Exercice 1

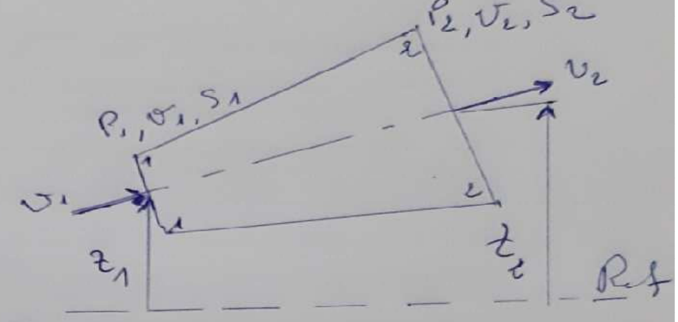
Déterminer les vitesses et la pressions P_2 dans les sections 1-1 et 2-2 dans le cas d'un écoulement d'un liquide dans une conduite divergente.

On donne: débit $Q=0.20\ m^3/s$; $\Delta Z=2\ m$; $P_1=3$ bars ; $\rho=860\ kg/m^3$; $d_1=0.05$; $d_2=0.1$

LMD L2. Physique
Mécanique des Fluides

Corrections exercices

Ex 1 :



Débit $Q = 0,20\ m^3/s$; $\Delta z = z_2 - z_1 = 2\ m$

$P_1 = 3\ bars = 3\ 10^5\ Pa$; $\rho = 860\ kg/m^3$

$d_1 = 0,05\ m$; $d_2 = 0,1\ m$.

$S_1 = \pi R_1^2 = \pi \frac{D_1^2}{4}$; $S_2 = \pi R_2^2 = \pi \frac{D_2^2}{4}$

— 1 —

Pour la résolution de ce type de problèmes deux relations sont largement utilisées.

- Théorème de Bernoulli

$$\boxed{z + \frac{P}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} = ct} \; [m].$$

- Équation de continuité

Fluide compressible : gaz

$$Q_m = \rho v S = ct \quad (\rho \neq ct)$$

Débit massique $[\frac{kg}{s}]$: ~~liquide~~

Fluide incompressible : liquide

$$Q_v = v S = ct \quad (\rho = ct)$$

Débit volumique. $[m^3/s]$

- 2 -

Page : 6 (3 sur 4)

III Appliquons le théorème de Bernoulli entre la section (1-1) et (2-2)

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} = cte$$

$$\frac{P_2 - P_1}{\rho g} + (z_2 - z_1) = \frac{V_1^2 - V_2^2}{2g}$$

$$\frac{P_2 - P_1}{\rho g} + \Delta z = \frac{V_1^2 - V_2^2}{2g} \quad (1)$$

II L'équation de continuité donne :

Liquide $\Rightarrow Q_v = VS = V_1 S_1 = V_2 S_2 \quad (2)$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{Q_v}{S_1} = \frac{Q_v \, 4}{\pi D_1^2} \Rightarrow V_1 = \frac{0{,}2 \cdot 4}{\pi \cdot 0{,}05^2}$$

$$V_2 = \frac{Q_v}{S_2} = \frac{Q_v \, 4}{\pi D_2^2} \Rightarrow V_2 = \frac{0{,}2 \cdot 4}{\pi \cdot 0{,}1^2}$$

$\boxed{V_2 = 25{,}48 \, m/s}$; $\boxed{V_1 = 101{,}9 \, m/s}$

-3-

Page : 6 (4 sur 4)

$$Eq.\ (1) \Rightarrow \frac{P_2 - P_1}{\rho g} + \Delta z = \frac{V_1^2 - V_2^2}{2g}$$

$$\Rightarrow P_2 - P_1 + \rho g \Delta z = \frac{\rho (V_1^2 - V_2^2)}{2g}$$

$$P_2 = \frac{\rho (V_1^2 - V_2^2)}{2g} - \rho g \Delta z + P_1 .$$

A.N :

$$P_2 = \frac{860 (101{,}9^2 - 25{,}48^2)}{2} - 860 . 9{,}81 .$$

$$+ 3\,10^5 .$$

$$P_2 = 4468907\ Pa = 44{,}689\ 10^5\ Pa$$

$$\boxed{P_2 = 44{,}69\ bars}$$

$$\boxed{P_1 = 3\ bars}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} V_1 = 101{,}9\ (m/s) \\ V_2 = 25{,}48\ (m/s) \end{array}}$$

- 4 -

Page : 4 (3 sur 4)

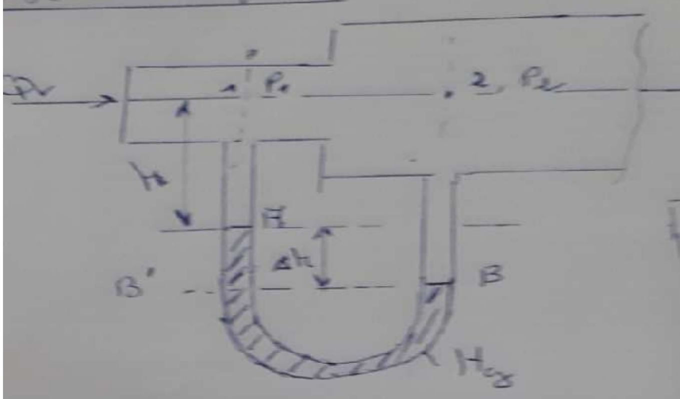
Exercice 2

Calculer les pressions et les vitesses dans les sections 1-1 et 2-2 de la conduite donnée ci-dessous.

On donne: Δh=500 mm; h=1m; P_1=3 bars ; ρ=1000 kg/m^3; ρ_{Hg}=13600 kg/m^3 d_1=5cm ; d_2=10cm

Q=20 l/s est à enlever de l'énoncé de l'exercice 2.

Exercice n°2



$\cancel{Q_v = 8\ \ell/s}$

$\Delta h = 500\ mm$

$h = 1\ cm$

$P_1 = 3\ bars$

$\rho = 1000\ kg/m^3$

$\rho_{Hg} = 13600\ kg/m^3$

$d_1 = 5\ cm$

$d_2 = 10\ cm$

Théo. Bernoulli entre (1-1) et (2-2)

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g}$$

$z_1 = z_2 = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{P_1 - P_2}{\rho g} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g}} \quad (1)$$

Équation de continuité

$$Q_v = v_1 S_1 = v_2 S_2 \Rightarrow \begin{cases} v_1 = \dfrac{Q_v}{S_1} \\ v_2 = \dfrac{Q_v}{S_2} \end{cases} \quad (2)$$

-5-

Eq. (1) et (2) $\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{P_1 - P_2}{\rho g} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} = \frac{Q^2\left[\frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2}\right]}{2g}} \quad (3)$$

$P_1 = 3$ bars ; l'eq (3) comporte 2 inconnues P_2 et Q : $\Rightarrow$ Il faut donc une autre équation !!!

$\Rightarrow$ Le tube en U va nous permettre de résoudre le problème.

Nous allons utiliser la loi fondamentale de la statique qui règne dans ce tube d'où la pression au point A :

$$\boxed{P_A = P_1 + \rho g h}$$

Pression au pt B :

$$\boxed{P_B = P_2 + \rho g (h + \Delta h)}$$

\- 6 -

La pression au pt B est :

$$P_B = P_2 + \rho g (h + \Delta h).$$

→ La loi des équipotentielles qui stipule que les plans horizontaux ont la même pression.

$$\Rightarrow \boxed{P_B = P_{B'}}.$$

Donc

$$P_{B'} = P_A + \rho_{Hg} g \Delta h = P_1 + \rho g h + \rho_{Hg} g \Delta h$$

$$P_{B'} = P_B = P_2 + \rho g (h + \Delta h)$$

$$\Rightarrow P_1 + \cancel{\rho g h} + \rho_{Hg} g \Delta h = P_2 + \cancel{\rho g h} + \rho g \Delta h$$

$$\Rightarrow P_1 - P_2 = g \Delta h (-\rho_{Hg} + \rho)$$

$$\frac{P_1 - P_2}{\rho g} = \Delta h \left(-\frac{\rho_{Hg}}{\rho} + 1\right)$$

(1) $$\boxed{\frac{P_1 - P_2}{\rho g} = \Delta h \left(1 - \frac{\rho_{Hg}}{\rho}\right)}$$

-7-

Les équation ③ et ④ donnent

$$\frac{Q^2}{2g}\left[\frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2}\right] = \Delta h \left(1 - \frac{\rho_{Hg}}{\rho}\right)$$

$$\Rightarrow Q^2 = 2g\Delta h \frac{\left(1 - \frac{\rho_{Hg}}{\rho}\right)}{\left(\frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2}\right)}$$

A.N

$$Q^2 = \frac{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}5\left(1 - \frac{13600}{1000}\right)}{\frac{1}{\left[\frac{\pi \cdot 0{,}1^2}{4}\right]^2} - \frac{1}{\left[\frac{\pi \cdot 0{,}05^2}{4}\right]^2}}$$

$$Q^2 = 5{,}07\ 10^{-4}$$

$$\Longrightarrow \boxed{Q = 0{,}0225\ m^3/s}$$

— 8 —

Vitesses v_1 et v_2.

$$Q = v_1 S_1 = v_2 S_2$$

$$v_1 = \frac{Q}{S_1} = \frac{0,0225 \cdot 4}{\pi \cdot 0,05^2} = 11,46\ m/s$$

$$v_2 = \frac{Q}{S_2} = \frac{0,0225 \cdot 4}{\pi \cdot 0,1^2} = 2,86\ m/s$$

$$\boxed{v_1 = 11,46\ m/s\ ;\ v_2 = 2,86\ m/s}$$

Pression P_2 ($P_1 = 3\ bar = 3 \cdot 10^5\ Pa$)

Eq (1) $\Rightarrow \dfrac{P_1 - P_2}{\rho g} = \dfrac{v_2^2 - v_1^2}{2g}$.

$$P_1 - P_2 = \frac{\rho (v_2^2 - v_1^2)}{2} = \frac{1000}{2}(2,86^2 - 11,46^2)$$

$$P_2 = 3 \cdot 10^5 + 61576 = 3,615 \cdot 10^5\ Pa.$$

Vérification $\boxed{P_2 = 3,615\ bar}$

Eq (4) $\dfrac{P_1 - P_2}{\rho g} = \Delta h \left(1 - \dfrac{\rho_{Hg}}{\rho}\right) = 0,5\left(1 - \dfrac{1360}{10}\right.$

$$\Rightarrow P_2 = 3 \cdot 10^5 + 61803 = 3,618\ bar$$

- 8 -

Pr Berrayah Abdelkader