Théorie de l'Elasticité

Abdellatif MEGNOUNIF

Application 0

Contraintes et Directions Principales

COURS 8 Mardi 17.03.2020

Introduction

Le but de cette application est de calculer les contraintes et directions principales d'un tenseur quelconque.

Vérifier l'orthogonalité des directions principales

Relations entre contraintes et directions principales du tenseur initial et celles du tenseur déviatorique

Exemple

Soit la matrice associée au tenseur des contraintes en un point quelconque « M »

$$[\sigma]_M = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -3\sqrt{3} \\ 0 & 25 & 0 \\ -3\sqrt{3} & 0 & 13 \end{pmatrix} \quad (daN/mm^2$$

i) Calculer les contraintes et directions principales de ce tenseur.

ii) Décomposer ce tenseur en partie sphérique et deviatorique.

iii) Déterminer les contraintes et directions principales de la partie déviatorique. Qu'est ce qu'on peut déduire ?

Solution

Il faut résoudre le déterminant (éqs (2.37) ou (2.38):

$$det = \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

$$\boxed{\det([\sigma] - \sigma.[I]) = 0}$$

Soit:

$$\begin{vmatrix} 7-\sigma & 0 & -3\sqrt{3} \\ 0 & 25-\sigma & 0 \\ -3\sqrt{3} & 0 & 13-\sigma \end{vmatrix} = 0$$

$$(7-\sigma)(25-\sigma)(13-\sigma) - 3\sqrt{3}\left(3\sqrt{3}(25-\sigma)\right) = 0$$

$$(25-\sigma)\left(\sigma^2 - 20\sigma + 64\right) = 0$$

Equation du 3ème degré dont les solutions seront:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 4\ daN/mm^2 \\ \sigma_2 &= 16\ daN/mm^2 \\ \sigma_3 &= 25\ daN/mm^2 \end{aligned}$$

Qui représentent les contraintes principales

Solution

Pour calculer les directions principales, on revient au système initial :

$$\begin{aligned} l.(\sigma_x-\sigma)+m.\tau_{xy}+n.\tau_{xz}&=0\\ l.\tau_{xy}+m.(\sigma_y-\sigma)+n.\tau_{yz}&=0\\ l.\tau_{xz}+m.\tau_{yz}+n.(\sigma_z-\sigma)&=0 \end{aligned} \qquad (3.36) \qquad ([\sigma]-\sigma.[I]).\begin{pmatrix} l\\ m\\ n \end{pmatrix}=0$$

Et on calcule les valeurs de (l, m et n) pour chaque valeur de la contrainte principale trouvée.

Cas 1: $\sigma=\sigma_1=4$

$$\begin{cases} (7-4)l-3\sqrt{3}n=0\\ (25-4)m=0\\ -3\sqrt{3}l+(13-4)n=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l=\sqrt{3}n\\ m=0\\ l^2+m^2+n^2=1=3n^2+n^2=1 \end{cases}$$

Avec $l^2+m^2+n^2=1$

D'où $$\begin{cases} 4n^2=1. \quad d'où.\ n=\pm\frac{1}{2}\\ m=0\\ l=\sqrt{3}n=\pm\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Donc: $l_1=\pm\frac{\sqrt{3}}{2};\ m_1=0 \quad et \quad n_1=\pm\frac{1}{2}$

C'est dans le plan « x-z » faisant 30° avec l'axe des « x » et 60° avec l'axe des « z ».

Solution

Cas 2: $\sigma = \sigma_2 = 16$

$$\begin{cases} (7-16)l - 3\sqrt{3}n = 0 \\ (25-16)m = 0 \\ -3\sqrt{3}l + (13-16)n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = -\sqrt{3}l \\ m = 0 \\ l^2 + m^2 + n^2 = 1 = l^2 + 3l^2 = 1 \end{cases}$$

Avec $$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

D'où $$\begin{cases} 4l^2 = 1. \quad d'\text{où}.\ l = \pm\frac{1}{2} \\ m = 0 \\ n = -\sqrt{3}l = \mp\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Donc: $l_2 = \pm\frac{1}{2};\ m_2 = 0 \quad et \quad n_2 = \mp\frac{\sqrt{3}}{2}$

C'est dans le plan « x-z » faisant 60° avec l'axe des « x » et -30° avec l'axe des « z ».

Solution

Cas 3: $\sigma = \sigma_3 = 25$

$$\begin{cases} (7-25)l - 3\sqrt{3}n = 0 \\ (25-25)m = 0 \\ -3\sqrt{3}l + (13-25)n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-18)l - 3\sqrt{3}n = 0 \\ 0.m = 0 \\ -3\sqrt{3}l - (12)n = 0 \end{cases}$$

Avec $l^2 + m^2 + n^2 = 1$

La 1ère et 3ème équations sont fonction uniquement de « l » et « n ». La résolution passe par la vérification de leur déterminant.

Soit det = (-18)(-12) – $(-3\sqrt{3})(-3\sqrt{3})$ = 216-27=189 ≠ 0

D'où la solution unique pour ce mini système est :

l=0 et n=0

Pour « m », la 2ème équation donne une infinité de solutions. Mais on a $l^2 + m^2 + n^2 = 1$.

D'où $m^2 = 1$ qui nous donne $m = \pm 1$

Ainsi $\boxed{l_3 = 0;\ m_3 = \pm 1 \quad et \quad n_3 = 0}$

Ça correspond à l'axe des « y »

Solution

En conclusion

On a les 03 contraintes principales avec leurs directions principales

$$\sigma_1 = 4.\ daN/mm^2;\quad \sigma_2 = 16\ daN/mm^2;\quad \sigma_3 = 25\ daN/mm^2$$

$$l_1 = \pm\frac{\sqrt{3}}{2};\ m_1 = 0\quad et\quad n_1 = \pm\frac{1}{2}$$

$$l_2 = \pm\frac{1}{2};\ m_2 = 0\quad et\quad n_2 = \mp\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$l_3 = 0;\ m_3 = \pm 1\quad et\quad n_3 = 0$$

On peut facilement vérifier l'orthogonalité des vecteurs

$$\overrightarrow{V_1} = \overrightarrow{V_2}\ \Lambda\ \overrightarrow{V_3}$$

$$\overrightarrow{V_2}\ \Lambda\ \overrightarrow{V_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \pm\frac{1}{2} & 0 & \mp\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \pm 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \vec{j}(0) + \vec{k}\left(\pm\frac{1}{2}\right) = \overrightarrow{V_1}$$

Solution

En conclusion

$$l_1 = \pm\frac{\sqrt{3}}{2};\ m_1 = 0 \quad et \quad n_1 = \pm\frac{1}{2}$$

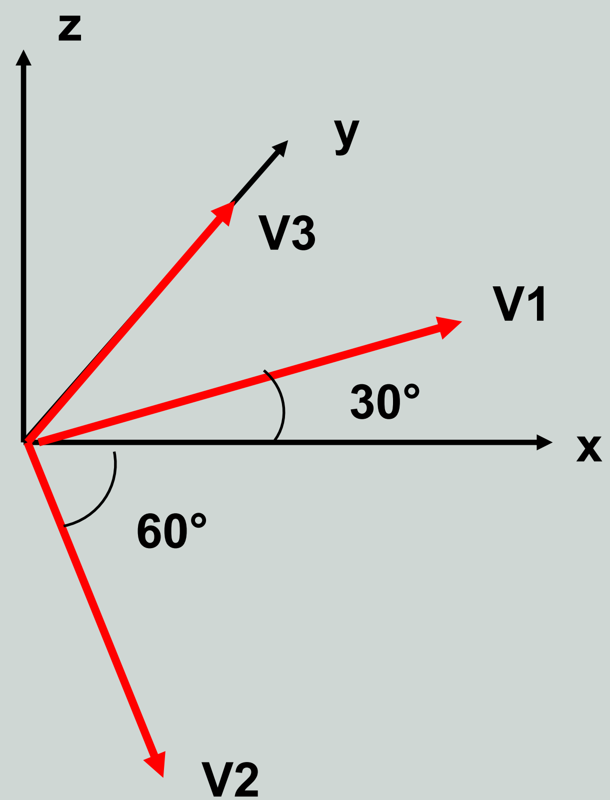
$$l_2 = \pm\frac{1}{2};\ m_2 = 0 \quad et \quad n_2 = \mp\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$l_3 = 0;\ m_3 = \pm 1 \quad et \quad n_3 = 0$$

Représentation dans les plans « x,z » ou « V1,V2 »

L'axe « y » est perpendiculaire au plan

L'axe « V3 » est perpendiculaire au plan « V1,V2 »



Solution

Remarque

En regardant le tenseur initial

$$[\sigma]_M = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -3\sqrt{3} \\ 0 & 25 & 0 \\ -3\sqrt{3} & 0 & 13 \end{pmatrix} (daN/mm^2$$

On remarque qu'au niveau de la 2ème et 2ème colonne, les contraintes tangentielles sont nulles.

D'où la contrainte normale correspondante est principale.

Soit : $\sigma = \sigma_3 = 25$

Et le position correspond au 2ème axe qui est l'axe des « y » est un axe principal

Solution

Tenseurs Sphérique et Déviatorique

Chaque tenseur peut être décomposé en partie sphérique et deviatorique.

Soit:

$$[\sigma] = [\sigma_s] + [\sigma_d]$$

Avec:

$$[\sigma_s] = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} \qquad \sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$$

et

$$[\sigma_d] = [\sigma] - [\sigma_s] = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_m \end{bmatrix}$$

Solution

Tenseurs Sphérique et Déviatorique

Dans notre exemple

$$[\sigma]_M = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -3\sqrt{3} \\ 0 & 25 & 0 \\ -3\sqrt{3} & 0 & 13 \end{pmatrix} \quad (daN/mm^2$$

$$\boxed{[\sigma] = [\sigma_s] + [\sigma_d]}$$

Avec:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{I_1}{3} = 15$$

et

$$[\sigma_d] = [\sigma] - [\sigma_s] = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_m \end{bmatrix}$$

D'où

$$[\sigma_d] = \begin{bmatrix} 7-15 & 0 & -3\sqrt{3} \\ 0 & 25-15 & 0 \\ -3\sqrt{3} & 0 & 13-15 \end{bmatrix}$$

Solution

Tenseurs Sphérique et Déviatorique

Ainsi

$$[\sigma]_M = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -3\sqrt{3} \\ 0 & 25 & 0 \\ -3\sqrt{3} & 0 & 13 \end{pmatrix} \quad (daN/mm^2$$

$$[\sigma] = [\sigma_s] + [\sigma_d]$$

Tenseur sphérique

$$[\sigma_s] = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

Tenseur Déviatorique

$$[\sigma_d] = \begin{bmatrix} -8 & 0 & -3\sqrt{3} \\ 0 & 10 & 0 \\ -3\sqrt{3} & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Contraintes et directions principales du tenseur déviatorique

$$[\sigma_d] = \begin{bmatrix} -8 & 0 & -3\sqrt{3} \\ 0 & 10 & 0 \\ -3\sqrt{3} & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

i) Contraintes principales

$$([\sigma] - \sigma.[I]).\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = 0$$

$$det = \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

Solutions existent que si le déterminant est nul

$$\det([\sigma] - \sigma.[I]) = 0$$

Soit:

$$\begin{vmatrix} -8-\sigma & 0 & -3\sqrt{3} \\ 0 & 10-\sigma & 0 \\ -3\sqrt{3} & 0 & -2-\sigma \end{vmatrix} = 0$$

Contraintes et directions principales du tenseur déviatorique

i) Contraintes principales

$$\begin{vmatrix} -8-\sigma & 0 & -3\sqrt{3} \\ 0 & 10-\sigma & 0 \\ -3\sqrt{3} & 0 & -2-\sigma \end{vmatrix} = 0$$

Soit:

$$(-8-\sigma)[(10-\sigma)(-2-\sigma)] - 3\sqrt{3}\left(3\sqrt{3}\right)(10-\sigma) = 0$$

$$(10-\sigma)[(8-\sigma)(2+\sigma) - 27] = (10-\sigma)\left[\sigma^2 + 10\sigma - 11\right] = 0$$

Après résolution, on aura

$$\sigma_{d1} = -11 \quad ;\sigma_{d2} = +1 \quad ;\sigma_{d3} = +10$$

ii) Directions principales

Cas 1: $\sigma_d = \sigma_{d1} = -11$

$$\begin{bmatrix} -8-\sigma_d & 0 & -3\sqrt{3} \\ 0 & 10-\sigma_d & 0 \\ -3\sqrt{3} & 0 & -2-\sigma_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} = 0$$

Contraintes et directions principales du tenseur déviatorique

Cas 1: $\sigma_d = \sigma_{d1} = -11$

$$\begin{bmatrix} -8-\sigma_d & 0 & -3\sqrt{3} \\ 0 & 10-\sigma_d & 0 \\ -3\sqrt{3} & 0 & -2-\sigma_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} = 0 \qquad \begin{bmatrix} -8-(-11) & 0 & -3\sqrt{3} \\ 0 & 10-(-11) & 0 \\ -3\sqrt{3} & 0 & -2-(-11) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -3\sqrt{3} \\ 0 & 21 & 0 \\ -3\sqrt{3} & 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} = 0 \qquad \begin{cases} 3l_1 - 3\sqrt{3}n_1 = 0 \\ 21m_1 = 0 \\ -3\sqrt{3}l_1 + 9n_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \qquad \{m_1 = 0$$

Reste les 02 autres équations à 02 inconnues : l_1 et n_1

Commencer à vérifier le déterminant qui est égale à zéro.

Donc de la 1ère ou bien la 3ème on peut tirer: $l_1 = \sqrt{3}n_1$

Or $\quad l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad$ D'où $\quad 3n_1^2 + n_1^2 = 1$

D'où $\quad n_1 = \pm\dfrac{1}{2} \quad$ et $\quad l_1 = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$l_1 = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad m_1 = 0 \quad ; \quad n_1 = \pm\frac{1}{2}$$

Contraintes et directions principales du tenseur déviatorique

Cas 2: $\sigma_d = \sigma_{d1} = +1$

$$\begin{bmatrix} -8-\sigma_d & 0 & -3\sqrt{3} \\ 0 & 10-\sigma_d & 0 \\ -3\sqrt{3} & 0 & -2-\sigma_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} = 0 \qquad \begin{bmatrix} -8-(1) & 0 & -3\sqrt{3} \\ 0 & 10-(1) & 0 \\ -3\sqrt{3} & 0 & -2-(1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -9 & 0 & -3\sqrt{3} \\ 0 & 9 & 0 \\ -3\sqrt{3} & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} = 0 \qquad \begin{cases} -9l_2 - 3\sqrt{3}n_2 = 0 \\ 9m_2 = 0 \\ -3\sqrt{3}l_2 - 3n_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \qquad \{m_2 = 0$$

Reste les 02 autres équations à 02 inconnues : l_2 et n_2

Commencer à vérifier le déterminant qui est égale à zéro.

Donc de la 1ère ou bien la 3ème on peut tirer: $n_2 = -\sqrt{3}l_2$

Or $\quad l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad$ D'où $\quad l_2^2 + 3l_2^2 = 1$

D'où $\quad l_2 = \pm\dfrac{1}{2} \quad$ et $\quad n_2 = \mp\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$l_2 = \pm\frac{1}{2} \quad ; \quad m_2 = 0 \quad ; \quad n_2 = \mp\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Contraintes et directions principales du tenseur déviatorique

Cas 3: $\sigma_d = \sigma_{d3} = +10$

$$\begin{bmatrix} -8-\sigma_d & 0 & -3\sqrt{3} \\ 0 & 10-\sigma_d & 0 \\ -3\sqrt{3} & 0 & -2-\sigma_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} = 0 \qquad \begin{bmatrix} -8-(10) & 0 & -3\sqrt{3} \\ 0 & 10-(10) & 0 \\ -3\sqrt{3} & 0 & -2-(10) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -18 & 0 & -3\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ -3\sqrt{3} & 0 & -12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} = 0 \qquad \begin{cases} -18l_3 - 3\sqrt{3}n_3 = 0 \\ 0m_3 = 0 \\ -3\sqrt{3}l_3 - 12n_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\{m_2.$ infinité de solu

Reste les 02 autres équations à 02 inconnues : l_3 et n_3

Commencer à vérifier le déterminant qui est différent de zéro.

Donc solution unique. $l_3 = n_3 = 0$

Or $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ D'où $m_3^2 = 1$

D'où $m_3 = \pm 1$

$$l_3 = 0 \quad ; \quad m_3 = \pm 1; \quad n_3 = 0$$

Comparaison tenseur initial et tenseur déviatorique

i) Contraintes principales

Tenseur initial

$$\sigma_1 = +4 \quad ; \sigma_2 = +16 \quad ; \sigma_3 = +25$$

Tenseur Déviatorique

$$\sigma_{d1} = -11 \quad ; \sigma_{d2} = +1 \quad ; \sigma_{d3} = +10$$

La différence entre les 02 est la valeur « 15 » qui représente la contrainte moyenne $\sigma_{moy} = 15$

ii) Directions principales

Tenseur initial

$$l_1 = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \; ; \; m_1 = 0 \; ; \; n_1 = \pm\frac{1}{2}$$

$$l_2 = \pm\frac{1}{2} \; ; \; m_2 = 0 \; ; \; n_2 = \mp\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$l_3 = 0 \; ; \; m_3 = \pm 1 ; \; n_3 = 0$$

Tenseur Déviatorique

$$l_1 = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \; ; \; m_1 = 0 \; ; \; n_1 = \pm\frac{1}{2}$$

$$l_2 = \pm\frac{1}{2} \; ; \; m_2 = 0 \; ; \; n_2 = \mp\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$l_3 = 0 \; ; \; m_3 = \pm 1 ; \; n_3 = 0$$

On remarque que ce sont les mêmes directions principales

Merci. Fin de l’Application 0