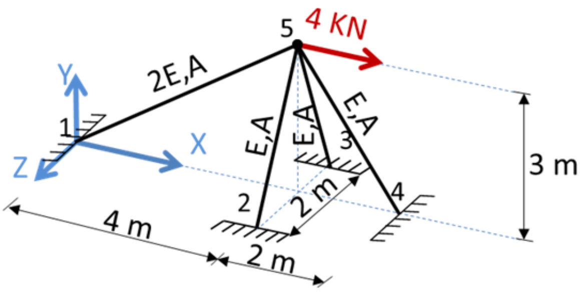
<u>6/ Les efforts normaux dans les éléments :</u>

Pour calculer les efforts dans les barres, il faut revenir sur les axes locaux (x,y) :

$$N_{ij} = \frac{E_I A_I}{L_I} [l_{ox} \quad m_{ox}] \begin{Bmatrix} U_{jx} - U_{ix} \\ U_{jy} - U_{iy} \end{Bmatrix}$$

Elément 1 [KN]	**Elément 2 [KN]**
$N_I = k[l_{ox1} \quad m_{ox1}] \begin{Bmatrix} U_{2x} - U_{1x} \\ U_{2y} - U_{1y} \end{Bmatrix}$	$N_{II} = \frac{EA}{L_{II}} [l_{ox2} \quad m_{ox2}] \begin{Bmatrix} U_{3x} - U_{2x} \\ U_{3y} - U_{2y} \end{Bmatrix}$
$\boldsymbol{N_I = 2\ KN}$	$\boldsymbol{N_{II} = 0\ KN}$

Exercice 4 :



Soit le système treillis 3D montré en figure. Il est soumis à une charge concentrée au nœud 5 d'intensité 4KN. Les barres de la structure ont la même section « A = 25 mm² ». La barre « 1-5 » a une rigidité égale à « 2E » alors que les autres barres possèdent la même rigidité « E=10 000 MPa ». Ce système est encastré à sa base.

1/ Quel est le nombre de degrés de liberté de ce système ?
Qu'elle serait alors la taille des matrices de rigidités (locales et globales) ?

2/ Ecrire les matrices de rigidités locales.

3/ Exprimer la rigidité élémentaire dans le repère global (X,Y,Z).

4/ Ecrire la matrice de rigidité de la structure.

5/ Déterminer le déplacement au nœud 5.

<u>1/ Le nombre de degrés de liberté de ce système et la taille des matrices de rigidités (locales et globales) :</u>

Le système étant globalement dans le repère (X, Y, Z), alors chaque nœud possède 3DDL (Ux, Uy et Uz). Nous avons 5 nœuds ce qui donne 15 DDL au total. Maintenant, localement, il s'agit d'un système treillis, alors les barres sont soumises à l'effort de traction-compression, ce qui veut dire 1DDL pour chaque nœud.
La taille des matrices de rigidités locales est toujours (2x2) alors que la taille de la matrice globale est de (15x15).

<u>2/ Les matrices de rigidités locales :</u>

Avant de définir les matrices de rigidités, nous allons définir les connectivités des éléments :

Nœuds			
N°	X	Y	Z
1	0	0	0
2	4	0	1
3	4	0	-1
4	6	0	0
5	4	3	0

Eléments				
N°	NO	NE	Rigidité	Longueur (m)
I	1	5	2EA	5
II	2	5	EA	$\sqrt{10} = 3{,}16$
III	3	5	EA	$\sqrt{10} = 3{,}16$
IV	4	5	EA	$\sqrt{13} = 3{,}61$

Elément 1-5 [KN/ml]	**Elément 2-5 [KN/ml]**	**Elément 3-5 [KN/ml]**	**Elément 4-5 [KN/ml]**
$[K_I] = \frac{2EA}{L_I}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$	$[K_{II}] = \frac{EA}{L_{II}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$	$[K_{III}] = \frac{EA}{L_{III}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$	$[K_{IV}] = \frac{EA}{L_{IV}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$
$[K_I] = 100\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$	$[K_{II}] = 79{,}11\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$	$[K_{III}] = 79{,}11\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$	$[K_{IV}] = 69{,}25\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

3/ La rigidité élémentaire dans le repère global (X,Y,Z) :

La matrice de rigidité de chaque élément transformée dans le repère (X,Y,Z) est toujours donnée par la relation :

$$[K_e]=[\lambda]^T[k][\lambda]$$

Avec $[\lambda]$ étant la matrice de transformation :

Dans le repère (X,Y,Z), elle est égale à : $[\lambda]=\begin{bmatrix} l_{ox} & m_{ox} & n_{ox} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{ox} & m_{ox} & n_{ox}\end{bmatrix}$ ce qui nous donne :

$$[K_e]=\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} l_{ox}^2 & l_{ox}m_{ox} & l_{ox}n_{ox} & -l_{ox}^2 & -l_{ox}m_{ox} & -l_{ox}n_{ox} \\ l_{ox}m_{ox} & m_{ox}^2 & m_{ox}n_{ox} & -l_{ox}m_{ox} & -m_{ox}^2 & -m_{ox}n_{ox} \\ l_{ox}n_{ox} & m_{ox}n_{ox} & n_{ox}^2 & -l_{ox}n_{ox} & -m_{ox}n_{ox} & -n_{ox}^2 \\ -l_{ox}^2 & -l_{ox}m_{ox} & -l_{ox}n_{ox} & l_{ox}^2 & l_{ox}m_{ox} & l_{ox}n_{ox} \\ -l_{ox}m_{ox} & -m_{ox}^2 & -m_{ox}n_{ox} & l_{ox}m_{ox} & m_{ox}^2 & m_{ox}n_{ox} \\ -l_{ox}n_{ox} & -m_{ox}n_{ox} & -n_{ox}^2 & l_{ox}n_{ox} & m_{ox}n_{ox} & n_{ox}^2 \end{bmatrix}$$

Elément I [KN/ml]	Elément II [KN/ml]
$l_{ox_1}=\frac{4-0}{5}=0{,}8\,;\,m_{ox_1}=\frac{3-0}{5}=0{,}6\,;\,n_{ox_1}=\frac{Z_5-Z_1}{L_1}=0$	$l_{ox_2}=0\,;\,m_{ox_2}=\frac{3-0}{3{,}16}=0{,}95\,;n_{ox_2}=\frac{Z_5-Z_2}{L_2}=\frac{0-1}{3{,}16}=-0{,}316$
$[K_{eI}]=100\begin{bmatrix} 0{,}64 & 0{,}48 & 0 & -0{,}64 & -0{,}48 & 0 \\ 0{,}48 & 0{,}36 & 0 & -0{,}48 & -0{,}36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}64 & -0{,}48 & 0 & 0{,}64 & 0{,}48 & 0 \\ -0{,}48 & -0{,}36 & 0 & 0{,}48 & 0{,}36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$[K_{eII}]=79{,}11\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}9 & -0{,}3 & 0 & -0{,}9 & 0{,}3 \\ 0 & -0{,}3 & 0{,}1 & 0 & 0{,}3 & -0{,}1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}9 & 0{,}3 & 0 & 0{,}9 & -0{,}3 \\ 0 & 0{,}3 & -0{,}1 & 0 & -0{,}3 & 0{,}1 \end{bmatrix}$
Elément III [KN/ml]	**Elément IV [KN/ml]**
$l_{ox_3}=0\,;\,m_{ox_3}=\frac{3-0}{3{,}16}=0{,}95\,;n_{ox_3}=\frac{0+1}{3{,}16}=0{,}316$	$l_{ox_4}=\frac{4-6}{3{,}61}=-0{,}55;\,m_{ox_4}=\frac{3-0}{3{,}61}=0{,}83\,;\,n_{ox_4}=0$
$[K_{eIII}]=79{,}11\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}9 & 0{,}3 & 0 & -0{,}9 & -0{,}3 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0 & -0{,}3 & -0{,}1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}9 & -0{,}3 & 0 & 0{,}9 & 0{,}3 \\ 0 & -0{,}3 & -0{,}1 & 0 & 0{,}3 & 0{,}1 \end{bmatrix}$	$[K_{eIV}]=69{,}25\begin{bmatrix} 0{,}3 & -0{,}46 & 0 & -0{,}3 & 0{,}46 & 0 \\ -0{,}46 & 0{,}69 & 0 & 0{,}46 & -0{,}69 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}3 & 0{,}46 & 0 & 0{,}3 & -0{,}46 & 0 \\ 0{,}46 & -0{,}69 & 0 & -0{,}46 & 0{,}69 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

4/ La matrice de rigidité de la structure :

$$[K]=\begin{bmatrix} [K_{11}{}^{I}] & [0] & [0] & [0] & [K_{15}{}^{I}] \\ [0] & [K_{22}{}^{II}] & [0] & [0] & [K_{25}{}^{II}] \\ [0] & [0] & [K_{33}{}^{III}] & [0] & [K_{35}{}^{III}] \\ [0] & [0] & [0] & [K_{44}{}^{IV}] & [K_{45}{}^{IV}] \\ [K_{51}{}^{I}] & [K_{52}{}^{II}] & [K_{53}{}^{III}] & [K_{54}{}^{IV}] & [K_{55}{}^{I}]+[K_{55}{}^{II}]+[K_{55}{}^{III}]+[K_{55}{}^{IV}] \end{bmatrix}$$

Avec : $[K_{eI}]=\begin{bmatrix}[K_{11}{}^{I}] & [K_{15}{}^{I}] \\ [K_{51}{}^{I}] & [K_{55}{}^{I}]\end{bmatrix}$; avec $[K_{11}{}^{I}]=[K_{55}{}^{I}]=-[K_{15}{}^{I}]=-[K_{51}{}^{I}]=100\begin{bmatrix}0{,}64 & 0{,}48 & 0 \\ 0{,}48 & 0{,}36 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

$[K_{eII}]=\begin{bmatrix}[K_{22}{}^{II}] & [K_{25}{}^{II}] \\ [K_{52}{}^{II}] & [K_{55}{}^{II}]\end{bmatrix}$; avec $[K_{22}{}^{II}]=[K_{55}{}^{II}]=-[K_{25}{}^{II}]=-[K_{52}{}^{II}]=79{,}11\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}9 & -0{,}3 \\ 0 & -0{,}3 & 0.1\end{bmatrix}$

$[K_{eIII}]=\begin{bmatrix}[K_{33}{}^{III}] & [K_{35}{}^{III}] \\ [K_{53}{}^{III}] & [K_{55}{}^{III}]\end{bmatrix}$; avec $[K_{33}{}^{II}]=[K_{55}{}^{III}]=-[K_{35}{}^{III}]=-[K_{53}{}^{III}]=79{,}11\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}9 & 0{,}3 \\ 0 & 0{,}3 & 0.1\end{bmatrix}$

$[K_{eIV}]=\begin{bmatrix}[K_{44}{}^{IV}] & [K_{45}{}^{IV}] \\ [K_{54}{}^{IV}] & [K_{55}{}^{IV}]\end{bmatrix}$;avec $[K_{44}{}^{IV}]=[K_{55}{}^{IV}]=-[K_{45}{}^{IV}]=-[K_{54}{}^{IV}]=69{,}25\begin{bmatrix}0{,}3 & -0{,}46 & 0 \\ -0{,}46 & 0{,}69 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

$$[K] =$$

$$\begin{bmatrix}
100\begin{bmatrix}0,64 & 0,48 & 0\\ 0,48 & 0,36 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} & -100\begin{bmatrix}0,64 & 0,48 & 0\\ 0,48 & 0,36 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\\
\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} & 79,11\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0,9 & -0,3\\ 0 & -0,3 & 0.1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} & -79,11\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0,9 & -0,3\\ 0 & -0,3 & 0.1\end{bmatrix}\\
\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} & 79,11\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0,9 & 0,3\\ 0 & 0,3 & 0.1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} & -79,11\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0,9 & 0,3\\ 0 & 0,3 & 0.1\end{bmatrix}\\
\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} & 69,25\begin{bmatrix}0,3 & -0,46 & 0\\ -0,46 & 0,69 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} & -69,25\begin{bmatrix}0,3 & -0,46 & 0\\ -0,46 & 0,69 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\\
-100\begin{bmatrix}0,64 & 0,48 & 0\\ 0,48 & 0,36 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} & -79,11\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0,9 & -0,3\\ 0 & -0,3 & 0.1\end{bmatrix} & -79,11\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0,9 & 0,3\\ 0 & 0,3 & 0.1\end{bmatrix} & -69,25\begin{bmatrix}0,3 & -0,46 & 0\\ -0,46 & 0,69 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} & 100\begin{bmatrix}0,64 & 0,48 & 0\\ 0,48 & 0,36 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} + 79,11\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0,9 & -0,3\\ 0 & -0,3 & 0.1\end{bmatrix} + 79,11\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0,9 & 0,3\\ 0 & 0,3 & 0.1\end{bmatrix} + 69,25\begin{bmatrix}0,3 & -0,46 & 0\\ -0,46 & 0,69 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}
\end{bmatrix}$$

$$[\boldsymbol{K}] = \begin{bmatrix}
\begin{bmatrix}64 & 48 & 0\\ 48 & 36 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}-64 & -48 & 0\\ -48 & -36 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\\
\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 71,2 & -23,73\\ 0 & -23,73 & 7,91\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -71,2 & 23,73\\ 0 & 23,73 & -7,91\end{bmatrix}\\
\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 71,2 & 23,73\\ 0 & 23,73 & 7,91\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -71,2 & -23,73\\ 0 & -23,73 & -7,91\end{bmatrix}\\
\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}20,78 & -31,86 & 0\\ -31,86 & 47,78 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}-20,78 & 31,86 & 0\\ 31,86 & -47,78 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\\
\begin{bmatrix}-64 & -48 & 0\\ -48 & -36 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -71,2 & 23,73\\ 0 & 23,73 & -7,91\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -71,2 & -23,73\\ 0 & -23,73 & -7,91\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}-20,78 & 31,86 & 0\\ 31,86 & -47,78 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}111,78 & 16,15 & 0\\ 16,15 & 146,54 & 0\\ 0 & 0 & 15,82\end{bmatrix}
\end{bmatrix}$$

<u>5/ Déterminer le déplacement au nœud 5 :</u>

Le système est encastré à la base, c'est-à-dire les nœuds 1n 2, 3 et 4 sont bloqués ; ce qui permet d'éliminer les lignes et colonnes correspondantes :

Nœud 1 : Lignes et colonnes 1, 2 et 3 ; **Nœud 2 :** Lignes et colonnes 4, 5 et 6 ; ; **Nœud 3 :** Lignes et colonnes 7, 8 et 9 ; **Nœud 4 :** Lignes et colonnes 10, 11 et 12 ; Le système à résoudre est donc :

$$\begin{bmatrix}111,78 & 16,15 & 0\\ 16,15 & 146,54 & 0\\ 0 & 0 & 15,82\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}U_{X5}\\ U_{Y5}\\ U_{Z5}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}F_{X5} = 4\ KN\\ F_{Y5} = 0\\ F_{Z5} = 0\end{Bmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{Bmatrix}U_{X5}\\ U_{Y5}\\ U_{Z5}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}3,6\\ -0,4\\ 0\end{Bmatrix} cm}$$