Pôle Universitaire Léonard de Vinci — Année 2001-2002
CS 301 – Optimisation — Semestre 5

Feuille d'exercices 2

Optimisation avec contraintes d'égalité

Exercice I

Utiliser les multiplicateurs de Lagrange pour trouver les extrema potentiels des fonctions de deux variables suivantes sous la contrainte indiquée. Dites lorsque l'on peut garantir qu'il s'agit d'un extremum.

1. $f(x, y) = x^2 - y^2$ avec $x^2 + y^2 = 1$

2. $f(x, y) = 4x + 6y$ avec $x^2 + y^2 = 13$

3. $f(x, y) = x^2 y$ avec $x^2 + 2y^2 = 6$

4. $f(x, y) = x^2 + y^2$ avec $x^4 + y^4 = 1$

Exercice II

Utiliser les multiplicateurs de Lagrange pour trouver les extrema potentiels des fonctions f suivantes sous la contrainte indiquée. Dites lorsque l'on peut garantir qu'il s'agit d'un extremum.

1. $f(x, y, z) = 2x + 6y + 10z$ avec $x^2 + y^2 + z^2 = 35$

2. $f(x, y, z) = 8x - 4z$ avec $x^2 + 10y^2 + z^2 = 5$

3. $f(x, y, z, t) = x + y + z + t$ avec $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$

4. $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i$ avec $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$

5. $f(x, y, z) = x + 2y$ avec $x + y + z = 1$ et $y^2 + z^2 = 4$

6. $f(x, y, z) = yz + xy$ avec $xy = 1$ et $y^2 + z^2 = 1$

Exercice III (CS, GI)

Refaire les exercices VII et VIII de la feuille d'exercices 1, en utilisant les multiplicateurs de Lagrange. Expliciter ces multiplicateurs dans chaque cas et interpréter.

Exercice IV (CS, GI)

Le plan d'équation $x + y + 2x = 2$ intersecte le paraboloid d'équation $z = x^2 + y^2$ en une ellipse. Trouver les points de l'ellipse qui sont le plus proche et le plus éloigné de l'origine.

Exercice V (MIF)

Une entreprise utilise deux facteurs de production (du travail et du capital) pour produire une certaine quantité de biens. Si f est la fonction de production, K (L) le nombre d'unités de facteur capital (travail), alors $Q = f(K, L)$, ou Q est la quantité de biens produite. On note w_L et w_K le prix unitaire du facteur travail et capital (respectivement) que l'entreprise considère comme des données exogènes. Soit $Q = f(K, L) = K^{\alpha} L^{\beta}$, ou α et β sont deux paramètres.

1. A quelle condition cette fonction est elle homogène de degré 1 ?

2. Que signifie économiquement l'homogénéité de degré 1 ?

3. Représentez graphiquement une courbe de niveau de f dont l'équation est de la forme $K = g(L)$

4. Fixons une courbe de niveau a $Q = 10$. Calculez K pour $L = 10$ et pour $L = 11$. Interpreter économiquement le rapport $\frac{\Delta g}{\Delta L}$. D'une facon générale, comment peut on interepreter la pente d'une courbe de niveau en un point donné (L, K) ?

5. Soit $CT(K, L)$ la fonction de coût total. Représentez, sur le graphique précedent, une courbe d'iso-coût.

6. Ecrivez le programme d'optimisation lorsque la firme est contrainte de produire une quantité Q de biens.

7. Resolvez graphiquement ce problème d'optimisation.

8. Comment varie la quantité optimale de travail lorsque le prix du travail augmente. (Même question lorsque le prix du capital augmente)

9. Déterminez, en utilisant la méthode du Lagrangien, la quantité optimale K^* et L^* des facteurs de production capital et travail respectivement.

10. Comment varie la quantité K^* lorsque w_L augmente. Même question lorsque w_K augmente. Ces résultats étaient ils attendus ?

Exercice VI (MIF)

Une entreprise dispose de k unités de travail qu'elle doit utiliser pour produire du bien 1 ou du bien 2. Pour produire x_i unités du bien i, il est nécéssaire d'utiliser x_i^2 unités de travail. La quantité de bien i produite est vendu au prix p_i sur le marché.

1. Sachant que le coût du travail est nul, déterminer la fonction de profit, fonction objectif de l'entreprise.

2. Déterminez l'équation de la contrainte ?

3. Représentez (concernant la contrainte) une courbe de niveau. (On mettra x_2 en ordonnée)

4. Représentez sur le même graphique, une courbe d'iso profit.

5. Resolvez graphiquement ce problème d'optimisation.

6. Déterminez, en utilisant la méthode du Lagrangien, les quantités optimales x_i^*.

7. Calculez la valeur du multiplicateur de Lagrange.