Faculté des Sciences A.U 2019-2020
Département de Mathématiques
2ème année licence (S4)

Série d'exercices de Géométrie
N°1

Exercice 1 :

1. Déterminer une équation cartésienne de la courbe paramétrée
   $\alpha \mapsto \alpha(t) = \left(\frac{t}{1-t^4}, \frac{t^3}{1-t^4}\right)$
2. Paramétriser le graphe $y = f(x), a \leq x \leq b$, et montrer que sa longueur est donnée par : $l = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)}\ dx$

Exercice 2 :

Considérer la courbe α: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\alpha(t) = (ae^{-bt}\cos t\,, ae^{-bt}\sin t)$$

Où $a, b > 0$

1. Donner une limite de $\alpha(t)$ et $\alpha'(t)$ quand t tend vers $+\infty$.
2. Montrer que α a une longueur finie sur $[0, +\infty[$.

Exercice 3 :

Considérer la courbe

$$\alpha(t) = (t, t^2, \frac{2}{3}t^3)$$

Soit β sa projection orthogonale sur le plan d'équation $z = 0$ définie par :
$\beta(t) = (t, t^2, 0)$ Pour t parcourant $[0,1]$.

1. Donner une expression intégrale pour la longueur de β puis celle de α, puis les comparer.
2. Calculer la longueur de β puis celle de α.

Exercice 4 :

Calculer les longueurs des courbes suivantes :

a. $\alpha(t) = (2\cos t - \cos 2t\,, 2\sin t - \sin 2t)$
b. $\alpha(t) = (t - \sin t\,, 1 - \cos t)$, $t \in [0,2\pi]$
c. $\alpha(t) = (cos^3 t, sin^3 t)$, $t \in [0,2\pi]$

Exercice 5 :

On considère la courbe $\gamma: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $\gamma(t) = (t, \frac{3}{2}t^2, \frac{3}{2}t^3)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1. Trouver deux équations cartésiennes (en $, y\ et\ z$) qui décrivent le support de γ.
2. Déterminer les points réguliers de γ.
3. Calculer la longueur de γ entre $\gamma(0)\ et\ \gamma(10)$.

Exercice 6 :

Déterminer une abscisse curviligne pour chacune des courbes suivantes :
1. $\alpha(t) = (t - \sinh t \cosh t\,, 2\cosh t)$.
2. $\beta(t) = (\mathrm{a}\cos t\,, \mathrm{a}\sin t\,, b)$.
3. $\gamma(t)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos t + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t, \frac{1}{\sqrt{3}}\cos t, \frac{1}{\sqrt{3}}\cos t - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\right)$.

Exercice 7 :

Soient $P, Q \in R^3$ et $\alpha: [a, b] \to R^3$ une courbe paramétrée avec $\alpha(a) = P$ et $\alpha(b) = Q$. Posons $v = Q - P$. Montrer que la longueur de α

$$l(\alpha) \geq \|v\|$$

C'est-à-dire le segment PQ est le plus court chemin joignant P et Q.