Université Abou-Bekr Belkaid Tlemcen **Semestre 2**

Module : ***Contrôle optimal***
Niveau : ***Première Année Master Biomathématiques et Modélisation***

T. D. N°05 : EQUATION DE HAMILTON- JACOBI -BELLMAN

Exercice1 : Mouvement d'un point matériel par équation HJB

On considère le mouvement d'un point matériel avec un critère quadratique :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u(t), t \in [s,T] \\ x(s) = \xi, \\ J(s,\xi;u) = \frac{1}{2}\int_s^T (u^2(t) + x^2(t)dt + \frac{1}{2}x^2(T), \end{cases} \tag{1}$$

pour tout $s \in [0,T]$, $T > 0$ fixé, et pour tout $\xi \in \mathrm{R}$.

Question 1. Écrire l'équation HJB et la condition finale pour la fonction valeur $V(s;\xi) = \inf\limits_{u \in L^1([0,T],\mathrm{R})} J(s,\xi;u)$.

Question 2.Résoudre l'équation HJB en cherchant la solution sous la forme séparée $V(s;\xi) = \frac{1}{2}\mu(s)\xi^2$

Question 3. En déduire le contrôle optimal comme feedback, la trajectoire optimale et le contrôle optimal.

Exercice2 : Politique d'investissement

On considère un consommateur qui dispose d'un capital $x(t)$, où $t \in [0;T]$ est le temps. Ce capital lui rapporte au taux $\alpha > 0$. Par ailleurs, le consommateur dépense une quantité $u(t) \geq 0$ de son capital, de sorte que l'évolution est donnée par

$$\dot{x}(t) = \alpha x(t) - u(t).$$

On considère la fonction u(t) comme un contrôle, et le consommateur cherche à maximiser la fonction d'utilité suivante :

$$\Phi(u) = \int_0^T e^{-\beta t}\sqrt{u(t)}dt + \sqrt{x(T)},$$

sous la contrainte $u \geq 0$ sur le contrôle. Le réel β vérifie $\beta > \dfrac{\alpha}{2}$. Le dernier terme de la fonction d'utilité traduit le fait qu'on souhaite à la fois maximiser la consommation (avec une appétence plus prononcée pour la jouissance immédiate que différée) et le capital final. Il s'agit donc d'un problème de contrôle optimal avec le critère $J(u) = -\Phi(u)$.

Question 1. Écrire le Hamiltonien du système et la définition de la fonction valeur $V(s;\xi)$.

Question 2. Écrire l'équation HJB vérifiée par V , et la résoudre en supposant une séparation des variables sous la forme $V(s;\xi) = f(s)\sqrt{\xi}$.

Question 3. En déduire la stratégie d'investissement optimale et la valeur finale du capital.

Université Abou-Bekr Belkaid Tlemcen A.U. : 2019-2020

Faculté des Sciences Module : Contrôle optimal.

Département de Mathématiques.

Niveau : Première Année Master Biomathématiques et Modélisation.

T.D. N°05 : Équation de Hamilton-Jacobi-Bellman (Corrigé).

Exercice 01 : Mouvement d'un point matériel.

On a le problème suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u(t), \ t \in [S, T], \\ x(S) = \xi, \\ J(S, \xi; u) = \frac{1}{2}\int_S^T (u^2(t) + x^2(t))dt + \frac{x^2(T)}{2}, \end{cases}$$

pour tout $S \in [0, T]$, $T > 0$ fixé, et pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

1°) Réponse de la Question 1 :

Le Hamiltonien H est

$$H(x,\lambda,u) = \lambda . u + \frac{1}{2}(x^2+u^2).$$

Alors le Hamiltonien minimisé H_{min} est

$$\begin{aligned}
H_{min}(x,\lambda) &= \inf_{u\in\mathbb{R}} H(x,\lambda,u) \\
&= \inf_{u\in\mathbb{R}} \left\{\lambda . u + \frac{1}{2}(x^2+u^2)\right\} \\
&= H(x,\lambda,-\lambda) \text{ avec } u=-\lambda \text{ comme unique minimiseur.} \\
&= \lambda . (-\lambda) + \frac{1}{2}\left(x^2+(-\lambda)^2\right) \\
&= \frac{1}{2}(x^2-\lambda^2).
\end{aligned}$$

Alors l'équation HJB est:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial s}(s,\xi) + H_{min}\left(\xi, \dfrac{\partial V}{\partial \xi}(s,\xi)\right) = 0, \\ V(T,\xi) = \dfrac{\xi^2}{2} \text{ car } \Psi(\xi) = \dfrac{\xi^2}{2}. \end{cases}$$

C'est-à-dire,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial s}(s,\xi) + \dfrac{1}{2}\left(\xi^2 - \left(\dfrac{\partial V}{\partial \xi}(s,\xi)\right)^2\right) = 0, \\ V(T,\xi) = \dfrac{\xi^2}{2}. \end{cases}$$

Réponse de la Question 2

On a,

$$V(s,\xi) = \frac{1}{2}\mu(s)\xi^2.$$

Alors,

$$\frac{\partial V}{\partial s}(s,\xi) = \frac{1}{2}\mu'(s)\xi^2,$$

et

$$\frac{\partial V}{\partial \xi}(s,\xi) = \mu(s)\xi.$$

Par suite d'après l'équation HJB, on obtient

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\mu'(s)\xi^2 + \frac{1}{2}\left(\xi^2 - (\mu(s)\xi)^2\right) = 0, \\ \mu(T) = 1 \end{cases}$$

C'est-à-dire,

$$\begin{cases} \mu'(s) + 1 - \mu^2(s) = 0, \\ \mu(T) = 1. \end{cases}$$

C'est-à-dire,

$$\begin{cases} \mu'(s) = \mu^2(s) - 1, \\ \mu(T) = 1. \end{cases} \qquad (C)$$

Comme $\mu \equiv 1$ est un solution de (C), alors par unicité de la solution, on a $\mu(s) = 1$, pour tout $s \in [0, T]$.

Par suite

$$V(s, \xi) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2}\mu(s)\xi^2$$
$$= \boxed{\frac{1}{2}\xi^2.}$$

<u>Réponse de la Question 3</u>

i) Le contrôle optimal sous forme de feedback est

$$\tilde{u}(s, \xi) = -\lambda(s)$$ (Voir qu'on a trouver $\tilde{u} = -\lambda$ comme unique minimiseur).

$\boxed{5.4°}$

$$= -\frac{\partial V}{\partial \xi}(s,\xi)$$

$$= -\xi.$$

ii) La trajectoire optimale x^* :

x^* est solution de

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = -x^*(t), \\ x^*(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Alors,

$$x^*(t) = x_0 e^{-t}.$$

iii) Le contrôle optimal en fonction de t (en boucle ouverte).

On a,

$$\dot{x}^*(t) = u^*(t).$$

Alors,

$$u^*(t) = \frac{d}{dt}(x_0 e^{-t})$$

$$= \boxed{-x_0 e^{-t}.}$$

$\boxed{5.5°}$

Exercice 2 : Politique d'investissement

Réponse de la Question 1.

i) Le Hamiltonien H est :

$$H(t,x,\lambda,u) = \lambda.(\alpha x - u) - e^{-\beta t}\sqrt{u}.$$

ii) La fonction valeur V est définie par.

$$V(s,\xi) = \inf_{u\in L^1([s,T];\mathbb{R}^+)} \left(-\int_s^T e^{-\beta t}\sqrt{u(t)}\,dt - \sqrt{x(T)} \right).$$

Réponse de la Question 2

i) L'écriture de l'équation HJB vérifiée par V.

On a,

$$H(t,x,\lambda,u) = \lambda.(\alpha x - u) - e^{-\beta t}\sqrt{u}$$

Déterminons le Hamiltonien minimisé H_{min} définie par

$$H_{min}(t,x,\lambda) = \inf_{u\in\mathbb{R}^+} H(t,x,\lambda,u)$$

On pose,

$$\varphi(u) = \lambda(\alpha x - u) - e^{-\beta t}\sqrt{u} \text{ pour } u \in \mathbb{R}^+.$$

Alors,

$$\varphi'(u) = -\lambda - \frac{e^{-\beta t}}{2\sqrt{u}}, \quad u \in \mathbb{R}_+^*.$$

On distingue deux cas

<u>1^{er} Cas</u> : $\lambda \geqslant 0$.

Pour cas cas on a $\varphi'(u) < 0$, pour $u \in \mathbb{R}_+^*$

et par suite $\inf\limits_{u \in \mathbb{R}^+} \varphi(u) = \lim\limits_{u \to +\infty} \varphi(u) = -\infty$.

<u>2^{ème} Cas</u> : $\lambda < 0$.

Pour ce cas, on a :

$\varphi'(u) < 0$, pour $u \in \left]0, \frac{e^{-2\beta t}}{4\lambda^2}\right[$,

$\varphi'\left(\frac{e^{-2\beta t}}{4\lambda^2}\right) = 0$ et $\varphi'(u) > 0$, pour $u \in \left]\frac{e^{-2\beta t}}{4\lambda^2}, +\infty\right[$

Alors,

$$\inf_{u \in \mathbb{R}^+} \varphi(u) = \varphi\left(\frac{e^{-2\beta t}}{4\lambda^2}\right)$$

$$= \lambda\left(\alpha x - \frac{e^{-2\beta t}}{4\lambda^2}\right) - \frac{e^{-2\beta t}}{2|\lambda|}$$

$$= \lambda\alpha x - \frac{e^{-2\beta t}}{4\lambda} + \frac{e^{-2\beta t}}{2\lambda}$$

$$= \boxed{\lambda\alpha x + \frac{e^{-2\beta t}}{4\lambda}.}$$

Par suite l'équation HJB est:

$$\frac{\partial V}{\partial s}(s,\xi) + H_{min}\left(s,\xi, \frac{\partial V}{\partial \xi}(s,\xi)\right) = 0,$$

c'est-à-dire,

$$\frac{\partial V}{\partial s}(s,\xi) + \alpha\xi\frac{\partial V}{\partial \xi}(s,\xi) + \frac{e^{-2\beta s}}{4\frac{\partial V}{\partial \xi}(s,\xi)} = 0,$$

Et la condition finale est donnée par

$$V(T,\xi) = -\sqrt{\xi}.$$

$\boxed{5.8^{\circ}}$

ii) La résolution de l'équation HJB.

On a,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial s}(s,\xi)+\alpha\xi\,\dfrac{\partial V}{\partial \xi}(s,\xi)+\dfrac{e^{-2\beta s}}{4\,\dfrac{\partial V}{\partial \xi}(s,\xi)}=0, \\ \\ V(T,\xi)=-\sqrt{\xi}. \end{cases}$$

On pose, $V(s,\xi)=f(s)\sqrt{\xi}$.

Alors

$$\frac{\partial V}{\partial s}(s,\xi)=f'(s)\sqrt{\xi},$$

et

$$\frac{\partial V}{\partial \xi}(s,\xi)=\frac{f(s)}{2\sqrt{\xi}}.$$

En remplace dans l'équation HJB, on obtient

$$f'(s)\sqrt{\xi}+\alpha\xi\,\frac{f(s)}{2\sqrt{\xi}}+\frac{e^{-2\beta s}}{4\,\dfrac{f(s)}{2\sqrt{\xi}}}=0.$$

C'st-à-dire,

$$f'(s)\sqrt{\xi}+\alpha\sqrt{\xi}\,\frac{f(s)}{2}+\sqrt{\xi}\,\frac{e^{-2\beta s}}{2\,f(s)}=0.$$

C'st-à-dire,

$$f'(S) + \alpha \frac{f(S)}{2} + \frac{e^{-2\beta S}}{2f(S)} = 0.$$

C'st-à-dire,

$$2 f(S) f'(S) + \alpha f^2(S) = - e^{-2\beta S}$$

En multipliant par $e^{\alpha S}$, on obtient

$$2 e^{\alpha S} f(S) f'(S) + \alpha e^{\alpha S} f^2(S) = - e^{(\alpha - 2\beta) S}$$

C'st-à-dire, $$\frac{d}{dS}\left(e^{\alpha S} f^2(S) \right) = - e^{(\alpha - 2\beta) S}$$

Alors, $$e^{\alpha T} f^2(T) - e^{\alpha S} f^2(S) = - \frac{1}{\alpha - 2\beta} \left[e^{(\alpha-2\beta)T} - e^{(\alpha-2\beta)S} \right]$$

(Voir qu'on par hypothèse $\beta > \frac{\alpha}{2}$, ce qui donne $\alpha - 2\beta \neq 0$).

Maintenant comme $V(S,\xi) = f(S)\sqrt{\xi}$ et $V(T,\xi) = -\sqrt{\xi}$,

on obtient $f(T) = -1$ et par suite, on a

$$\boxed{5.10^\circ}$$

$$e^{\alpha T} - e^{\alpha S} f^2(S) = -\frac{1}{\alpha - 2\beta}\left[e^{(\alpha-2\beta)T} - e^{(\alpha-2\beta)S}\right].$$

C'est-à-dire,

$$f^2(S) = e^{\alpha(T-S)} + \frac{e^{-\alpha S}}{\alpha - 2\beta}\left[e^{(\alpha-2\beta)T} - e^{(\alpha-2\beta)S}\right].$$

Alors la solution de l'équation HJB est

$$V(S,\xi) = -\sqrt{e^{\alpha(T-S)} + \frac{e^{-\alpha S}}{\alpha-2\beta}\left(e^{(\alpha-2\beta)T} - e^{(\alpha-2\beta)S}\right)}\ \sqrt{\xi}.$$

Réponse de la Question 3

i) En déduire la stratégie d'investissement optimale.

Il s'agit de donner le contrôle optimal sous forme de feedback.

On a, $\tilde{u}(S,\xi) = \dfrac{e^{-2\beta S}}{4\left(\frac{\partial V}{\partial \xi}(S,\xi)\right)^2}$ (Voir la Question 2) et la proposition du cours qui dit que $\lambda(S) = \frac{\partial V}{\partial \xi}(S, X^*(S))$).

Comme

$$\frac{\partial V}{\partial \xi}(s,\xi) = -\frac{\sqrt{e^{\alpha(T-s)} + \frac{e^{-\alpha s}}{\alpha-2\beta}\left(e^{(\alpha-2\beta)T} - e^{(\alpha-2\beta)s}\right)}}{2\sqrt{\xi}}$$

on obtient

$$\tilde{u}(s,\xi) = \frac{e^{-2\beta s}}{e^{\alpha(T-s)} + \frac{e^{-\alpha s}}{\alpha-2\beta}\left(e^{(\alpha-2\beta)T} - e^{(\alpha-2\beta)s}\right)}\xi .$$

ii) En déduire la valeur finale du capital.

On a,

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = \alpha x^*(t) - u(t), \\ x(0) = x_0 . \end{cases}$$

D'après la question précédente i), on obtient :

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = \alpha x^*(t) + \dfrac{e^{-2\beta t} \quad x^*(t)}{e^{\alpha(T-t)} + \frac{e^{-\alpha t}}{\alpha-2\beta}\left(e^{(\alpha-2\beta)T} - e^{(\alpha-2\beta)t}\right)}, \\ \\ x(0) = x_0 . \end{cases}$$

$\boxed{5.12^\circ}$

La solution du problème de Cauchy précédent est donnée par

$$x^*(t) = x_0\, e^{\int_0^t \left(\alpha + \frac{e^{-2\beta\tau}}{e^{\alpha(T-\tau)} + \frac{e^{-\alpha\tau}}{\alpha-2\beta}\left(e^{(\alpha-2\beta)T} - e^{(\alpha-2\beta)\tau}\right)}\right)d\tau}.$$

iii) Par suite la valeur finale du capital est

$$x^*(T) = x_0\, e^{\int_0^T \left(\alpha + \frac{e^{-2\beta\tau}}{e^{\alpha(T-\tau)} + \frac{e^{-\alpha\tau}}{\alpha-2\beta}\left(e^{(\alpha-2\beta)T} - e^{(\alpha-2\beta)\tau}\right)}\right)d\tau}.$$

$\boxed{5.13°}$