Université de Tlemcen
Faculté des sciences
Département de Mathématiques

2ème Année Licence (S4), 2019-2020
Corrigé de la série d'exercices de Géométrie N°1
Février 2020

Enseignante: H. BENALLAL

Exercice 1.

1) Soit la courbe paramétrée $\alpha(t) = \left(\dfrac{t}{1-t^4}, \dfrac{t^3}{1-t^4}\right)$. Déterminons une équation cartésienne de α, on a

$$\begin{cases} x = \dfrac{t}{1-t^4} \\ y = \dfrac{t^3}{1-t^4} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t = x(1-t^4) \\ y = x^3(1-t^4)^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t^2 = x^2(1-t^4)^2 \\ \dfrac{y}{x} = x^2(1-t^4)^2 \end{cases} \Longrightarrow t^2 = \frac{y}{x}$$

Ce qui donne: $x^2 = \dfrac{t^2}{1-t^4} = \dfrac{\frac{y}{x}}{(1-\frac{y^2}{x^2})}$, c-à-d: $x^2(x^2-y^2) = xy$.

Si $x \neq 0$, on a $x^4 - (xy)^2 - xy = 0$. Cette dernière équation est vraie même si $x = y = 0$.

2) paramétrer le graphe $y = f(x), a \leq x \leq b$.

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1, le graphe de f est donné par: $G_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \text{tel que} : x \in [a,b]\}$

On peut, donc, paramétrer G_f par l'application suivante: $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $\alpha(t) = (t, f(t))$, c'est une courbe de classe C^1.

Calculons maintenant la longueur, on a: $\alpha'(t) = (1, f'(t))$, par suite $l(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\|\, dt = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt$.

Exercice 2

Soit la courbe suivante: $\alpha(t) = \left(ae^{-bt}\cos t, ae^{-bt}\sin t\right)$

1. Donner une limite de $\alpha(t)$ et $\alpha'(t)$ quand t tend vers $+\infty$:

$\lim\limits_{t\to+\infty} \alpha(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \left(ae^{-bt}\cos t, ae^{-bt}\sin t\right) = (0,0)$.

Le vecteur vitesse de la courbe α est: $\alpha'(t) = -a\left(be^{-bt}\cos t + e^{-bt}\sin t, be^{-bt}\sin t - e^{-bt}\cos t\right)$.

$\lim\limits_{t\to+\infty} \alpha'(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} -a\left(be^{-bt}\cos t + e^{-bt}\sin t, be^{-bt}\sin t - e^{-bt}\cos t\right) = (0,0)$.

2. Montrer que α a une longueur finie sur $[0, +\infty[$

La longueur de α sur $[0,+\infty[$ est donnée par: $l(\alpha) = \lim\limits_{t\to+\infty} \int\limits_0^t \|\alpha'(u)\|\, du$.

Or $\|\alpha'(t)\| = a\sqrt{b^2+1}e^{-bt}$, donc $\int\limits_0^t \|\alpha'(u)\|\, du = \dfrac{-a}{b}\sqrt{b^2+1}(e^{-bt}-1)$

Ce qui donne: $l(\alpha) = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{-a}{b}\sqrt{b^2+1}(e^{-bt}-1) = \dfrac{a}{b}\sqrt{b^2+1} < +\infty$ sur $[0,+\infty[$.

Exercice 3

Soient les courbes suivante: $\alpha(t) = (t, t^2, \frac{2}{3}t^3 t)$ et sa projection sur le plan $z = 0$; $\beta(t) = \big(t, t^2, 0\big)$

1. Déterminer les expressions intégrales des longueurs:

Le vecteur vitesse de la courbe β est: $\beta'(t) = (1, 2t, 0) \neq 0$ pour tout $t \in [0,1]$, de norme: $\|\beta'(t)\| = \sqrt{1+4t^2}$.

La longueur de la courbe β est: $L(\beta) = \int_0^1 \sqrt{1+4t^2}dt$.

le vecteur vitesse de la courbe α est: $\alpha'(t) = (1, 2t, 2t^2) \neq 0$ pour tout $t \in [0,1]$, de norme

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{1+4t^2+4t^4} = (1+2t^2)$$

La longueur de la courbe α est donc $L(\alpha) = \int_0^1 (1+2t^2)dt$.

Comme pour tout $t \in [0,1]$, $0 \leq 1+4t^2 \leq (1+2t^2)^2$, pour tout $t \in [0,1]$, $\sqrt{1+4t^2} \leq (1+2t^2)$ et par intégration $L(\beta) \leq L(\alpha)$

2. Calculer la longueur de β puis celle de α :

En utilisant le changement de variable $2t = shu$, on obtient le calcul de primitive

$$\int \sqrt{1+4t^2}dt = \frac{1}{2}\int \cosh^2 u\, du = \frac{1}{4}\int (\cosh(2u)+1\ )\, du = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\sinh(2u)+u\right)$$

$$= \frac{1}{4}(\sinh u \cosh u + u) = \frac{1}{4}\left(2t\sqrt{1+4t^2} + \ln\left(2t+\sqrt{1+4t^2}\right)\right)$$

Par conséquent, la longueur de β est:

$$L(\beta) = \left[\frac{1}{4}\left(2t\sqrt{1+4t^2} + \ln\left(2t+\sqrt{1+4t^2}\right)\right)\right]_0^1 = \frac{1}{4}\left(2\sqrt{5} + \ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right)$$

La longueur de α est: $L(\alpha) = 1 + \dfrac{2}{3}$.

Exercice 4

a) $\alpha(t) = (2\cos t - \cos 2t, 2\sin t - \sin 2t)$. le vecteur vitesse de la courbe α est $\alpha'(t) = (-2\sin t + 2\sin 2t, 2\cos t - 2\cos 2t)$.

La longueur de la courbe α est donc

$$L(\alpha) = \int_0^{2\pi} 2\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}dt = \int_0^{2\pi} 2\sqrt{2}\sqrt{1-\cos 2\frac{t}{2}}dt$$

$$= 2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{2\sin^2(\frac{t}{2}}dt = 2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{2}\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt$$

Et comme $t \in [0, 2\pi]$ alors $\sin\frac{t}{2} > 0$, donc

$$L(\alpha) = 2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}dt = 2\sqrt{2}[-2\sqrt{2}\cos\frac{t}{2}dt]_0^{2\pi} = 8.\sqrt{2}.\sqrt{2} = 16$$

. **b)** $\alpha(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$. le vecteur vitesse de la courbe α est $\alpha'(t) = (1 - \cos t, \sin t)$.
La longueur de la courbe α est donc

$$L(\alpha) = \int_0^{2\pi}(1+\cos^2 t+\sin^2 t+2\cos t)dt = \int_0^{2\pi}\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}dt = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}dt = 8$$

c) $\alpha(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$. le vecteur vitesse de la courbe α est $\alpha'(t) = (-3\sin t\cos^2 t, 3\cos t\sin^2 t)$, de norme

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{9\sin^2\cos^4 t + 9\cos^2\sin^4 t} = \sqrt{9\sin^2 t\cos^2 t} = \frac{3}{2}|\sin 2t|$$

La longueur de la courbe α est donc

$$L(\alpha) = \int_0^{2\pi}\frac{3}{2}|\sin 2t|\,dt = \frac{3}{2}\left[2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2tdt - 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin 2tdt\right]$$

$$= \frac{3}{2}\left(\left[-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\left[-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right) = 6$$

Exercice 5

Soit la courbe $\gamma(t) = \left(t, \frac{3}{2}t^2, \frac{3}{2}t^3\right)$.

1. Trouver deux équations cartésiennes (en x, y, z) qui décrivent le support de γ.

Posons $x = t, y = \frac{3}{2}t^2$ et $z = \frac{3}{2}t^3$. On voit alors que le support de γ est donné par les équations cartésiennes: $y = \frac{3}{2}x^2$ et $z = xy$ (ou bien $z = \frac{3}{2}x^3$), pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^+$ et $z \in \mathbb{R}$.

2. On a$\forall t \in \mathbb{R} : \gamma'(t) = (1, 3t, \frac{1}{2}t^2) \neq (0, 0, 0)$, donc γ est régulière $\forall t \in \mathbb{R}$.

3. Calculer la longueur de γ entre $\gamma(0)$ et $\gamma(10)$.

On a $\gamma'(t) = \left(1, 3t, \frac{9}{2}t^2\right) \neq (0, 0, 0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. De norme

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + 9t^2 + \frac{81}{4}t^4} = \left(1 + \frac{9}{2}t^2\right)$$

La longueur de γ entre $\gamma(0)$ et $\gamma(10)$ est donnée donc par

$$L_0^{10}(\gamma)=\int_0^{10}\left(1+\frac{9}{2}t^2\right)dt=\left[t+\frac{3}{2}t^3\right]_0^{10}=10+\frac{3}{2}1000=1510$$

Exercice 6

1) $\alpha(t)=(t-\sinh t\cosh t, 2\cosh t)$, On a $\forall t\in\mathbb{R}:\alpha'(t)=(1-\cosh^2 t-\sinh^2 t, 2\sinh t)$, de norme $\|\alpha'(t)\|=2|\sinh t|\cosh t$. l'abscisse curviligne est donnée par

$$s(t)=\int_0^t 2\sinh u\cosh u du=\int_0^t \sinh 2u du=\left[\frac{1}{2}\cosh 2u\right]_0^t=\frac{1}{2}(\cosh 2t-1).$$

2) $\beta(t)=(a\cos t, a\sin t, bt)$, On a $\forall t\in\mathbb{R}:\beta'(t)=(-a\sin t, a\cos t, b)$, de norme $\|\beta'(t)\|=\sqrt{a^2+b^2}$. l'abscisse curviligne est donnée par

$$s(t)=\int_0^t\sqrt{a^2+b^2}du=\left[\sqrt{a^2+b^2}u\right]_0^t=\sqrt{a^2+b^2}t.$$

3) $\gamma(t)=(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos t+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t, \frac{1}{\sqrt{3}}\cos t, \frac{1}{\sqrt{3}}\cos t-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t)$, On a $\forall t\in\mathbb{R}:\gamma'(t)=(-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin t+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t, -\frac{1}{\sqrt{3}}\sin t, -\frac{1}{\sqrt{3}}\sin t-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t)$, de norme $\|\gamma'(t)\|=\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}=1$. l'abscisse curviligne est donnée par

$$s(t)=\int_0^t du=t.$$

Exercice 7

On donne $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3):[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée telle que $\alpha(a)=P$ et $\alpha(b)=Q$, et on pose $v=Q-P=(v_1,v_2,v_3)$

Soit

$$\int_a^b\alpha'(t).vdt=\int_a^b\sum_{i=1}^3\alpha_i'(t).v_idt=\sum_{i=1}^3\int_a^b\alpha_i'(t).v_idt$$

$$=\sum_{i=1}^3 v_i\int_a^b\alpha_i'(t)dt=\sum_{i=1}^3 v_i(\alpha_i(b)-\alpha_i(a))=v.(\alpha(b)-\alpha(a))=\|v\|^2.$$

D'autre part, d'après l'inégalité de Schwartz, $\alpha'(t).v\leq\|\alpha'(t)\|.\|v\|$ Donc

$$\int_a^b\alpha'(t).vdt\leq\|v\|\int_a^b\alpha'(t).dt$$

c-à-d $\|v\|^2\leq\|v\|.l(\alpha)$ et par suite $l(\alpha)\geq\|v\|$.