Solution de la Serie de TD N° 4 M.Q 2020

Ex 1 :

1. $[A, BC] = A(BC) - (BC)A = ABC - BCA$
$= ABC - BAC + BAC - BCA$
$= (AB - BA)C + B(AC - CA)$
$= [A,B]C + B[A,C]$

2. $[A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] \overset{?}{=} 0$

$[A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] = A[B,C] - [B,C]A + B[C,A] - [C,A]B + C[A,B] - [A,B]C$

$= A(BC - CB) - (BC - CB)A + B(CA - AC) - (CA - AC)B +$
$+ C(AB - BA) - (AB - BA)C$

$= \cancel{ABC} - \cancel{ACB} - \cancel{BCA} + \cancel{CBA} + \cancel{BCA} - \cancel{BAC} - \cancel{CAB} + \cancel{ACB} +$
$+ \cancel{CAB} - \cancel{CBA} - \cancel{ABC} + \cancel{BAC}$

$= 0$ C.Q.F.D

Ex 2 :

1: $[X, P_x] = 0$ ??

$[X, P_x]\,\varphi(x) = X(P_x\,\varphi(x)) - P_x(X\,\varphi(x))$
$= x(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\varphi(x)) + i\frac{\hbar\partial}{\partial x}(x\,\varphi(x))$
$= \cancel{-x i\hbar \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x}} + i\hbar\varphi(x) + \cancel{x i\hbar \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}}$

$= i\hbar\,\varphi(x) \quad \forall\,\varphi(x)$

Donc $[X, P_x] = i\hbar I \neq 0$ les deux operateurs ne commutent pas.

habituellement on confond l'operateur identité $I$ avec le nbre 1

2 : $[P, X^n] = -i\hbar n X^{n-1} = ?$

- $$[P, X^n]\varphi(x) = P(X^n\varphi(x)) - X^n(P\varphi)$$
$$= -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}(x^n\varphi(x)) - x^n\left(-i\hbar\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}\right)$$
$$\left\{\begin{array}{l} \text{on a : } X\varphi(x) = x\,\varphi(x) \\ \text{et} \quad X^n\varphi(x) = x^n\varphi(x) \end{array}\right\}$$
$$= \cancel{-i\hbar x^n\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}} - i\hbar n x^{n-1}\varphi(x) + \cancel{x^n i\hbar\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}}$$
$$= -i\hbar x^{n-1} n\varphi(x) \qquad \forall\ \varphi(x)$$
$$= -i\hbar n x^{n-1}\varphi(x) = -i\hbar n X^{n-1}\varphi(x)$$

$\Rightarrow [P, X^n] = -i\hbar n X^{n-1}$

- Raisonnement par reccurence : $[X, P^n] = i\hbar n P^{n-1}$ :

pour $n=1$ : on a $[X, P] = i\hbar$ (la relation est verifiée d'après 1)

Admettons que $[X, P^n] = i\hbar n P^{n-1}$

et Démontrons que $[X, P^{n+1}] = i\hbar(n+1)P^n$

d'après la question 1 de l'exercice 1

$$[X, P^{n+1}] = [X, P^n . P]$$
$$= P^n[X, P] + [X, P^n]P$$
$$= P^n(i\hbar) + (i\hbar n P^{n-1})P$$
$$= i\hbar P^n + i\hbar n P^n$$
$$= i\hbar(n+1)P^n$$

donc : $[X, P^{n+1}] = i\hbar(n+1)P^n$

## Solution Ex: 3

1/ $f(t) = ?$ $\quad A = \frac{d}{dt}$ :

Eq aux valeurs propres : $A\, f(t) = \lambda\, f(t)$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} f(t) = \lambda\, f(t) \Rightarrow \frac{d\, f(t)}{f(t)} = \lambda\, dt$$

$$\log f(t) = \lambda t + Cst$$

$$\Rightarrow e^{\log f(t)} = e^{(\lambda t + Cst)} = e^{\lambda t} \cdot e^{Cst}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(t) = C e^{\lambda t}} \quad : C\text{ cst arbitraire.}$$

2/ $f(u) = e^{-\frac{u^2}{2}}$ , $H = \frac{d^2}{du^2} - u^2$

$H(f(u)) = a\, f(u)$ $\quad a = ?$

$$H(f(u)) = \left(\frac{d^2}{du^2} - u^2\right)\left(e^{-\frac{u^2}{2}}\right) = \frac{d^2}{du^2}\left(e^{-\frac{u^2}{2}}\right) - u^2 e^{-\frac{u^2}{2}}$$

$$= \frac{d}{du}\left(\frac{d}{du} e^{-\frac{u^2}{2}}\right) - u^2 e^{-\frac{u^2}{2}}$$

$$= \frac{d}{du}\left(-\frac{2u}{2} e^{-\frac{u^2}{2}}\right) - u^2 e^{-\frac{u^2}{2}}$$

$$= -1 e^{-\frac{u^2}{2}} - \frac{2u}{2}\left(-\frac{2u}{2}\right) e^{-\frac{u^2}{2}} - u^2 e^{-\frac{u^2}{2}}$$

$$= -e^{-\frac{u^2}{2}} + \cancel{u^2 e^{-\frac{u^2}{2}}} - \cancel{u^2 e^{-\frac{u^2}{2}}}$$

$$= -e^{-\frac{u^2}{2}}$$

$$H(f(u)) = -1\,(f(u))$$

donc $f(u)$ et une fonction propre de $H$ associé à la v.p $-1$

## Ex 4 :

$A$ operateur qc.q.

dans la base $\{|u_i\rangle\}$ : $\operatorname{tr} A = \sum_i \langle u_i | A | u_i \rangle$

ds une autre base $\{|t_K\rangle\}$ : $\operatorname{tr} A = \sum_K \langle t_K | A | t_K \rangle$

utilisons la relation de fermeture :

$$tr A = \sum_{k} \langle t_k | A | t_k \rangle = \sum_{ki} \underbrace{\langle t_k | u_i \rangle}_{\text{scalaire}} \underbrace{\langle u_i | A | t_k \rangle}_{\text{scalaire}}$$

$$= \sum_{ki} \langle u_i | A | t_k \rangle \langle t_k | u_i \rangle = \sum_{i} \langle u_i | A \underbrace{\left( \sum_{k} | t_k \rangle \langle t_k | \right)}_{I} | u_i \rangle$$

$$= \sum_{i} \langle u_i | A | u_i \rangle$$

« La trace d'un operateur A est la somme des éléments diagonaux de la matrice qui represente A dans une base qcq »

2 : $Tr(ABC) \overset{?}{=} Tr(BCA)$

$Tr(ABC) = \sum_{i} \langle u_i | ABC | u_i \rangle$ dans la base $\{|u_i\rangle\}$

utilisons la relation de fermeture entre A et B

$$tr(ABC) = \sum_{i} \langle u_i | A \left( \sum_{j} | u_j \rangle \langle u_j | BC \right) | u_i \rangle$$

$$= \sum_{ij} \langle u_i | A | u_j \rangle \langle u_j | BC | u_i \rangle$$

$$= \sum_{ij} \langle u_j | BC | u_i \rangle \langle u_i | A | u_j \rangle$$

$$= \sum_{j} \langle u_j | BC \underbrace{\left( \sum_{i} | u_i \rangle \langle u_i | \right)}_{I} A | u_j \rangle$$

$$= \sum_{j} \langle u_j | BCA | u_j \rangle$$

$Tr(ABC) = tr(BCA)$ C.Q.F.D.

3/ le conjugué hermitique de

$$\underbrace{\lambda \langle \varphi | AB | \psi_1 \rangle \langle \psi_2 | C}_{\text{bra}} \longrightarrow C^+ | \psi_2 \rangle \langle \psi_1 | B^+ A^+ | \varphi \rangle \lambda^*$$

$$\longrightarrow \underbrace{\lambda^* \langle \psi_1 | B^+ A^+ | \varphi \rangle C^+ | \psi_2 \rangle}_{\text{Ket}}$$

Ex 5 :

La base B est normé : $\langle b_1|b_1\rangle = 1$ et $\langle b_2|b_2\rangle = 1$

$\langle b_1|b_1\rangle = \sum_i |c_{1i}|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad \left(\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 + \left|\frac{i}{\sqrt{2}}\right|^2 = 1\right)$

$\langle b_2|b_2\rangle = \sum_i |c_{2i}|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 + \left|\frac{-i}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

donc B est normé !

b/ La representation matricielle de $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle\}$ et $\{|b_1\rangle, |b_2\rangle\}$

$|a_1\rangle \Rightarrow \begin{pmatrix} \langle a_1|a_1\rangle \\ \langle a_2|a_1\rangle \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$|a_2\rangle \longrightarrow \begin{pmatrix} \langle a_1|a_2\rangle \\ \langle a_2|a_2\rangle \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$|b_1\rangle \longrightarrow \begin{pmatrix} \langle a_1|b_1\rangle \\ \langle a_2|b_1\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ , $|b_2\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} \langle a_1|b_2\rangle \\ \langle a_2|b_2\rangle \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

c/ $\langle b_1| \rightarrow (\langle b_1|a_1\rangle, \langle b_1|a_2\rangle) = (\langle a_1|b_1\rangle^*, \langle a_2|b_1\rangle^*)$

$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{i}{\sqrt{2}}\right)$

$\langle b_2| \rightarrow (\langle b_2|a_1\rangle, \langle b_2|a_2\rangle) = (\langle a_1|b_2\rangle^*, \langle a_2|b_2\rangle^*)$

$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$

d : La representation de $|a_1\rangle$ et $|a_2\rangle$ de B

$|a_1\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} \langle b_1|a_1\rangle \\ \langle b_2|a_1\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle a_1|b_1\rangle^* \\ \langle a_1|b_2\rangle^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$|a_2\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} \langle b_1|a_2\rangle \\ \langle b_2|a_2\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle a_2|b_1\rangle^* \\ \langle a_2|b_2\rangle^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

## Exo 6 :

Les matrice A et B tel que :

$A|u_1\rangle = |u_1\rangle$ , $A|u_2\rangle = 0$ , $A|u_3\rangle = |u_3\rangle$

$B|u_1\rangle = |u_3\rangle$ , $B|u_2\rangle = |u_2\rangle$ , $B|u_3\rangle = |u_1\rangle$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{31} & A_{33} \end{pmatrix} \qquad B \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ A_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix}$$

$A_{11} = \langle u_1|A|u_1\rangle = \langle u_1|u_1\rangle = 1$

$A_{12} = \langle u_1|A|u_2\rangle = \langle u_1|.0 = 0$

$A_{13} = \langle u_1|A|u_3\rangle = -\langle u_1|u_3\rangle = 0$

$A_{21} = \langle u_2|A|u_1\rangle = 0$

$A_{22} = \langle u_2|A|u_2\rangle = 0$

$A_{23} = \langle u_2|A|u_3\rangle = 0$

$A_{31} = \langle u_3|A|u_1\rangle = \langle u_3|u_1\rangle = 0$

$A_{32} = \langle u_3|A|u_2\rangle = 0$

$A_{33}\ \langle u_3|A|u_3\rangle = -\langle u_3|u_3\rangle = -1$

$B_{11} = \langle u_1|B|u_1\rangle = \langle u_1|u_3\rangle = 0$

$B_{12} = \langle u_1|B|u_2\rangle = \langle u_1|u_2\rangle = 0$

$B_{13} = \langle u_1|B|u_3\rangle = \langle u_1|u_1\rangle = 1$

$B_{21} = \langle u_2|B|u_1\rangle = \langle u_2|u_3\rangle = 0$

$B_{22} = \langle u_2|B|u_2\rangle = \langle u_2|u_2\rangle = 1$

$B_{23} = \langle u_2|B|u_3\rangle = \langle u_2|u_1\rangle = 0$

$B_{31} = \langle u_3|B|u_1\rangle = \langle u_3|u_3\rangle = 1$

$B_{32} = \langle u_3|B|u_2\rangle = \langle u_3|u_2\rangle = 0$

$B_{33} = \langle u_3|B|u_3\rangle = \langle u_3|u_1\rangle = 0$

$$A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les deux operateurs sont des observables car ils sont dans d'un espace à trois dimension (finie) et on a pour les deux operateurs une symetrie % à la diagonale.

La condition $A_{ij} = A_{ji}^*$ et $B_{ij} = B_{ji}^*$ est verifier

les deux operateurs sont hermitique

Ex 7

$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ $\sigma_y$ est hermitique car les éléments diagonaux, qui son nuls sont réels et il ya une symetrie conjugué % à la diagonale $\equiv$ $\sigma_{y_{ij}} = \sigma_{y_{ji}}^*$

L'equation caracteristique.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -i \\ i & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow (\lambda-1)(\lambda+1) = 0$$

$\Rightarrow$ 2. v.p non dégénerées $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$

Soit $|x_1\rangle \to$ V.P associe à la v.p $\lambda_1 = 1$

$\sigma_y |x_1\rangle = \lambda_1 |x_1\rangle = |x_1\rangle$ : $|x\rangle \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$

ou $\sigma_y$ est l'operateur associe à la matrice $\sigma_y$

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -iv_1 = u_1 \\ iu_1 = v_1 \end{cases}$$ c'est $\hat{m}$ éq

$|x_1\rangle = u_1|1\rangle + i u_1 |2\rangle = |1\rangle + i|2\rangle$ à un coefficient multiplicateur près

on veut que $|x_1\rangle$ soit normé. c.à.d $\langle x_1|x_1\rangle = 1$

$\Rightarrow |u_1|^2 + |iu_1|^2 = 1 \Leftrightarrow 2|u_1|^2 = 1 \Rightarrow u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

d'où $\boxed{|x_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|2\rangle}$

Soit $|x_2\rangle \longrightarrow$ V.P de v.p $\lambda_2 = -1$

donc $\sigma_y |x_2\rangle = -|x_2\rangle$

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_2 \\ -v_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -iv_2 = u_2 \\ iu_2 = -v_2 \end{cases}$$ $\hat{m}$ eq.

on a : $|x_2\rangle = u_2|1\rangle - iu_2|2\rangle$

$\langle x_2|x_2\rangle = 1 \Rightarrow |u_2|^2 + |-iu_2|^2 = 1 \Rightarrow u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

En choisissant $u_2 \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow |x_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|2\rangle$

b/ Calculons les matrices projecteurs sur les états $|x_1\rangle$ et $|x_2\rangle$

$$P_1 = |x_1\rangle\langle x_1| = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \; , \; -\frac{i}{\sqrt{2}} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$P_2 = |x_2\rangle\langle x_2| = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \left( \frac{1}{2} \; , \frac{i}{\sqrt{2}} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ \frac{-i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$\sigma_y$ étant hermitique et les deux v.p de $\sigma_y$ étant distinctes (c.à.d non dégénérées) $|x_1\rangle$ et $|x_2\rangle$ sont orthonormé et constituent une base : vérification de l'orthogonalité.

$$\langle x_1|x_2\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-i}{\sqrt{2}}\right)\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} + \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 0$$

vérification de la relation de fermeture.

$$|x_1\rangle\langle x_1| + |x_2\rangle\langle x_2| = P_1 + P_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-i}{2} \\ \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \text{ matrice identité}$$

on a bien $|x_1\rangle\langle x_1| + |x_2\rangle\langle x_2| = I$ ; relation de fermeture

donc $\{|x_1\rangle, |x_2\rangle\}$ forment bien une base orthonormée.

dans cette base $\sigma_y$ est décrit par une matrice diagonale dans les éléments diagonaux sont les V.P de $\sigma_y$

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exo 6

a/ H et B sont hermitiques car les matrices qui les representent ont leurs éléments diagonaux réels et il y a une symetrie % à la diagonale (matrices réels)

b: H et B commutent

$$BH = b\hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = b\hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$HB = b\hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = b\hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow HB = BH$ donc les deux opérateurs A et B commutent

c/ Les V.P et v.p de H et B

On remarque que

$$\left.\begin{array}{l} H|u_1\rangle = \hbar\omega_0|u_1\rangle \\ B|u_1\rangle = b\,|u_1\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow |u_1\rangle \text{ V.P commun à } H \text{ et } B$$

et on a : $HB|u_1\rangle = BH|u_1\rangle$

d'autre part dans le sous espace $\mathcal{E}^2$ (a deux dimensions) engendré par $|u_2\rangle$ et $|u_3\rangle$, $HB = BH$ car dans ce sous espace H est représenté par une matrice unité 2×2 (à un coefficient multiplicatif près, $(-\hbar\omega_0)$) qui commute avec n'importe quelle matrice 2×2.

H est diagonale dans la base $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\} \rightarrow$ base de H.

$-\hbar\omega_0$ est une v.p 2 fois dégénerée. (V.P sont $|u_2\rangle$ et $|u_3\rangle$)

Soit $\mathcal{E}^2 \rightarrow$ sous espace propre à H relatif à la v.p $-\hbar\omega_0$

dans $\mathcal{E}^2$ la matrice qui represente B : $b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

cherchons les V.P de B ds cet sous espace $\mathcal{E}^2$.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & b \\ b & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - b^2 = 0 \quad \text{soit } \lambda = \pm b$$

Soit $|v_2\rangle \to$ V.P de B associé à la v.p $\lambda_2 = +b$

$$|v_2\rangle = x_2|u_2\rangle + y_2|u_3\rangle$$

on a $b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow b y_2 = b x_2 \Rightarrow x_2 = y_2$

Donc $|v_2\rangle = x_2|u_2\rangle + x_2|u_3\rangle$

$|v_2\rangle$ doit être normé $\Rightarrow |x_2|^2 + |x_2|^2 = 1$ on prend $\boxed{x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}}$

$\Rightarrow |v_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|u_3\rangle$

Soit $|v_3\rangle \to$ V.P de B associé à $\lambda_3 = -b$

$$|v_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u_2\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|u_3\rangle$$

$|v_2\rangle$ et $|v_3\rangle$ sont évidemment aussi V.P de H avec la v.p $-\hbar\omega_0$ (car sont des combinaisons linéaires de $|u_2\rangle$ et $|u_3\rangle$)

donc : $\{|u_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle\}$ : base de V.P communs à H et B.

| V.P | v.p de H | v.p : B |
|---|---|---|
| $\lvert u_1\rangle$ | $\hbar\omega$ | $b$ |
| $\lvert v_2\rangle$ | $-\hbar\omega$ | $b$ |
| $\lvert v_3\rangle$ | $-\hbar\omega$ | $-b$ |

d : donc : $\{H\}$ et $\{B\}$ pris seuls ne forment pas un E.C.O.C car ils ont chacun une valeur propre dégénérée 2 fois.

* $\{H, B\}$ forme un E.C.O.C car chaque couple de v.p $((\hbar\omega, b)$ $(-\hbar\omega, b)$, $(-\hbar\omega, -b))$ il correspond un V.P unique $(|u_1\rangle, |v_2\rangle$ $|v_3\rangle)$ respectivement : $\{|u_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle\}$ base unique de V.P communs à H et B

* $|u_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle$ sont des V.P de la fct d'opérateur $f(H) = H^2$ associé à la v.p $\hbar^2\omega_0^2$

$\{H^2, B\}$ n'est pas un E.C.O.C car au couple de v.p $(\hbar^2\omega_0^2, b)$ il lui correspond 2 V.P linéairement indépendants et qui sont $|u_1\rangle$ et $|v_2\rangle$.