« Série n° 4»

Le Formalisme Mathématique de la Mécanique Quantique

Exercice 1

Soit A, B et C trois opérateurs, démontrer les identités

1/[A,BC]=[A,B]C + B[A,C]

2/[A,[B,C]+[B,[C,A]]+ [C,[A,B]] =0

.Exercice 2

Soient les deux opérateurs *X opérateur position :* tel que $X\varphi(x)=x\varphi(x)$

et P_x *opérateur quantité de mouvement* tel que $P_x\varphi(\mathrm{x}) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\varphi(\mathrm{x})$ et,

1/Ces deux opérateurs commutent-ils ?

2/ Monter que $[P_x,X^n] = -i\hbar nX^{n-1}$ et $[X,P_x^n] = i\hbar nP^{n-1}$ (par récurrence)

Exercice 3

1/Donner l'expression de la fonction propre *f(t)* de l'opérateur différentiel $A=\frac{d}{dt}$ associée à la valeur propre λ.

2/Vérifier que la fonction $f(u) = e^{\frac{-u^2}{2}}$ est fonction propre de l'opérateur $M = \frac{d}{du^2} - u^2$ associée à la valeur propre que l'on déterminera.

Exercice 4

1/Montrer que la trace d'un opérateur A (trA) quelconque est invariante (c.à.d ne dépend pas du choix de la base).

2/ A, B et C étant trois opérateurs linéaires, Montrer que : *Tr(ABC) =Tr(BCA)*

3/ Donner le conjugué hermitique de $\lambda\langle\varphi|AB|\psi_1\rangle\langle\psi_2|C$; avec A, B et C étant des opérateurs et λ un nombre complexe.

Exercice 5

Soit $\{|a_1\rangle,|a_2\rangle\}$ une base orthonormée d'un espace vectoriel à deux dimensions (« base A »). On donne une deuxième base (« base B ») dans cette espace par :

$$|b_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|a_1\rangle + i|a_2\rangle\},\ |b_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|a_1\rangle - i|a_2\rangle\}$$

a-Montrer que la base B est orthonormée.

b-Donner la représentation matricielle de $\{|a_1\rangle,|a_2\rangle\}$ et de $\{|b_1\rangle, |b_2\rangle\}$ dans A

c- Donner la représentation matricielle de $\langle b_1|$ et $\langle b_2|$ dans la base A.

d- Donner la représentation matricielle de $|a_1\rangle$, $|a_2\rangle$ dans la base B.

Exercice 6

On considère un système physique dont l'espace des états, qui est à trois dimensions, est rapporté à la base orthonormé formée par les trois kets, $|u_1\rangle$, $|u_2\rangle$, $|u_3\rangle$. Dans cet espace on considère l'action des opérateurs *A* et *B,* définis de la façon suivante :

$A|u_1\rangle=|u_1\rangle$, $A|u_2\rangle=0$, $A|u_3\rangle=-|u_3\rangle$.

$B|u_1\rangle=|u_3\rangle$, $B|u_2\rangle=|u_2\rangle$, $B|u_3\rangle=|u_1\rangle$,

a-Ecrire les matrices représentants *A, B.*

b-Ces opérateurs sont t'ils des observables.

Exercice 7

Dans un espace vectoriel à deux dimensions, on considère l'opérateur dont la matrice, dans une base orthonormée $\{|1\rangle,|2\rangle\}$, s'écrit ;

$$\sigma_y=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}$$

a-σ_y est-il hermitique ? Calculer ses valeurs propres et ses vecteurs propres (on donnera leur développement normalisé sur la base $\{|1\rangle,|2\rangle\}$.

b-Calculer les matrices représentants les projecteurs sur ces vecteurs propres. Vérifier alors que ceux–ci satisfont à des relations d'orthonormalisation et de fermeture.

c-Ecrire σ_y dans la base formée par ces vecteurs propres.

Exercice 8

On considère un système physique dont l'espace des états, qui est à trois dimensions, est rapporté à la base orthonormé formée par les trois kets, $|u_1\rangle$, $|u_2\rangle$, $|u_3\rangle$. Dans la base de ces trois vecteurs, pris dans cet ordre, les deux opérateurs *A et B* sont définis par les matrices suivantes.

$$H=\hbar\omega_0\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\qquad B=b\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Où ω_0 et *b* sont des constantes réelles.

a-*H et B* sont-ils hermitiques.

b- Montrer que *H et B* commutent.

c-Donner une base de vecteurs propres communs à *H et B.*

d-Parmi les ensembles d'opérateurs, *{H}, {B}, {H,B} et {H^2,B}.* les quels forment un E.C.O.C.