Université de Tlemcen
Faculté des sciences
Département de Mathématiques

2ème Année Licence (S4), 2019-2020
Corrigé de la série d'exercices de Géométrie N°4
09 Mai 2020

Enseignante: H. BENALLAL

Exercice 1.
Pour la surface M_1: $f(u,v) = (u, v, u^2+v^2)$, posons $x = u, y = v$, alors $z = x^2 + y^2$, M_1 est donc d'équation caractéristique $x^2 + y^2 - z = 0$. De même, pour la surface M_2 : $f(t,\theta) = (t\cos\theta, t\sin\theta, t^2)$, posons $x = t\cos\theta, y = t\sin\theta$, alors $z = x^2+y^2$, M_2 est donc d'équation caractéristique $x^2 + y^2 - z = 0$.

par suite les deux surfaces ont le même support géométrique.

Exerciec 2.
En faisons tourner la courbe $\gamma(t) = (a\cos t, 0, b\sin t)$ autour de l'axe $(0,0,1)$, on obtient

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\cos t \\ 0 \\ b\sin t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a\cos t\cos\theta & a\cos t\sin\theta & b\sin t \end{pmatrix}.$$

Donc l'ellipsoïde Ξ est paramétrée par: $f(t,\theta) = (a\cos t\cos\theta, a\cos t\sin\theta, b\sin t)$, avec $\theta \in [0, 2\pi[\,, t \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et $0 < a < b$.
Calculons maintenant l'aire de Ξ:
Le plan tangent au point $p \in \Xi$ est engendré par $\frac{\partial f}{\partial t} = (-a\sin t\cos\theta, -a\sin t\sin\theta, b\cos t)$ et $\frac{\partial f}{\partial \theta} = (-a\cos t\sin\theta, a\cos\theta\cos t, 0)$. Dans cette base , la matrice de la première forme fondamentale est

$$I_p = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t & 0 \\ 0 & a^2\cos^2 t \end{pmatrix}.$$

L'élément de volume est $\sqrt{EG - F^2}dtd\theta = a\cos t\sqrt{a^2\sin^2 + b^2\cos^2 t}dtd\theta$
L'aire est donc:

$$A[\Xi] = \int_{t=\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\theta=0}^{2\pi} a\cos t\sqrt{a^2\sin^2 + b^2\cos^2 t}dtd\theta$$

$$= 2\pi\int_{t=\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos t\sqrt{b^2 - c^2\sin^2}dt \quad \text{où } c = \sqrt{b^2-a^2}$$

On pose $u = \frac{c}{b}\sin t$, on obtient

$$A[\Xi] = 2\pi\int_{-\frac{c}{b}}^{\frac{c}{b}} \frac{ab^2}{c}\sqrt{1-u^2}du = 4\pi\frac{ab^2}{c}\int_0^{\frac{c}{b}} \sqrt{1-u^2}du$$

Posons $u = \sin v$, on aura:

$$A[\Xi] = 2\pi\frac{ab^2}{c}\int_0^{\arcsin\frac{c}{b}} (1+\cos 2v)dv = 2\pi\frac{ab^2}{c}\left[v+\frac{1}{2}\sin 2v\right]_0^{\arcsin\frac{c}{b}}$$

$$= 2\pi\left[a^2+\frac{ab^2}{c}\arcsin\frac{c}{b}\right] = 2\pi\left[a^2+\frac{ab^2}{\sqrt{b^2-a^2}}\arcsin\left(\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}\right)\right].$$

Exercice .3

1. Le cylindre C^2: $f(u,v) = (a\cos u, a\sin u, v)$ Soit $p = f(u_0, v_0)$ un point de C^2 et T_pC^2 l'espace tangent à C^2 au point p engendré par f_u et f_v, On a

$$f_u = (-a\sin u, a\cos u, 0), f_v = (0,0,1)$$

D'où $f_u \wedge f_v = (a\cos u, a\sin u, 0)$ de norme $\|f_u \wedge f_v\| = a$. Le vecteur normal unitaire est donc: $N_p = (\cos u, \sin u, 0)$. Calculons en suite:

$$f_{uu} = (-a\cos u, -a\sin u, 0),\ f_{uv} = (0,0,0),\ \ f_{vv} = (0,0,0)$$

La deuxième forme fondamentale:

$$l = f_{uu}.N_p = -a,\ \ m = f_{uv}.N_p = 0,\ \ q = f_{vv}.N_p = 0.$$

d'où

$$II_p = \begin{pmatrix} -r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice associé à la première forme fondamentale:

$$I_p = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de déterminant $\det I_p = a^2$.

La matrice associée à l'opérateur S_p est

$$B = I_p^{-1}II_p = \frac{1}{a^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2}\begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{-1}{a} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, les courbures principales sont: $k_1 = \dfrac{-1}{a}$, $k_2 = 0$. La courbure de Gauss est $K = k_1.k_2 = \det B = 0$. Finalement la courbure moyenne $H = \dfrac{k_1+k_2}{2} = \dfrac{-1}{2a}$.

2. Le Tore T^2: $f(u,v) = ((R + r\cos u)\cos v, (R + r\cos u)\sin v, r\sin v)$. Soit $p = f(u_0, v_0)$ un point de T^2 et T_pT^2 l'espace tangent à T^2 au point p engendré par f_u et f_v, On a

$$f_u = (-r\sin u\cos v, -r\sin u\sin v, r\cos u), f_v = (R+r\cos u)(\sin v, \cos v, 0)$$

D'où $f_u \wedge f_v = (R+r\cos u)(-r\cos u\cos v, -r\cos u\sin v, -r\sin u)$ de norme $\|f_u \wedge f_v\| = r(R + r\cos u)$. Le vecteur normal unitaire est donc: $N_p = (-\cos u\cos v, -\cos u\sin v, \sin u)$. Calculons en suite:

$$f_{uu} = (-r\cos u\cos v, -r\cos u\sin v, -r\sin u),\ f_{uv} = (r\sin u\sin v, -r\sin u\cos v, 0)$$

$$f_{vv} = (R + r\cos u)(-\cos v, -\sin v, 0)$$

La deuxième forme fondamentale:

$$l = f_{uu}.N_p = -r, \quad m = f_{uv}.N_p = 0, \quad q = f_{vv}.N_p = (R + r\cos u)\cos u.$$

d'où

$$II_p = \begin{pmatrix} -r & 0 \\ 0 & (R + r\cos u)\cos u \end{pmatrix}$$

La matrice associé à la première forme fondamentale:

$$I_p = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & (R + r\cos u)^2 \end{pmatrix}$$

de déterminant $\det I_p = r^2(R + r\cos u)^2$.

La matrice associée à l'opérateur S_p est

$$B = I_p^{-1} II_p = \frac{1}{r^2(R + r\cos u)^2} \begin{pmatrix} (R + r\cos u)^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -r & 0 \\ 0 & (R + r\cos u)\cos u \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{r^2(R + r\cos u)^2} \begin{pmatrix} -r(R + r\cos u)^2 & 0 \\ 0 & r^2(R + r\cos u)\cos u \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{-1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\cos u}{R + r\cos u} \end{pmatrix}$$

Ainsi, les courbures principales sont $k_1 = \frac{-1}{r}, \quad k_2 = \frac{\cos u}{R + r\cos u}$.

La courbure de Gauss est $K = k_1.k_2 = \det B = \frac{-\cos u}{r(R + r\cos u)}$

Finalement la courbure moyenne $H = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{-R}{2r(R + r\cos u)}$.

Exercice .4

Soit p un point de la surface M et S_p l'opérateur de forme tel que $\forall V \in T_pM: \quad S_p(V) = k(p)V$.

1. En dérivant les formules suivantes:

$$\begin{cases} N_u = & -kf_u \\ N_v = & -kf_v \end{cases}$$

On obtient:

$$\begin{cases} N_{uu} = & -k_uf_u - kf_{uu} \\ N_{uv} = & -k_vf_u - kf_{uv}...(2) \\ N_{vu} = & -k_uf_v - kf_{vu}...(3) \\ N_{vv} = & -k_vf_v - kf_{vv} \end{cases}$$

Et comme $N_{uv} = N_{vu}$, alors , (2) et (3) donnent: $\quad k_uf_v - k_vf_u = 0$

Faisons le produit scalaire de cette dernière équation par f_u puis par f_v, on aura

$$\begin{cases} k_uF - k_vE = & 0 \\ k_uG - k_vF = & 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} F & -E \\ G & -F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_u \\ k_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} k_u \\ k_v \end{pmatrix} = \frac{1}{EG-F^2} \begin{pmatrix} -F & -E \\ -G & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow k_u = k_v = 0$$

On déduit donc que $k = cste$

2. Soit S^2 la sphère unité de $\mathbb{R}^3$. Supposons que la courbure k de la surface M est constante non nulle. On a

$$\begin{cases} N_u = & -kf_u \\ N_v = & -kf_v \end{cases} \Longrightarrow N_p = -kf(u,v)$$

$$\Longrightarrow \|N_p\|^2 = k^2 \|f(u,v)\|^2 \Longrightarrow \|f(u,v)\|^2 = \frac{1}{k^2} \|N_p\|^2 = \frac{1}{k^2}$$

C'est-à-dire $\quad \|f(u,v)\| = \dfrac{1}{k} = cste$. Cela signifie que $f(u,v) \in S^2$. La surface M est donc une partie de la sphère.

Exercice 5

Soit $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; z^2 - x^2 - y^2 = 1\right\}$.

1. Trouver une paramétrisation de S.

On paramètre la surface S par $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par: $f(u,v) = (shu\cos v, shu\sin v, chu)$.

2. Donner l'expression d'un vecteur normal unitaire en tout point.

Soit $p = f(u,v)$ un point de la surface, le plan tangent au point p est engendré par $\{f_u, f_v\}$ où $f_u = (chu\cos v, chu\sin v, shu)$ et $f_v = (-shu\sin v, shu\cos v, 0)$.

Donc $f_u \wedge f_v = \left(-sh^2u\cos v, -sh^2u\sin v, chushu\right)$ de norme $\|f_u \wedge f_v\| = shu\sqrt{ch2u}$. On obtient le vecteur normal

$$N(u,v) = \frac{x_u \wedge x_v}{\|x_u \wedge x_v\|} = \frac{1}{\sqrt{ch2u}}(-shu\cos v, -shu\sin v, chu)$$

3. Déterminer les courbures principales, moyenne et de Gauss en tout point de S.

les coefficients de la première forme fondamentale sont donnés par:

$$E = f_u.f_u = ch2u,\ F = f_u.f_v = 0 \text{ et } G = f_v.f_v = sh^2u$$

D'où, la matrice de la première forme fondamentale est: $I_p = \begin{pmatrix} ch2u & 0 \\ 0 & sh^2u \end{pmatrix}$.

On calcule

$$f_{uu} = (shu\cos v, shu\sin v, chu)\,, f_{uv} = (-chu\sin v, chu\cos v, 0) \text{ et}$$

$$f_{vv} = (-shu\cos v, -shu\sin v, 0)$$

D'où l'on tire les coefficients de la 2ème forme fondamentale: $l = \dfrac{1}{\sqrt{ch2u}}$, $m = 0$ et $q = \dfrac{sh^2u}{\sqrt{ch2u}}$,

Donc, la matrice de la deuxième forme fondamentale est: $II_p = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{ch2u}} & 0 \\ 0 & \dfrac{sh^2u}{\sqrt{ch2u}} \end{pmatrix}$

L'opérateur de forme S_p a pour matrice

$$I_p^{-1}II_p = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{ch2u} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{sh^2u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{ch2u}} & 0 \\ 0 & \dfrac{sh^2u}{\sqrt{ch2u}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{(ch2u)^{\frac{3}{2}}} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{ch2u}} \end{pmatrix}$$

Par conséquent, les courbures principales sont

$$k_1 = \frac{1}{(ch2u)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{et } k_2 = \frac{1}{\sqrt{ch2u}}$$

.

Le calcul de la courbure de Gauss K est immédiat, $K = k_1.k_2 = \dfrac{1}{(ch2u)^2}$

La courbure moyenne H est: $H = -\dfrac{1}{2}(k_1 + k_2) = \dfrac{ch^2u}{(ch2u)^{\frac{3}{2}}}$.

4. Calculer les symboles de Christoffel de la surfaces paramétrée S.

Soit S la surface paramétrée par $f(u,v) = (\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, \cosh u)$.

a. Les dérivées premières du paramétrage:

$$f_u = (chu \cos v, chu \sin v, \sinh u) \text{ et } f_v = (-shu \sin v, shu \cos v, 0)$$

b. Les symboles de Christoffel: On a

$$E_u = 2\sinh 2u, \quad E_v = F_u = F_v = G_v = 0, \quad G_u = \sinh 2u$$

donc

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{uu}^u \\ \Gamma_{uu}^v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_u \\ F_u - \frac{1}{2}E_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{ch2u} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{sh^2u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} sh2u \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{uv}^u \\ \Gamma_{uv}^v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_v \\ \frac{1}{2}G_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{ch2u} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{sh^2u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{2}sh2u \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{vv}^u \\ \Gamma_{vv}^v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} F_v - \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}G_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{ch2u} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{sh^2u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{-1}{2}sh2u \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui donne $\begin{pmatrix} \Gamma_{uu}^u \\ \Gamma_{uu}^v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{sh2u}{ch2u} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \Gamma_{uv}^u \\ \Gamma_{uv}^v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{chu}{shu} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \Gamma_{vv}^u \\ \Gamma_{vv}^v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{sh2u}{2ch2u} \\ 0 \end{pmatrix}$.