**دروس في الاحصاء (تابع) الأستاذ: بوزيان محمد**

**توزيع بينوميال(la loi binomial)**

متغير عشوائي يتبع قانون بينوميال يمكن أن يأخذ عدد محدود من القيم n، و يتحقق عند توفر ثلاث شروط:

1- النتائج الممكنة من التجربة تكون النجاح (التحقق) أو الفشل (عدم التحقق)

2- الإحتمال p في حالة النجاح هو نفسه في كل عملية تكرار للتجربة، و نفس الشيء مع الفشل المعبر عنه q/ q=1-p

3- نتيجة التجربة ليس لها تأثير على نتائج التجارب في المستقبل، فالتجارب إذن مستقلة

نقوم بتجربة عشوائية، يمكن أن يعطي نتيجتين مختلفتين، إما أن تنجح التجربة و يكون لها احتمال p أن تتحقق، و إما أن تفشل التجربة فيكون لها احتمال q، حيث: q= 1-p

المتغير العشوائي X يساوي عدد النجاحات المتحصل عليها و يتبع قانون بارلوني Bernoulli

و الذي يرمز له بالرمز B(1.p) و يتحدد بالشكل:

P :{0,1}→[0,1]

P(X = 0) = 1−p et P(X = 1) = p

si X ∼B(1,p) alors

 E(X) = pالأمل الرياضي

 V (X) = p.qالتباين / الإنحراف المعياري

نقوم بتكرار تجربة عشوائية n مرة بشكل متتالي و مستقل، و التي تفترض وجود نتيجتين:

النجاح: فتتحقق النتائج التي نريد تحديد احتمال وقوعها، و التي لها احتمال p أن تتحقق

الفشل: الذي له احتمال- p q=1 أن يتحقق

المتغير العشوائي X يساوي عدد مرات النجاح التي تم الحصول عليها خلال n عملية و التي تتبع قانون بينوميال binomialالذي يرمز له بالرمز B(n,p) حيث:

P :{0,1,...,n}→[0,1]p+q = 1

r→ P(X = r) = nCrpr(1−p)n−r, nCr = n! /r!(n−r!(

و يعني القانون احتمال الحصول على kحالات نجاح في n محاولة

يمكن تطبيق القانون في العديد من الحالات:

- رمي قطعة نقود، يمكن أن يظهر الرقم T أو الصورة H

- عند تقديم لقاح لمريض، نجاح المصل أو عدم نجاحه

- سبر آراء حول المشاركة في الانتخابات، إما يشارك أو يعزف عن ذلك

X ∼B(n,p) في حالة أن المتغير يتبع قانون نورمال فإن:

E(X) = np

 V (X) = npq

مثال: نقدف زهرة نرد و نعتبر الحدث A ظهور العدد 5، و بالتالي فإن كل النتائج التي تختلف عن 5 تعتبر خاطئةB فنجد:

= 1/6 =pP(A)

و بالتالي يمكن أن نستنتج، p(B) = 1- p(A) = 5/6 = q

**التمرين الأول:**

في ورشة عمل تشمل 12 آلة تعمل بشكل مستقل عن بعضها البعض، احتمال أن تسقط آلة في حالة عطل هو 7 %

- ما هو احتمال أن تسقط نصف آلات الورشة في حالة عطب ؟

- ما هو احتمال أن تسقط 5 آلات في حالة عطب ؟

ما هو احتمال أن تسقط 10 آلات في حالة عطب ؟

ما هو احتمال أن تسقط 2 آلات في حالة عطب ؟

**الحل:**

n = 12 p = 0.7 q = 1-0.7 = 0.3

nCr. pr. (1−p)n−r

P(X = 12) = 12C12 .0.712 . 0.312−12

P(X = 12) = 1 . 0.01 . 1 = 0.01

1- احتمال أن تسقط نصف آلات الورشة في حالة عطب/ x = 6

nCr . pr.(1−p)n−r

P(X = 6) = 12C6 .0.76 . 0.312−6

P(X = 6) = 924 . 0.11 . 0.0007

= 0.0711

2- احتمال أن تسقط 5 آلات في حالة عطب/ يعني x = 5

P(X = 5) = 12C5 .0.75 . 0.312−5

P(X = 5) = 792 . 0.168 . 0.00021

= 0.027

3 - احتمال أن تسقط 10 آلات في حالة عطب/ x = 10

P(X = 10) = 12C10 .0.710 . 0.312−10

P(X = 10) = 66 . 0.028 . 0.09

= 0.16

4 - احتمال أن تسقط 2 آلات في حالة عطب/ x = 2

P(X = 2) = 12C2 .0.72 . 0.312−2

P(X = 2) = 66 . 0.49 . 0.000005

= 0.00016

**التمرين الثاني:**

وكالة بيع منتوجات إلكترو-منزلية، باعت 10 ثلاجات لزبائن عاديين، و تمضي خلال كل عملية شراء دفتر ضمان لخمس سنوات، أن احتمال عدم وقوع الثلاجة في عطب خلال الخمس سنوات الأولى هو 87%.

- ما هو التوزيع الاحتمالي المناسب ؟

- أحسب الأمل الرياضي و التباين و الانحراف المعياري ؟

- ما هو احتمال أن لا تقع 8 ثلاجات في حالة عطب ؟

- ما هو احتمال أن لا تقع 8 ثلاجات على الأقل في حالة عطب ؟

**الحل:**

n = 10 p = 0.87 q = 1 – 0.87 = 0.13

1- ما هو التوزيع الاحتمالي المناسب

يعني الثلاجات التي لا يقع لها عطب

X ~ B (10 . 0.87), p (x=xi) = nCr . pr.(1−p)n−r

P(X = 10) = 10C10 .0.8710 . 0.1310−10

P(X = 10) = 1 . 0.24 . 0.13

= 0.24

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| xi | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| X=xi |  |  |  |  |  |  |  |  | 0.14 | 0.36 | 0.31 |

2- حساب الأمل الرياضي و التباين و الانحراف المعياري

X ∼B(n,p) في حالة أن المتغير يتبع قانون نورمال فإن:

E(X) = npالأمل (التوقع) الرياضي

E(X) = 10 . 0.87 = 8.7

 V (X) = npq التباين

V (X) = 10 . 0.87 . 0.13 = 1.13

$δ= \sqrt{v(x)}$الانحراف المعياري

$δ= \sqrt{npq}$ = $\sqrt{1.13}$ = 0.36

3- احتمال أن لا تقع 8 ثلاجات في حالة عطب / x = 8

p (x=xi) = nCr . pr.qn−r

P(X = 8) = 10C8 .0.878 . 0.1310−8

P(X = 8) = 45 . 0.32 . 0.01

= 0.14

4- احتمال أن لا تقع 8 ثلاجات على الأقل في حالة عطب p (x >8)

p (x >8) = P(X = 8) +P(X = 9)+ P(X = 10)

= 10C8 .0.878 . 0.1310−8 +10C9 .0.879 . 0.1310−9 +10C10 .0.8710 . 0.1310−10

p (x >8) = 0.14 + 0.36 + 0.31

= 0.53

**توزيع بواسون La loi de Poisson**

قانون بواسون (Siméon Denis Poisson 1837) هو قانون يحدد الأحداث الملاحظة خلال فترة محددة من الزمن، في حالة أن هذه الأحداث مستقلة و ضعيفة احتماليا

عندما نريد وصف حدث له حظ قليل في التحقق، مثل عدد مرات الظهور المرتبطة بحدث خلال لحظة من الزمن، أو في إقليم محدد مثل:

- عدد حوادث المرور خلال الأسبوع الأخير من رمضان في الطريق السيار

- عدد الاتصالات التي تتلقاها الحماية المدنية خلال يوم عاصف شتاءا، أو حار صيفا.

- عدد الوفيات خلال سنة في قرية جبلية شبه معزولة

احتمال ملاحظة بشكل دقيق r مرة حدوث لحدث في وحدة من الزمن أو إقليم

إذا كان المتغير العشوائي x يمثل عدد مرات الظهور المستقل لحدث ضعيف الاحتمال في مجتمع غير محصور، فإن احتمال أن يكون لنا r ظهور للحدث

$$P(X)=\frac{e^{-λ}.λ^{X}}{X!}$$

$e=2.71$ **= (1 + 1/n )n**ثابت

هي معلمة (Paramètre)λ

 = λالمتوسط

E(X) =λالأمل الرياضي

V (X) =λالتباين

$δ= \sqrt{v(x)}$= $\sqrt{λ}$الانحراف المعياري

**التمرين الاول:**

مصنع لإنتاج الهواتف النقالة، متوسط حالات العطب عند خروج المنتج هي 6 حالات في كل يوم

- احسب الاحتمالات التالية لعدد حالات العطب خلال يوم

1/ عدم ظهور أي حالة عطب

2/ ظهور حالتي عطب

3/ ظهور ثلاث حالات على الأكثر

4/ ظهور أربع حالات علىالأقل

**الحل:**

نلاحظ أن **λ= 6**$e=2.71$

$$P(X)=\frac{e^{-λ}.λ^{X}}{X!}$$

$P(X=xi)=\frac{e^{-6}.6^{X}}{X!}$**التوزيع الاحتمالي**

1/ عدم ظهور أي حالة عطب

$$P(X=0)=\frac{e^{-6}.6^{0}}{0!}$$

$$P\left(X=0\right)=\frac{2.71^{-6}.6^{0}}{0!}$$

= 0.0025

2/ ظهور حالتي عطب

$$P(X=2)=\frac{e^{-6}.6^{2}}{2!}$$

= 0.18

3/ ظهور ثلاث حالات على الأكثر

P(x<3) = P(x=3) + P(x=2) + P(x=1) + P(x=0)

= $\frac{e^{-6}.6^{3}}{3!}$ + $\frac{e^{-6}.6^{2}}{2!}$+ $\frac{e^{-6}.6^{1}}{1!}$ + $\frac{e^{-6}.6^{0}}{0!}$

= 0.09 + 0.18 + 0.015 +0.0025

= 0.28

4/ ظهور أربع حالات على الأقل

P(x>4) = P(x=4) + P(x=5) + P(x=6)

= $\frac{e^{-6}.6^{4}}{4!}$ + $\frac{e^{-6}.6^{5}}{5!}$+ $\frac{e^{-6}.6^{6}}{6!}$

= 0.13 + 0.16 + 0.16

= 0.45

**التمرين الثاني:**

في قراءة مذكرة تخرج وجد المشرف أن فيها أخطاء بمعدل 4 في كل صفحة، مهما كان نوع الخطأ

ما هو احتمال أن يجد المشرف

1/ 7 أخطاء 2/ 3 أخطاء 3/ خطأين على الأكثر 4/ خطأين على الأقل

5/ عدد من الأخطاء يتراوح بين 2 و 5

**الحل:**

**λ= 4**$e=2.71$

$$P(X)=\frac{e^{-λ}.λ^{X}}{X!}$$

1. احتمال أن يجد المشرف 7 أخطاء

P(x=7) = $\frac{e^{-4}.4^{7}}{7!}$

= 0.058

2. احتمال أن يجد المشرف 3 أخطاء

P(x=3) = $\frac{e^{-4}.4^{3}}{3!}$

= 0.19

3. احتمال أن يجد المشرفخطأين على الأكثر

P(x<2) = P(x=2) + P(x=1) + P(x=0)

= $\frac{e^{-4}.4^{2}}{2!}$ + $\frac{e^{-4}.4^{1}}{1!}$+ $\frac{e^{-4}.4^{0}}{0!}$

= 0.14 + 0.072 + 0.018

= 0.23

4. احتمال أن يجد المشرف خطأين على الأقل

P(x>2) = P(x=2) + P(x=3) + P(x=4)

= $\frac{e^{-4}.4^{2}}{2!}$ + $\frac{e^{-4}.4^{3}}{3!}$+ $\frac{e^{-4}.4^{4}}{4!}$

= 0.14 + 0.19 + 0.19

= 0.52

5. احتمال أن يجد المشرف عدد من الأخطاء يتراوح بين 2 و 5

P(5<x>2) = P(x=2) + P(x=3) + P(x=4) + P(x=5)

= $\frac{e^{-4}.4^{2}}{2!}$ + $\frac{e^{-4}.4^{3}}{3!}$+ $\frac{e^{-4}.4^{4}}{4!}+ \frac{e^{-4}.4^{5}}{5!}$

=0.14 + 0.19+ 0.19 + 0.15

= 0.67