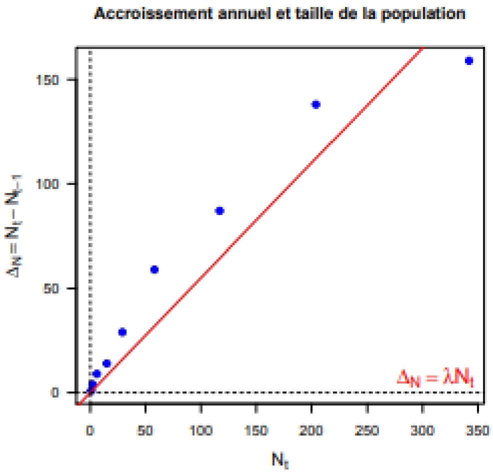
Equations différentielles ordinaires

Introduction :

Prenons l'exemple suivant sur la dynamique de la population de tourterelles turques en Angleterre

Année	Nb Lieux
1955	1
1956	2
1957	6
1958	15
1959	29
1960	58
1961	117
1962	204
1963	342
1964	501



On constate que la variation du nombre de lieux d'observation est proportionnelle au nombre de lieux d'observation et au temps écoulé

$$\Delta N = \lambda N_t \Delta t \qquad (1)$$

- Les lieux d'observation sont indépendants
- Chaque lieu engendre en moyenne λ nouveaux lieux d'observation durant l'intervalle de temps Δt

L'équation (1) nous donne :

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \lambda N_t$$

$\frac{\Delta N}{\Delta t}$ est le taux d'accroissement de N(t) relativement à t, lorsque $\Delta t \to 0$, on obtient :

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N_t \quad \Leftrightarrow N'(t) = \lambda N(t) \qquad (2)$$

(2) est une équation différentielle ordinaire dont la solution est :

$N(t) = N_0 e^{\lambda t}$ on vérifie aisément que $N'(t) = \lambda N_0 e^{\lambda t}$

Dans ce qui va suivre on verra la résolution de ce type d'équation différentielle

1.Définition :

Soit x une fonction à variable t et n fois dérivable.On appelle équation différentielle ordinaire (EDO) d'ordre n toute relation qui lie la fonction inconnue x(t) à ses dérivées soit : $F(t,x,x',x'',....,x^{(n)})=0$

- La notion d'équation différentielle apparait à la fin du 19 ème siècle
- Le calcul différentiel et intégral est introduit par Newton et Leibnitz en 1686
- Les premières applications sont en mécanique et en géométrie
- Au 20ème siècle apparaissent les applications en biologie

Exemples :

1/ $x'+t^2x/2= e^t$ est une EDOd'ordre 1

2/ $x^{(6)} = 0$ est une EDO d'ordre 6

2.Equation différentielle à variables séparables

c'est une EDO du premier ordre facile à résoudre (intégrer), elle est de la forme :

$$f(x)x' = g(t)$$

Où f et g sont des fonctions données et x est la fonction inconnue

Pour résoudre cette EDO, il suffit d'écrire :

$$x'(t) = \frac{dx}{dt} \qquad (3)$$

L'équation (3) s'écrit alors :

$$f(x)dx = g(t)\,dt$$

Soit : $$\int f(x)dx = \int g(t)dt \ + c$$

Où c est une constante d'intégration

Exemple 1 : Modèle de Malthus ou exponentiel(1792)

On considère l'équation : $x'(t) =\lambda x(t)$ (4)

Soit : $$\frac{dx}{x} =\lambda\, dt$$

D'où par intégration : $\mathrm{Ln}|x|=\lambda t+c$

Soit : $$x(t) = e^{\lambda t+c} =Ke^{\lambda t} \qquad K\in R_+$$

On peut appliquer ce modèle à l'exemple de la dynamique de population des tourterelles avec l'EDO d'ordre 1 : $N'(t) = \lambda N(t)$ (2)

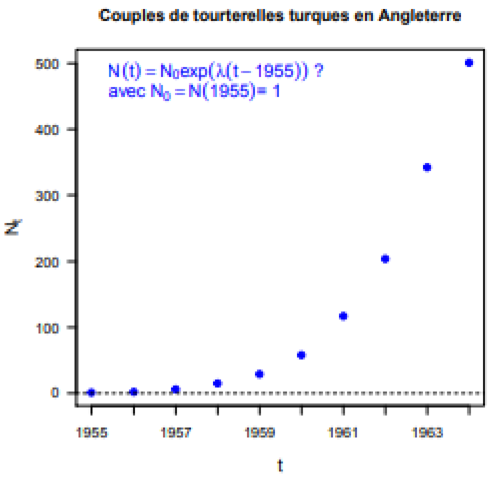
- Résoudre (intégrer) : trouver toutes les solutions de l'équation différentielle (2) :
  (2) $\rightarrow N(t)=Ke^{\lambda t}$ avec $K\in R_+$

- Condition initiale : N(1955) = 1
- Solution particulière : la solution qui satisfait la condition initiale :

$$N(t) = e^{\lambda(t-1955)}$$

- La courbe intégrale : la représentation graphique d'une solutionexemple

Année	Nb Lieux
1955	1
1956	2
1957	6
1958	15
1959	29
1960	58
1961	117
1962	204
1963	342
1964	501



Remarques :

1/ Le paramètre λ est appelé :

- Paramètre Malthusien
- Taux d'accroissement de la population
- Taux intrinsèque d'accroissement
- Taux instantané de l'accroissement naturel

2/ Suivant le signe de λ , on distingue 3 cas :

a) Si $\lambda > 0$ alors la population s'accroit exponentiellement
b) Si $\lambda < 0$ alors la population décroit exponentiellement
c) Si $\lambda = 0$ alors la population reste constante (égale à la population initiale N_0)

Exemple2 : modèle logistique ou modèle de Verhulst (1844)

$$\frac{dP}{dt} = \lambda P - \mu P^2 = \mu P(\frac{\lambda}{\mu} - P)$$

$$\frac{dP}{dt} = \mu P(\frac{\lambda}{\mu} - P) \Leftrightarrow \frac{dP}{P(\frac{\lambda}{\mu} - P)} = \mu\, dt$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dP}{P(\frac{\lambda}{\mu} - P)} = \mu \int dt \qquad (3)$$

Pour intégrer le terme de gauche, on a recours à une décomposition en éléments simples

$\frac{1}{P(\frac{\lambda}{\mu}-P)} = \frac{a}{P} + \frac{b}{\frac{\lambda}{\mu}-P} \Leftrightarrow a\,(\frac{\lambda}{\mu} - P) + bP = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{\mu}{\lambda} \\ b = \frac{\mu}{\lambda} \end{cases}$$

L 'équation (3) deviant alors:

(3) $\Leftrightarrow \frac{\mu}{\lambda}(\int \frac{dP}{P} + \int \frac{dP}{\frac{\lambda}{\mu}-P}) = \mu \int dt$

$\Leftrightarrow (\int \frac{dP}{P} + \int \frac{dP}{\frac{\lambda}{\mu}-P}) = \lambda \int dt$

$\Leftrightarrow \text{Ln } P - \text{Ln } (\frac{\lambda}{\mu} - P) = \lambda\, t + C$

$\Leftrightarrow \text{Ln } (\frac{P}{\frac{\lambda}{\mu}-P}) = \lambda\, t + C$

$\Leftrightarrow \frac{P}{\frac{\lambda}{\mu}-P} = Ke^{\lambda t}$ avec $K \in \mathbf{R}_+$

Soit : $\frac{P}{\frac{\lambda}{\mu}-P} = Ke^{\lambda t} \Leftrightarrow P = (\frac{\lambda}{\mu} - P)\, Ke^{\lambda t}$

$\Leftrightarrow P\,(1 + Ke^{\lambda t}) = \frac{\lambda K e^{\lambda t}}{\mu}$

$\Leftrightarrow P(t) = \frac{\lambda K e^{\lambda t}}{\mu(1+Ke^{\lambda t})}$

$\Leftrightarrow P(t) = \frac{\frac{\lambda}{\mu}K}{K+e^{-\lambda t}}$ avec $K \in \mathbf{R}_+$

Au temps t=0 on pose P(0) = P_0 on utilise la condition initiale pour calculer la valeur de la constante K.

3. Equations différentielles ordinaires linéaires :

Une équation différentielle d'ordre 1 linéaire est du type :

$$y' + f(x)\, y = g(x) \qquad (4)$$

où :

- f et g sont des fonctions quelconques de x
- si pour tout x , g (x) =0 alors l'équation est dite « sans second membre » SSM

3.1 EDO1 linéaire sans second membre

$$y' + f(x)\, y = 0 \iff \frac{dy}{dx} = -f(x)y$$

$$\iff \frac{dy}{dx} = -\, f(x)dx$$

$$\iff \int \frac{dy}{y} = -\int f(x)dx$$

$$\iff \text{Ln}\, |y\,| = -F(x) + C$$

$$\iff y(x) = K\; e^{-F(x)}$$

Où : K est une constante réelle quelconque

F est une primitive de f

Exemple :

Soit l'équation linéaire avec second membre :

$$y' - \frac{y}{x} = x^2 \qquad (5)$$

Considérons l'équation sans second membre associée à (5):

$$y' - \frac{y}{x} = 0 \qquad (6)$$

Cette équation est une EDO à variables séparables :

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x}$$

$$\iff \int \frac{y'}{y} dy = \int -\frac{1}{x} dx$$

$$\iff \text{Ln}(y) = -\text{Ln}\, |x| + C$$

Les solutions de l'équation (6) sont du type :

$$Y_{ssm}(x) = K\, e^{Ln|x|} = K\, x \quad \text{avec} \quad K \in \mathbb{R}$$

3.2 EDO1 linéaire avec second membre :

- On cherche d'abord les solutions y_{ssm} de l'équation sans second membre

$$y' + f(x)\, y = 0$$

Elles sont du type : y_{ssm} = K $e^{-F(x)}$, avec K ∈ ℝ

- On cherche ensuite les solutions générales de l'équation avec second membre :
  - Recherche d'une solution particulière y_{part}, les solutions générales sont alors du type :

    $y(x) = y_{ssm}(x) + y_{part}(x)$

  - Ou méthode de la variation de la constante, on cherche les solutions du type :

    $y(x) = K(x)\ e^{-F(x)}$ où K est une fonction de x

<u>Principe de la méthode de la solution particulière :</u>

On cherche à trouver une solution particulière de l'EASM (4),pour cela tout va dépendre de la forme du second membre de l'équation (5) g(x)et on va utiliser la méthode d'identification avec le second membre g(x)

Forme de g(x)	Forme de y_{part}
$g(x)=P_n(x)=Mx^n+Nx^{n-1}+\ldots$	$y_{part}=Q(x)= Ax^n+Bx^{n-1}+\ldots$
$g(x)=P_n(x)e^{Dx}$	$y_{part}=Q(x)\ e^{Dx}$ sauf si $y_{ssm}=R(x)\ e^{Dx}$ alors $y_{part}=xQ(x)\ e^{Dx}$
g(x)=M sin(D x)+N cos(D x)	y_{part}= A cos(D x)+B sin (D x)

Où $P_n(x)$ et $Q_n(x)$ sont des polynomes de degré n et les coefficients de $Q_n(x)$ sont à déterminer par la méthode d'identification des polynomes en remplaçant y_{part} par son expression dans l'équation (4) vu que y_{part} est une solution particulière de (4)

<u>Remarques</u>

La méthode d'identification n'est applicable que si :

- Les coefficients sont constants

- Le second membre est identifiable sous la forme d'une fonction polynomiale ou exponentielle ou sinus/cosinus

Exemple :

Résoudre l'équation : $y'+y = x^2$ (7)

- Les coefficients sont constants égaux à 1 donc on peut appliquer la méthode de la solution particulière mais avant ,on va d'abord résoudre l'ESSM :

$$y'+y = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -dx$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int dx$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{Ln}|y| = -x + K$$

$$\Leftrightarrow y = \pm e^{K} e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow y_{ssm} = C\, e^{-x} \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

- Recherche d'une solution particulière de l'EASM :
  Le second membre est un polynome de degrè 2, y_{part} est aussi un polynome de degré 2, on pose :

  $Y_{part} = Ax^2+Bx+D \Longrightarrow y' = 2Ax+B$

  On remplace dans l'EDO (7), on a :

  $$(2Ax+B)+(Ax^2+Bx+D) = x^2 \Leftrightarrow Ax^2+(2A+B)x+(B+D)= x^2$$

  Par identification de polynomes:

$$\begin{cases} A = 1 \\ 2A + B = 0 \\ B + D = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -2 \\ D = 2 \end{cases}$$

D'où : $y_{part} = x^2-2x+2$ est une solution particulière de l'EDO (7)

La solution générale de l'EDO (7) est :

$$Y = y_{ssm}+ y_{part} = C\, e^{-x} + x^2-2x+2 \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

Principe de la méthode de la variation de la constante :

- On cherche à résoudre : $y' + f(x)\, y = g(x)$
- $y(x) = K\, e^{-F(x)}$ est solution de l'équation SSM
- les solutions de l'équation ASM seront du type :

$$y(x) = K(x)\, e^{-F(x)}$$

$$y(x) = K(x)\, e^{-F(x)} \Leftrightarrow y' = K'(x)\, e^{-F(x)} + K(x)(-F'(x))\, e^{-F(x)}$$

$$\Leftrightarrow y' = K'(x)\, e^{-F(x)} - K(x) f(x)\, e^{-F(x)}$$

$$\Leftrightarrow y' = K'(x)\, e^{-F(x)} - f(x)\, y$$

$$\Leftrightarrow y' + f(x)\, y = K'(x)\, e^{-F(x)}$$

y est solution de ASM $\Leftrightarrow K'(x)\, e^{-F(x)} = g(x)$

$$\Leftrightarrow K(x) = \int g(x) e^{F(x)}\, dx$$

Exemple :

On va revenir à l'exemple précédent l'EDO(7) mais on utilise la méthode de la variation de la constante, on connait déjà la solution de l'ESSM associée à (7) :

$$y_{ssm} = C\, e^{-x}$$

D'où : la solution générale de l'EDO(7) est de la forme :

$$y = C(x)\, e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow y' = C'(x)\, e^{-x} - C(x)\, e^{-x}$$

On remplace y et y' dans l'EDO(7) et on obtient :

$$C'(x) = x^2 e^{x}$$

Pour trouver C(x) on va intégrer deux fois par parties :

$$\begin{cases} u = x^2 \rightarrow du = 2x \\ v = e^x \rightarrow dv = e^x \end{cases}$$

$$C(x) = x^2 e^{x} - 2\int x e^{x}\, dx$$

$$\begin{cases} w = x \rightarrow dw = dx \\ v = e^x \rightarrow dv = e^x \end{cases}$$

C(x) = e^x(x^2-2x+2)+ K

D'où la solution générale de l'EDO(7) est :

Y = $(e^x$(x^2-2x+2)+ K) e^{-x}

On retrouve y sous la forme :

Y = y_{ssm}+y_{part} = x^2 - 2x+ 2 +Ke^{-x}