Faculté des sciences
Département de Mathématiques
2ème année licence (S4)

A.U 2019-2020

Série d'exercices de Géométrie n°4

Exercice 1 :

Les deux surfaces paramétrées suivantes ont-elles le même support géométrique ?

1. $f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f_1(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$.
2. $f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f_2(t, \theta) = (t \ \cos\theta \,, t \ \sin\theta \,, t^2)$.

Exercice 2 :

Calculer l'aire de l'ellipsoïde de révolution engendré par la révolution de la courbe

$$\gamma(t) = (a\cos t, 0, b\sin t), t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \ 0 < a < b.$$

autour de l'axe (oz).

Exercice 3 :

Calculer les deuxièmes formes fondamentales des surfaces paramétrées suivantes puis calculer la matrice associée à S_p et déterminer la courbure moyenne H et la courbure de Gauss K :

1. Le cylindre $f(u, v) = (a\cos u \,, a\sin u \,, v)$.
2. Le tore $f(u, v) = ((R + r\cos u)\cos v, (R + r\cos u)\sin v, r\sin u)$ $(0 < r < R)$.

Exercice 4 :

Supposons que pour tout $p \in M$, l'opérateur de la deuxième forme fondamentale $S_p : T_pM \to T_pM$ est un multiple de la matrice identité i.e. $S_p(V) = K(p)V$ pour tout $V \in T_pM$.

1. Dériver les relations suivantes $D_{f_u}N = N_u = -kf_u$ et $D_{f_v}N = N_v = -kf_v$

Pour déterminer k_u et k_v et en déduire que k doit-être une constante.

2. Nous savons que si $k = 0$, M est une surface plane. Montrer que si $k \neq 0$ alors M est une partie d'une sphère.

Exercice 5 :

Soit $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; z^2 - x^2 - y^2 = 1\}$.

1. Trouver une paramétrisation de S.
2. Donner l'expression d'un vecteur normal unitaire en tout point.
3. Déterminer les courbures principales, moyenne et de Gauss en tout point de S.
4. Calculer les symboles de Christoffel de la surface paramétrée S.