



# Chapitre 5

## Eléments Finis poutres de Bernoulli-Euler

# Plan

- Formulation des caractéristiques élémentaires
- Matrice de rigidité
- Assemblage et résolution
- Réactions d'appuis
- Efforts internes
- Poutre en flexion avec chargement
- Autres éléments linéaires
- Éléments de Torsion
- Éléments poutre-barre
- Matrice de transformation
- Prise en compte du cisaillement dans la poutre
- Éléments de poutre général (Éléments à 12 DDL)
- Algorithme pour déterminer la matrice de rigidité
- Exemple

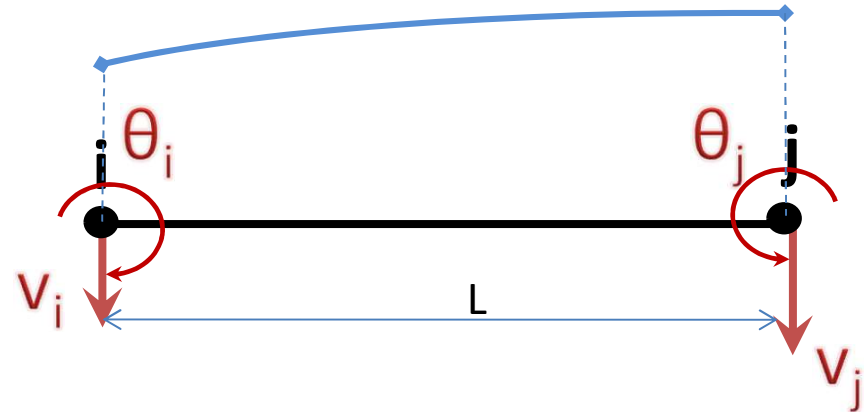
# I. Formulation des caractéristiques élémentaires

## Barre soumise à la flexion

Chaque nœud possède 2 ddl :  
une translation «  $V$  » et une rotation «  $\theta$  »

Ce qui donne un vecteur déplacement  $\{u\}$  de (4x1)

$$\{U_k\} = \begin{Bmatrix} V_i \\ \theta_i \\ V_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}$$



La variation entre les deux nœuds (origine et extrémité) n'est pas linéaire, elle est de la forme :  $v(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3$

$$v(x) = \sum_{k=1}^4 N_k(x) U_k$$

Les fonctions de forme  $N_k(x)$  sont déterminées à partir des conditions aux nœuds, à savoir :

$$\begin{aligned} \text{Au nœud origine : } v(0) = v_i ; \theta(0) = \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=0} = \theta_i & \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \alpha_1 = v_i \\ \alpha_2 = \theta_i \\ \alpha_3 = -\frac{(2\theta_i + \theta_j)}{L} - \frac{3(v_i - v_j)}{L^2} \\ \alpha_4 = -\frac{(\theta_i + \theta_j)}{L^2} + \frac{2(v_i - v_j)}{L^3} \end{cases} \\ \text{Au nœud extrémité : } v(L) = v_j ; \theta(L) = \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=L} = \theta_j & \end{aligned}$$

# I. Formulation des caractéristiques élémentaires...

$$v(x) = \sum_{k=1}^4 N_k(x) U_k$$

$$\begin{cases} N_1(x) = (2x^3 - 3Lx^2 + L^3)/L^3 \\ N_2(x) = (x^3 - 2Lx^2 + L^2x)/L^2 \\ N_3(x) = -(2x^3 - 3Lx^2)/L^3 \\ N_4(x) = (x^3 - Lx^2)/L^2 \end{cases}$$

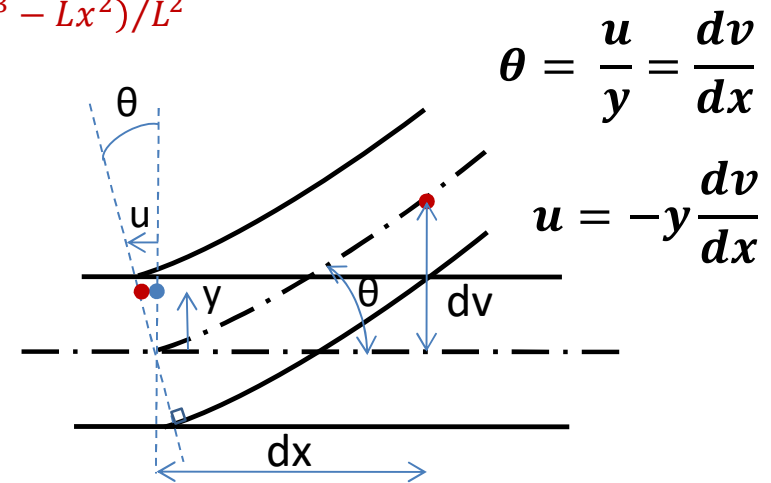
$$[B] \cdot \{u_k\} = \{\varepsilon\}$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du(x)}{dx} \Rightarrow \varepsilon_{xx} = -y \frac{d^2 v(x)}{dx^2}$$

$$\varepsilon_{xx} = -y \frac{d^2}{dx^2} [N_1(x) \quad N_2(x) \quad N_3(x) \quad N_4(x)] \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

$$[B] = -y \left[ \frac{d^2 N_1(x)}{dx^2} \quad \frac{d^2 N_2(x)}{dx^2} \quad \frac{d^2 N_3(x)}{dx^2} \quad \frac{d^2 N_4(x)}{dx^2} \right] \Rightarrow [B] = -y [M]$$

$$[M] = \begin{bmatrix} \frac{12x - 6l}{l^3} & \frac{6x - 4l}{l^2} & \frac{-12x + 6l}{l^3} & \frac{6x - 2l}{l^2} \end{bmatrix}$$



$$[B]^T = -y [M]^T$$

## II. Matrice de rigidité

$$[K] = \iiint_V [B]^T [D] [B] dV$$

$$[K] = \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_0^l (-y) [M]^T E (-y) [M] dx dy dz \iff [K] = E \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} y^2 dy dz \int_0^l [M]^T [M] dx$$

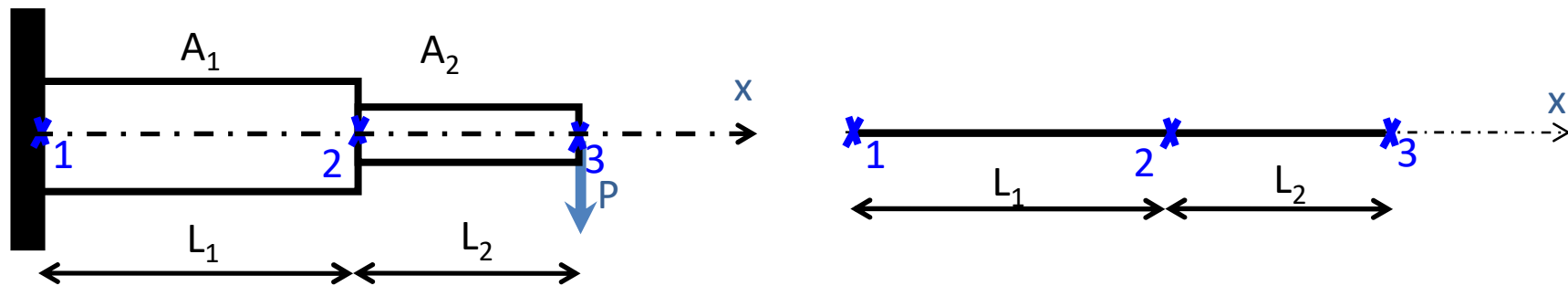
$$[K] = \frac{EI_{zz}}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

Matrice de rigidité d'un élément soumis à la flexion

Etant donné que chaque élément possède 4 ddl (2 pour chaque nœud), alors la matrice de rigidité  $[K]$  est de  $(4 \times 4)$ .

## II. Matrice de rigidité...

Pour la poutre ci-dessous, nous allons exprimer les différentes matrices de rigidité pour une sollicitation en flexion. On donne le même module de Young « E » et deux sections différentes « A<sub>1</sub> et A<sub>2</sub> »



i/ Matrices locales

$$[k]_I = \frac{EI_{zz1}}{l_1^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_1 & -12 & 6l_1 \\ 6l_1 & 4l_1^2 & -6l_1 & 2l_1^2 \\ -12 & -6l_1 & 12 & -6l_1 \\ 6l_1 & 2l_1^2 & -6l_1 & 4l_1^2 \end{bmatrix}$$

$$[k]_{II} = \frac{EI_{zz2}}{l_2^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_2 & -12 & 6l_2 \\ 6l_2 & 4l_2^2 & -6l_2 & 2l_2^2 \\ -12 & -6l_2 & 12 & -6l_2 \\ 6l_2 & 2l_2^2 & -6l_2 & 4l_2^2 \end{bmatrix}$$

## II. Matrice de rigidité...

### ii/ Matrices globales élémentaires

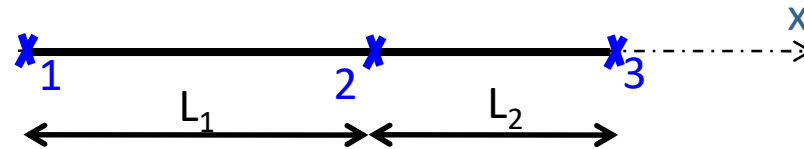
Nous avons 2ddl par nœud et notre poutre possède 3 nœuds, ce qui donne une taille de la matrice élémentaire de (6x6)

$$[k_e]_I = \begin{bmatrix}
 \frac{12EI_{zz1}}{l_1^3} & \frac{6EI_{zz1}}{l_1^2} & -\frac{12EI_{zz1}}{l_1^3} & \frac{6EI_{zz1}}{l_1^2} & 0 & 0 \\
 \frac{6EI_{zz1}}{l_1^2} & \frac{4EI_{zz1}}{l_1} & -\frac{6EI_{zz1}}{l_1^2} & \frac{2EI_{zz1}}{l_1} & 0 & 0 \\
 -\frac{12EI_{zz1}}{l_1^3} & \frac{6EI_{zz1}}{l_1^2} & \frac{12EI_{zz1}}{l_1^3} & -\frac{6EI_{zz1}}{l_1^2} & 0 & 0 \\
 \frac{6EI_{zz1}}{l_1^2} & \frac{2EI_{zz1}}{l_1} & -\frac{6EI_{zz1}}{l_1^2} & \frac{4EI_{zz1}}{l_1} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{matrix}
 v_1 \\ \vartheta_1 \\ v_2 \\ \vartheta_2 \\ v_3 \\ \vartheta_3
 \end{matrix}$$

$$[k_e]_{II} = \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \frac{12EI_{zz2}}{l_2^3} & \frac{6EI_{zz2}}{l_2^2} & -\frac{12EI_{zz2}}{l_2^3} & \frac{6EI_{zz2}}{l_2^2} \\
 0 & 0 & \frac{6EI_{zz2}}{l_2^2} & \frac{4EI_{zz2}}{l_2} & -\frac{6EI_{zz2}}{l_2^2} & \frac{2EI_{zz2}}{l_2} \\
 0 & 0 & -\frac{12EI_{zz2}}{l_2^3} & \frac{6EI_{zz2}}{l_2^2} & \frac{12EI_{zz2}}{l_2^3} & -\frac{6EI_{zz2}}{l_2^2} \\
 0 & 0 & \frac{6EI_{zz2}}{l_2^2} & \frac{2EI_{zz2}}{l_2} & -\frac{6EI_{zz2}}{l_2^2} & \frac{4EI_{zz2}}{l_2}
 \end{bmatrix}
 \begin{matrix}
 v_1 \\ \vartheta_1 \\ v_2 \\ \vartheta_2 \\ v_3 \\ \vartheta_3
 \end{matrix}$$

## II. Matrice de rigidité...

iii/ Matrice globale



La matrice globale est obtenue en faisant la somme des matrices globales élémentaires  $[K]=[k_{eI}]+[k_{eII}]$ , ce qui nous donne :

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{12EI_{zz1}}{l_1^3} & \frac{6EI_{zz1}}{l_1^2} & -\frac{12EI_{zz1}}{l_1^3} & \frac{6EI_{zz1}}{l_1^2} & 0 & 0 \\ \frac{6EI_{zz1}}{l_1^2} & \frac{4EI_{zz1}}{l_1} & -\frac{6EI_{zz1}}{l_1^2} & \frac{2EI_{zz1}}{l_1} & 0 & 0 \\ -\frac{12EI_{zz1}}{l_1^3} & -\frac{6EI_{zz1}}{l_1^2} & \frac{12EI_{zz1}}{l_1^3} + \frac{12EI_{zz2}}{l_2^3} & -\frac{6EI_{zz1}}{l_1^2} + \frac{6EI_{zz2}}{l_2^2} & -\frac{12EI_{zz2}}{l_2^3} & \frac{6EI_{zz2}}{l_2^2} \\ \frac{6EI_{zz1}}{l_1^2} & \frac{2EI_{zz1}}{l_1} & -\frac{6EI_{zz1}}{l_1^2} + \frac{6EI_{zz2}}{l_2^2} & \frac{4EI_{zz1}}{l_1} + \frac{4EI_{zz2}}{l_2} & -\frac{6EI_{zz2}}{l_2^2} & \frac{2EI_{zz2}}{l_2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_{zz2}}{l_2^3} & -\frac{6EI_{zz2}}{l_2^2} & \frac{12EI_{zz2}}{l_2^3} & -\frac{6EI_{zz2}}{l_2^2} \\ 0 & 0 & \frac{6EI_{zz2}}{l_2^2} & \frac{2EI_{zz2}}{l_2} & -\frac{6EI_{zz2}}{l_2^2} & \frac{4EI_{zz2}}{l_2} \end{bmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ \vartheta_1 \\ v_2 \\ \vartheta_2 \\ v_3 \\ \vartheta_3 \end{matrix}$$



# III. Assemblage et résolution

Une fois la matrice globale  $[K]$  est obtenue ce qu'on appelle l'assemblage; on pourra faire la résolution  $[K]\{U\}=\{F\}$

Le vecteur déplacement étant :  $\begin{Bmatrix} V_i \\ \theta_i \\ V_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}$  et le vecteur Forces :  $\begin{Bmatrix} F_i \\ M_i \\ F_j \\ M_j \end{Bmatrix}$

Où :

$F_i, F_j$  représentent les forces verticales aux nœuds origine et extrémité de l'élément causant respectivement les déplacements  $V_i$  et  $V_j$ .

$M_i, M_j$  représentent les moments aux nœuds origine et extrémité de l'élément causant respectivement les rotations  $\theta_i$  et  $\theta_j$ .

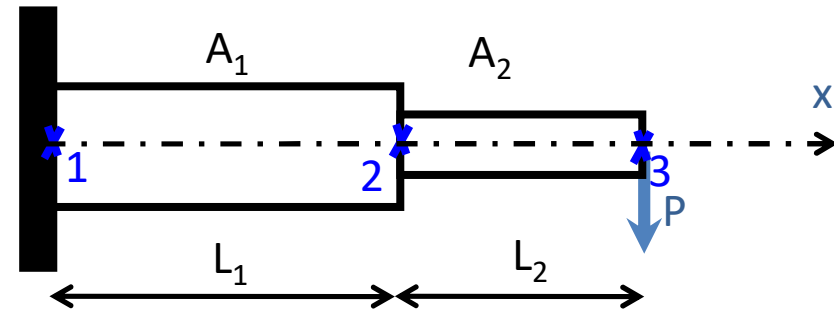
Pour notre exemple, les vecteurs déplacement et forces s'écrivent ainsi :

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \\ V_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \\ F_3 \\ M_3 \end{Bmatrix}$$

# III. Assemblage et résolution...

Avant de faire la résolution nous devons introduire les conditions aux limites :

Nous avons un encastrement au nœud 1 ce qui implique que les 2 ddl correspondants sont nuls, à savoir :  
 $V_1 = \theta_1 = 0$



Nous allons donc éliminer les premières et les secondes lignes et colonnes du système  $[K]\{U\}=\{F\}$ .

Ce qui nous donne :

$$\begin{bmatrix} \frac{12EI_{zz1}}{l_1^3} + \frac{12EI_{zz2}}{l_2^3} & -\frac{6EI_{zz1}}{l_1^2} + \frac{6EI_{zz2}}{l_2^2} & -\frac{12EI_{zz2}}{l_2^3} & \frac{6EI_{zz2}}{l_2^2} \\ -\frac{6EI_{zz1}}{l_1^2} + \frac{6EI_{zz2}}{l_2^2} & \frac{4EI_{zz1}}{l_1} + \frac{4EI_{zz2}}{l_2} & -\frac{6EI_{zz2}}{l_2^2} & \frac{2EI_{zz2}}{l_2} \\ -\frac{12EI_{zz2}}{l_2^3} & -\frac{6EI_{zz2}}{l_2^2} & \frac{12EI_{zz2}}{l_2^3} & -\frac{6EI_{zz2}}{l_2^2} \\ \frac{6EI_{zz2}}{l_2^2} & \frac{2EI_{zz2}}{l_2} & -\frac{6EI_{zz2}}{l_2^2} & \frac{4EI_{zz2}}{l_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_2 \\ \theta_2 \\ V_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

C'est un système d'équations linéaire à 4 inconnues qui peut être résolu en utilisant les méthodes de résolutions des systèmes linéaires (Gauss, Factorisation ...etc.)

# III. Assemblage et résolution...

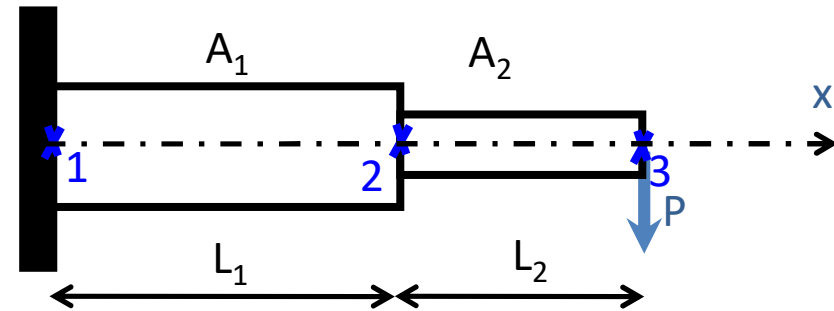
Application numérique :

On donne :  $L_1 = 2\text{m}$   $L_2 = 1\text{m}$ ;  $P = 300\text{KN}$   
 $E = 30\,000\text{ MPa}$  ;  $A_1 = (b_1 \times h_1) = (30 \times 50)\text{cm}^2$   
 $A_2 = (b_2 \times h_2) = (30 \times 30)\text{cm}^2$

Le système s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} 383\,625 & -19\,125 & -243\,000 & 121\,500 \\ -19\,125 & 268\,500 & -121\,500 & 40\,500 \\ -243\,000 & -121\,500 & 243\,000 & -121\,500 \\ 121\,500 & 40\,500 & -121\,500 & 81\,000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_2 \\ \theta_2 \\ V_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -300 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

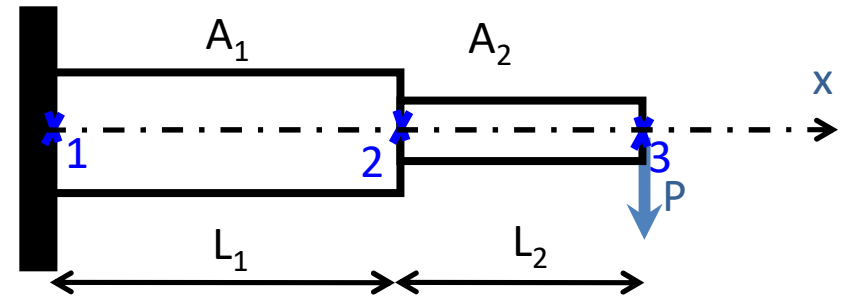
$$\begin{Bmatrix} V_2 \\ \theta_2 \\ V_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1,5\text{ cm} \\ 0,0128\text{ rad} \\ 3,26\text{ cm} \\ 0,0202\text{ rad} \end{Bmatrix}$$



# IV. Réactions d'appuis

Nous avons un encastrement au nœud 1 ( $R_1$  et  $M_1$ ) qu'on doit déterminer comme suit :

On reprend le système initial (6x6) en remplaçant les efforts par les réactions :



$$\begin{bmatrix} \frac{12EI_{zz1}}{l_1^3} & \frac{6EI_{zz1}}{l_1^2} & -\frac{12EI_{zz1}}{l_1^3} & \frac{6EI_{zz1}}{l_1^2} & 0 & 0 \\ \frac{6EI_{zz1}}{l_1^2} & \frac{4EI_{zz1}}{l_1} & -\frac{6EI_{zz1}}{l_1^2} & \frac{2EI_{zz1}}{l_1} & 0 & 0 \\ -\frac{12EI_{zz1}}{l_1^3} & -\frac{6EI_{zz1}}{l_1^2} & \frac{12EI_{zz1}}{l_1^3} + \frac{12EI_{zz2}}{l_2^3} & -\frac{6EI_{zz1}}{l_1^2} + \frac{6EI_{zz2}}{l_2^2} & -\frac{12EI_{zz2}}{l_2^3} & \frac{6EI_{zz2}}{l_2^2} \\ \frac{6EI_{zz1}}{l_1^2} & \frac{2EI_{zz1}}{l_1} & -\frac{6EI_{zz1}}{l_1^2} + \frac{6EI_{zz2}}{l_2^2} & \frac{4EI_{zz1}}{l_1} + \frac{4EI_{zz2}}{l_2} & -\frac{6EI_{zz2}}{l_2^2} & \frac{2EI_{zz2}}{l_2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_{zz2}}{l_2^3} & -\frac{6EI_{zz2}}{l_2^2} & \frac{12EI_{zz2}}{l_2^3} & -\frac{6EI_{zz2}}{l_2^2} \\ 0 & 0 & \frac{6EI_{zz2}}{l_2^2} & \frac{2EI_{zz2}}{l_2} & -\frac{6EI_{zz2}}{l_2^2} & \frac{4EI_{zz2}}{l_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \\ V_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ M_1 \\ 0 \\ 0 \\ -P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

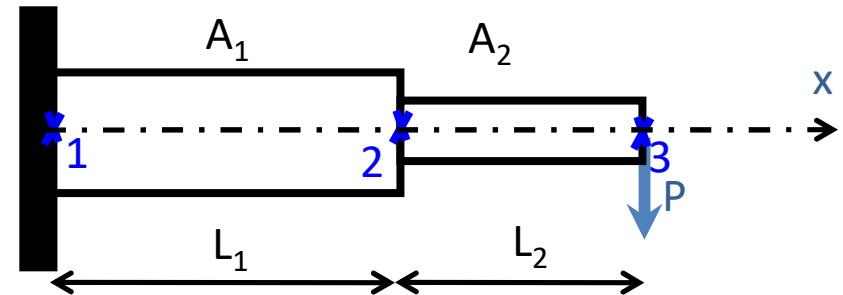
$$\begin{cases} R_1 = -\frac{12EI_{zz1}}{l_1^3} V_2 + \frac{6EI_{zz1}}{l_1^2} \theta_2 \\ M_1 = -\frac{6EI_{zz1}}{l_1^2} V_2 + \frac{2EI_{zz1}}{l_1} \theta_2 \end{cases}$$



$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ M_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -300 \text{ KN} \\ -900 \text{ KN.m} \end{Bmatrix}$$

# V. Efforts internes

Pour déterminer les efforts internes (efforts tranchants et moments fléchissant), on revient à la rigidité de chaque élément :



Élément 1-2 :

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ M_1 \\ T_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI_{zz1}}{l_1^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_1 & -12 & 6l_1 \\ 6l_1 & 4l_1^2 & -6l_1 & 2l_1^2 \\ -12 & -6l_1 & 12 & -6l_1 \\ 6l_1 & 2l_1^2 & -6l_1 & 4l_1^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 = 0 \\ \theta_1 = 0 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} T_1 \\ M_1 \\ T_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -300 \text{ KN} \\ -900 \text{ KM.m} \\ -300 \\ -300 \text{ KN.m} \end{Bmatrix}$$

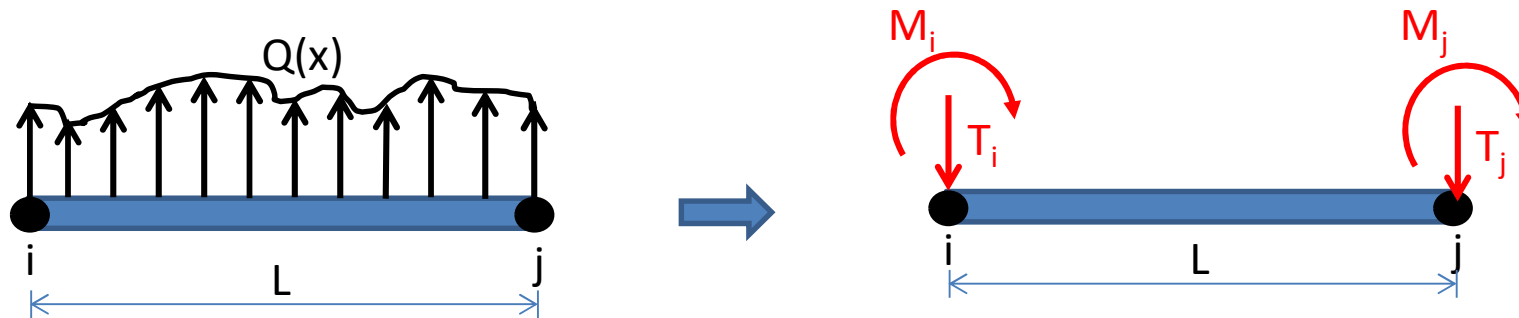
Élément 2-3 :

$$\begin{Bmatrix} T_2 \\ M_2 \\ T_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \frac{EI_{zz2}}{l_2^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_2 & -12 & 6l_2 \\ 6l_2 & 4l_2^2 & -6l_2 & 2l_2^2 \\ -12 & -6l_2 & 12 & -6l_2 \\ 6l_2 & 2l_2^2 & -6l_2 & 4l_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_2 \\ \theta_2 \\ V_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} T_2 \\ M_2 \\ T_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -300 \text{ KN} \\ -300 \text{ KM.m} \\ -300 \\ -300 \text{ KN.m} \end{Bmatrix}$$

Vecteur chargement en chaque nœud

# VI. Poutre en flexion avec chargement

Nous avons vu précédemment que le chargement est exprimé au niveau des nœuds; maintenant lorsque la poutre est chargée (charge uniformément répartie, charge triangulaire, charge quelconque...etc.); la formulation éléments finis transforme la charge en charges équivalentes et des moments aux nœuds.



$$\{F\} = \int_0^L [N_i]^T Q(x) dx$$

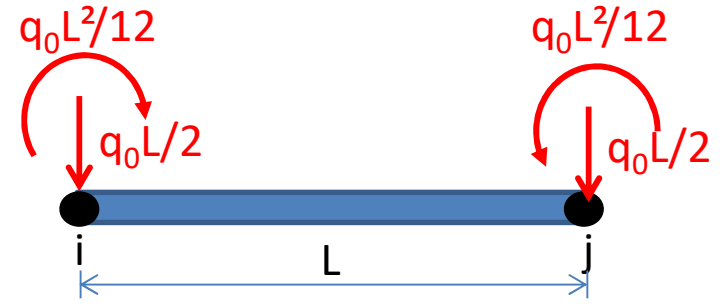
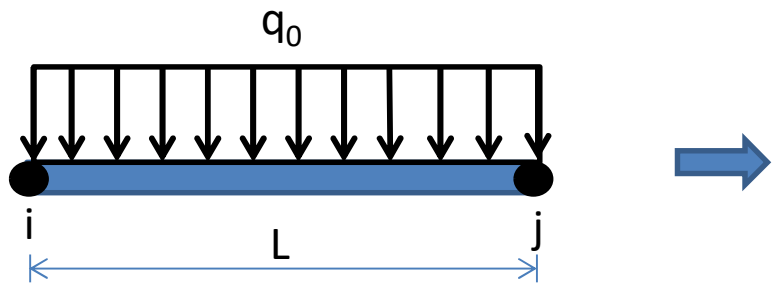
Avec

$[N_i]$  : est le vecteur des fonctions de forme

$Q(x)$  : le chargement de la poutre

# VI. Poutre en flexion avec chargement...

Exemple de la charge répartie :



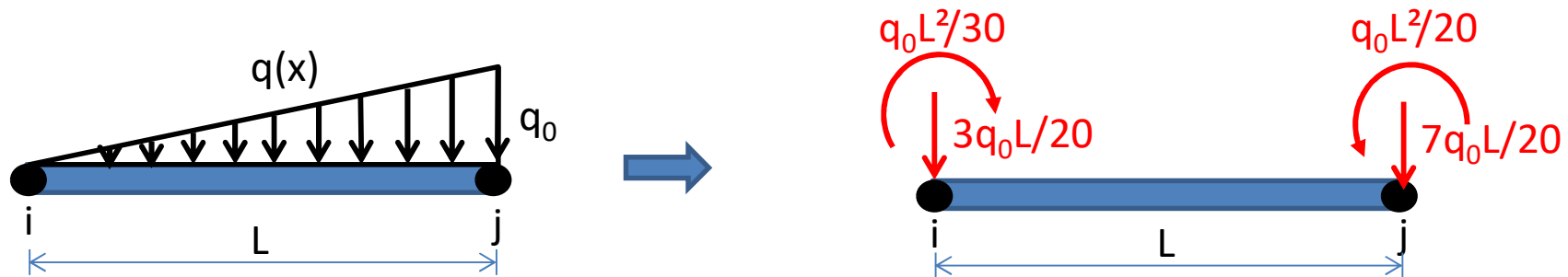
$$\begin{Bmatrix} T_i \\ M_i \\ T_j \\ M_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_0^L (2x^3 - 3Lx^2 + L^3)/L^3 (-q_0) dx \\ \int_0^L (x^3 - 2Lx^2 + L^2x)/L^2 (-q_0) dx \\ \int_0^L -(2x^3 - 3Lx^2)/L^3 (-q_0) dx \\ \int_0^L (x^3 - Lx^2)/L^2 (-q_0) dx \end{Bmatrix}$$



$$\begin{Bmatrix} T_i \\ M_i \\ T_j \\ M_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -q_0 \frac{L}{2} \\ -q_0 \frac{L^2}{12} \\ -q_0 \frac{L}{2} \\ q_0 \frac{L^2}{12} \end{Bmatrix}$$

# VI. Poutre en flexion avec chargement...

Exemple de la charge Triangulaire :



$$q(x) = q_0 \frac{x}{L}$$

$$\begin{Bmatrix} T_i \\ M_i \\ T_j \\ M_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_0^L (2x^3 - 3Lx^2 + L^3)/L^3 (-q(x)) dx \\ \int_0^L (x^3 - 2Lx^2 + L^2x)/L^2 (-q(x)) dx \\ \int_0^L -(2x^3 - 3Lx^2)/L^3 (-q(x)) dx \\ \int_0^L (x^3 - Lx^2)/L^2 (-q(x)) dx \end{Bmatrix}$$

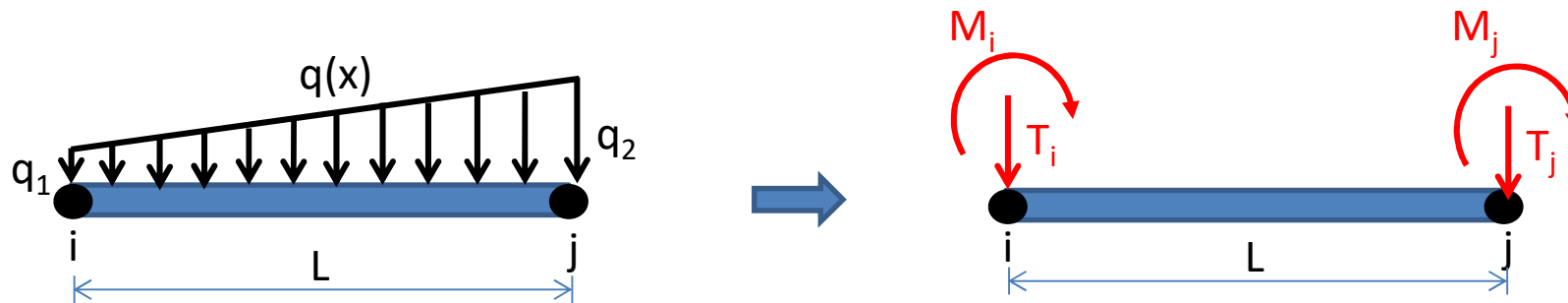
$$\begin{Bmatrix} T_i \\ M_i \\ T_j \\ M_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{3q_0L}{20} \\ -\frac{q_0L^2}{30} \\ \frac{7q_0L}{20} \\ \frac{q_0L^2}{20} \end{Bmatrix}$$



# VI. Poutre en flexion avec chargement...

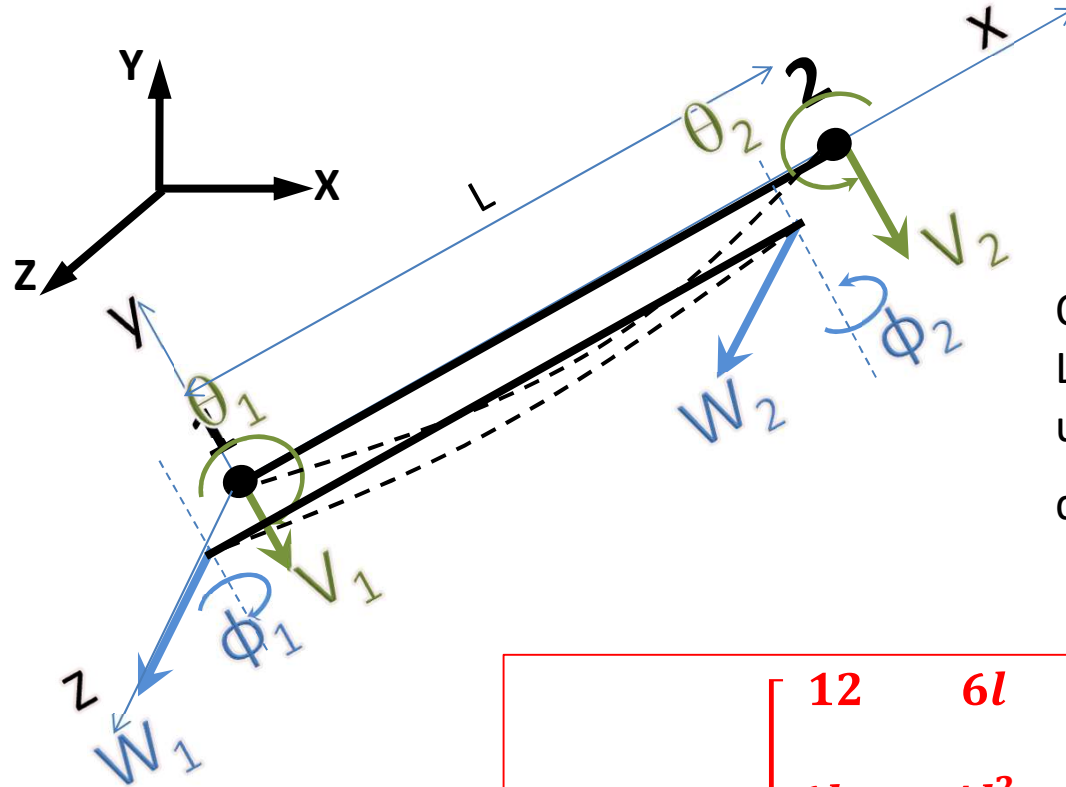
Exercice :

Ecrire les charges équivalentes aux nœuds pour une charge trapézoïdale



## VII. Autre éléments linéaire

La flexion peut être dans 2 plans (X,Y) « évoquée précédemment » :



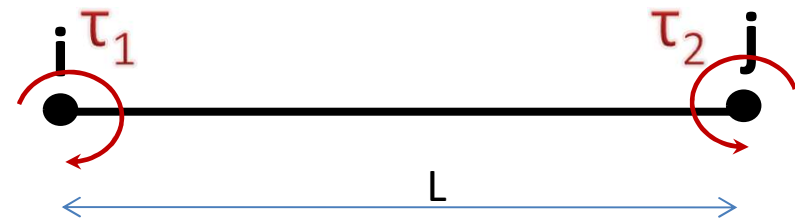
Les ddl :  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $\theta_1$  et  $\theta_2$  se sont les translations et les rotations aux nœuds 1 et 2 dans le plan (x,y)

Ou bien dans le plan (X,Z):  
La même matrice de rigidité sera utilisée en remplaçant le moment d'inertie  $I_{zz}$  par  $I_{yy}$  avec  $I_{yy} = \frac{hb^3}{12}$

$$[K] = \frac{EI_{yy}}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

# VIII. Éléments de torsion

Chaque nœud possède 1 ddl  $\begin{Bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{Bmatrix}$



La matrice de rigidité est la même que celle de la traction en remplaçant  $\frac{EA}{l}$  par  $\frac{GJ}{l}$

Ce qui donne :

$$[K] = \frac{GJ}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Avec :

G : Module de torsion

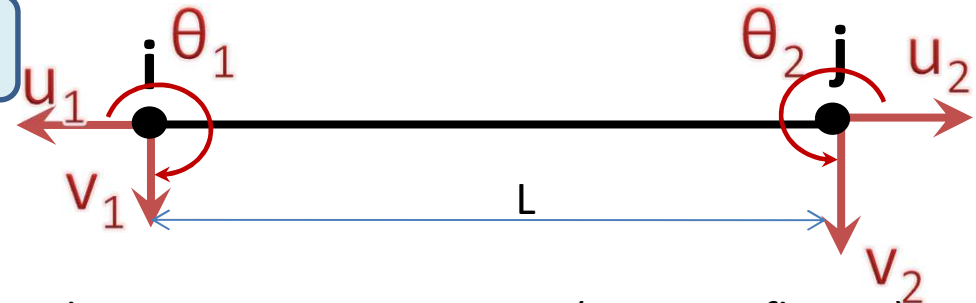
J : Moment d'inertie torsionnel

# IX. Éléments poutres-barres

Barre soumise à la traction et à la flexion

Chaque nœud possède 3 ddl

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$



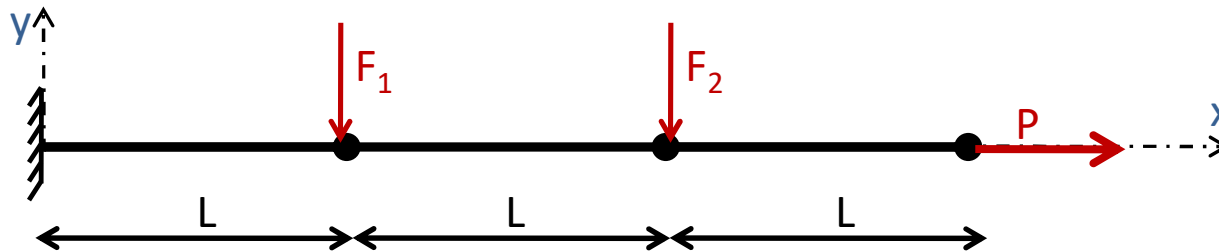
La matrice de rigidité sera la combinaison entre 2 matrices (traction+flexion)  
Ce qui donne :

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_{zz}}{l^3} & \frac{6EI_{zz}}{l^2} & 0 & -\frac{12EI_{zz}}{l^3} & \frac{6EI_{zz}}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI_{zz}}{l^2} & \frac{4EI_{zz}}{l} & 0 & -\frac{6EI_{zz}}{l^2} & \frac{2EI_{zz}}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_{zz}}{l^3} & -\frac{6EI_{zz}}{l^2} & 0 & \frac{12EI_{zz}}{l^3} & -\frac{6EI_{zz}}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI_{zz}}{l^2} & \frac{2EI_{zz}}{l} & 0 & -\frac{6EI_{zz}}{l^2} & \frac{4EI_{zz}}{l} \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{matrix}$$

# IX. Éléments poutres-barres...

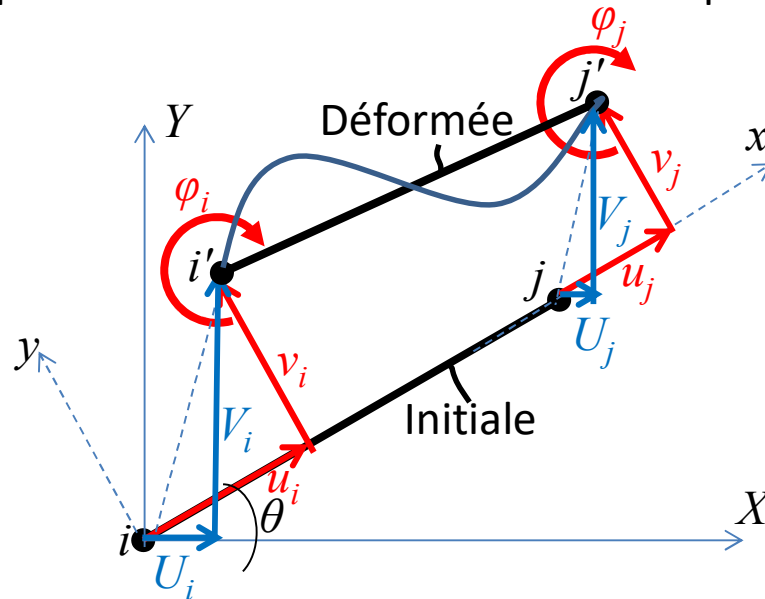
## Exercice

Ecrire la matrice de rigidité globale pour une poutre soumise à la flexion et la traction au même temps. Sachant que  $A$  est la section de la barre et «  $E$  » son module de Young.



# X. Matrice de Transformation

Généralement dans les portiques les éléments sont orientés d'une manière quelconque, nous devons nous référer alors par rapport à un seul repère « global ». On doit donc procéder à la transformation d'un repère local à un repère global :



$$\begin{cases} u_i = U_i \cos \theta + V_i \sin \theta \\ v_i = -U_i \sin \theta + V_i \cos \theta \\ \varphi_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_j = U_j \cos \theta + V_j \sin \theta \\ v_j = -U_j \sin \theta + V_j \cos \theta \\ \varphi_j \end{cases}$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \varphi_i \\ u_j \\ v_j \\ \varphi_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ \varphi_i \\ U_j \\ V_j \\ \varphi_j \end{Bmatrix}$$



$$\{u^e\} = [\lambda] \{U^e\}$$

# X. Matrice de Transformation...

Nous allons écrire maintenant la matrice de rigidité ainsi que le vecteur de forces nodales dans le repère global d'axes :

L'expression de la matrice de rigidité attachée à un élément de poutre  $[K^e]$  dans le système global d'axes aura la forme :

$$[K^e] = [\lambda]^T [k^e] [\lambda]$$

Les forces nodales seront données par l'expression :

$$\{F^e\} = [\lambda]^T \{f^e\} = [\lambda]^T [k^e] \{u^e\} = [\lambda]^T [k^e] [\lambda] \{U^e\} = [K^e] \{U^e\}$$

Avec :

$[K^e] = [\lambda]^T [k^e] [\lambda]$  : Matrice de rigidité globale

$[k^e]$  : Matrice de rigidité locale

$[\lambda]$  : Matrice de transformation

$\{F^e\}$  : Le vecteur forces nodales dans le repère global (X,Y)

$\{f^e\}$  : Le vecteur forces nodales dans le repère local (x,y)

$\{U^e\}$  : Le vecteur déplacements dans le repère global (X,Y)

$\{u^e\}$  : Le vecteur déplacements dans le repère local (x,y)

# X. Matrice de Transformation...

La matrice de rigidité de l'élément dans le repère global sera :

$$[K^e] = [\lambda]^T [K_e] [\lambda]$$

$$[K^e] = \begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ & & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ & & & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ & & & & & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

*sym*

$$\begin{bmatrix} \left(c^2 \frac{EA}{L} + s^2 \frac{12EI}{L^3}\right) & sc \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right) & -s \frac{6EI}{L^2} & -\left(c^2 \frac{EA}{L} + s^2 \frac{12EI}{L^3}\right) & -sc \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right) & -s \frac{6EI}{L^2} \\ \left(s^2 \frac{EA}{L} + c^2 \frac{12EI}{L^3}\right) & c \frac{6EI}{L^2} & -sc \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right) & -\left(s^2 \frac{EA}{L} + c^2 \frac{12EI}{L^3}\right) & c \frac{6EI}{L^2} & c \frac{6EI}{L^2} \\ & \frac{4EI}{L} & s \frac{6EI}{L^2} & -c \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ & & \left(c^2 \frac{EA}{L} + s^2 \frac{12EI}{L^3}\right) & sc \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right) & s \frac{6EI}{L^2} & s \frac{6EI}{L^2} \\ & & & \left(s^2 \frac{EA}{L} + c^2 \frac{12EI}{L^3}\right) & -c \frac{6EI}{L^2} & -c \frac{6EI}{L^2} \\ & & & & \frac{4EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

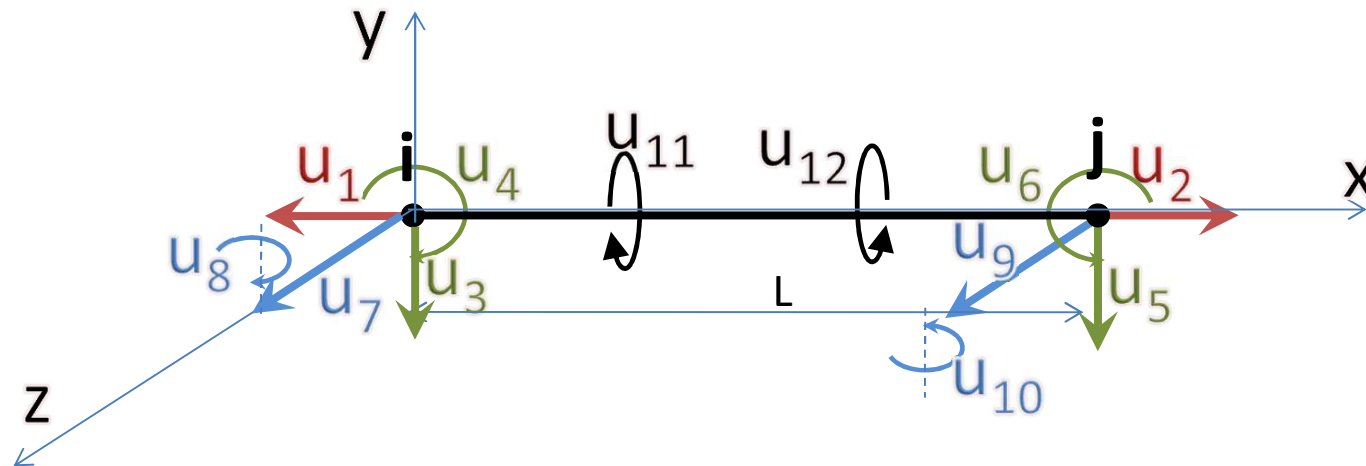
Sym



# XI. Élément de poutre général (Élément à 12 DDL)

## Matrice locale

La matrice de rigidité d'un élément soumis à tous les ddl (les 3 translations et les 3 rotations) :



$u_1$  et  $u_2$  : ddl de traction-compression

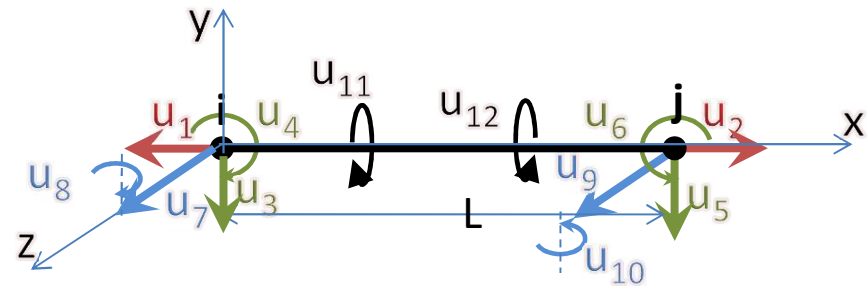
$u_3$  à  $u_6$  : ddl de flexion dans le plan  $(x,y)$

$u_7$  à  $u_{10}$  : ddl de flexion dans le plan  $(x,z)$

$u_{11}$  et  $u_{12}$  : ddl de torsion

# XI. Élément de poutre général (Élément à 12 DDL)...

Matrice locale



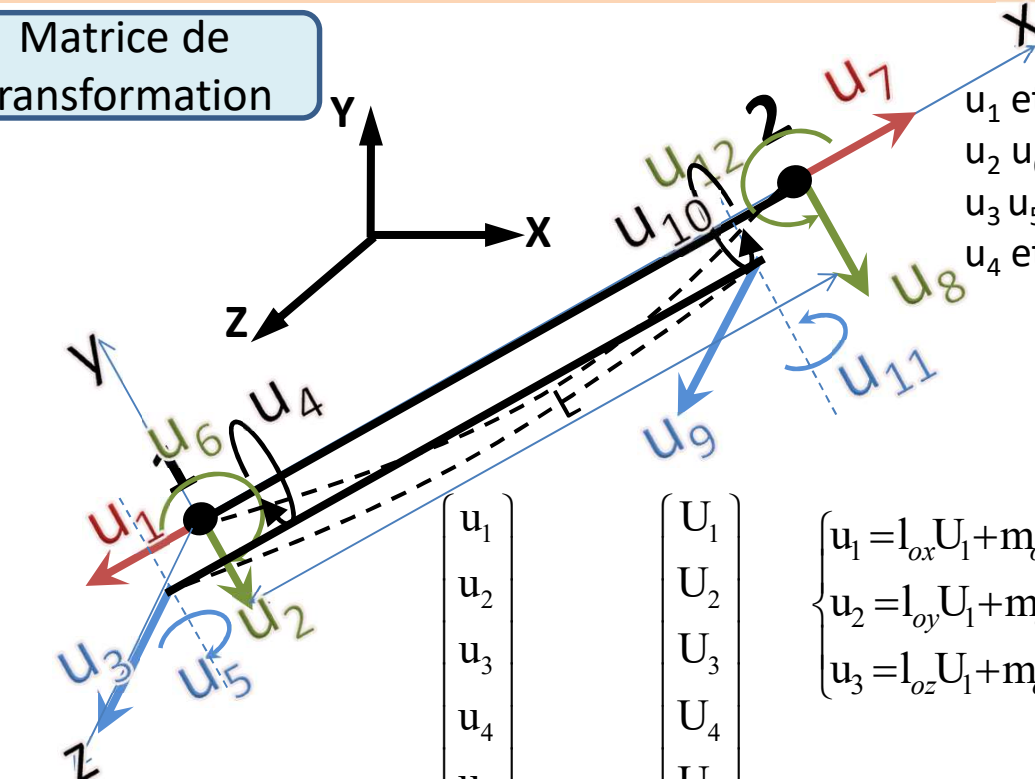
$$[k^e] = \begin{bmatrix} [Traction] & [0] & [0] & [0] & u_1, u_2 \\ [0] & [Flexion (x, y)] & [0] & [0] & u_3, u_4, u_5, u_6 \\ [0] & [0] & [Flexion (x, z)] & [0] & u_7, u_8, u_9, u_{10} \\ [0] & [0] & [0] & [torsion] & u_{11}, u_{12} \end{bmatrix}$$

$u_1, u_2$        $u_3, u_4, u_5, u_6$        $u_7, u_8, u_9, u_{10}$        $u_{11}, u_{12}$



# XI. Cas général...

Matrice de Transformation



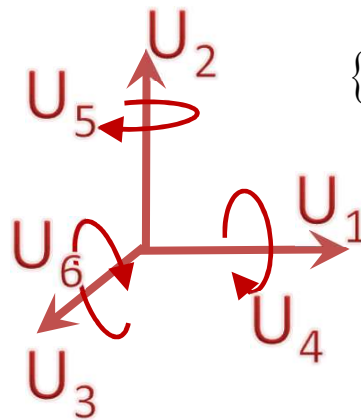
$u_1$  et  $u_7$  : ddl de traction  
 $u_2$   $u_6$  et  $u_8$   $u_{12}$  : ddl de flexion dans le plan (x,y)  
 $u_3$   $u_5$  à  $u_9$   $u_{11}$  : ddl de flexion dans le plan (x,z)  
 $u_4$  et  $u_{10}$  : ddl de torsion

## Nœud 1

$$\begin{cases} u_1 = l_{ox} U_1 + m_{ox} U_2 + n_{ox} U_3 \\ u_2 = l_{oy} U_1 + m_{oy} U_2 + n_{oy} U_3 \\ u_3 = l_{oz} U_1 + m_{oz} U_2 + n_{oz} U_3 \end{cases}
 \quad
 \begin{cases} u_4 = l_{ox} U_4 + m_{ox} U_5 + n_{ox} U_6 \\ u_5 = l_{oy} U_4 + m_{oy} U_5 + n_{oy} U_6 \\ u_6 = l_{oz} U_4 + m_{oz} U_5 + n_{oz} U_6 \end{cases}$$

## Nœud 2

$$\begin{cases} u_7 = l_{ox} U_7 + m_{ox} U_8 + n_{ox} U_9 \\ u_8 = l_{oy} U_7 + m_{oy} U_8 + n_{oy} U_9 \\ u_9 = l_{oz} U_7 + m_{oz} U_8 + n_{oz} U_9 \end{cases}
 \quad
 \begin{cases} u_{10} = l_{ox} U_{10} + m_{ox} U_{11} + n_{ox} U_{12} \\ u_{11} = l_{oy} U_{10} + m_{oy} U_{11} + n_{oy} U_{12} \\ u_{12} = l_{oz} U_{10} + m_{oz} U_{11} + n_{oz} U_{12} \end{cases}$$



$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \\ u_{10} \\ u_{11} \\ u_{12} \end{Bmatrix}
 \quad
 \{U\} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \\ U_9 \\ U_{10} \\ U_{11} \\ U_{12} \end{Bmatrix}$$

# XI. Cas général...

Matrice de Transformation

$$\begin{array}{c}
 \left( \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \\ u_{10} \\ u_{11} \\ u_{12} \end{array} \right) = \left[ \begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc}
 l_{ox} & m_{ox} & n_{ox} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 l_{oy} & m_{oy} & n_{oy} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 l_{oz} & m_{oz} & n_{oz} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & l_{ox} & m_{ox} & n_{ox} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & l_{oy} & m_{oy} & n_{oy} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & l_{oz} & m_{oz} & n_{oz} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_{ox} & m_{ox} & n_{ox} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_{oy} & m_{oy} & n_{oy} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_{oz} & m_{oz} & n_{oz} & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_{ox} & m_{ox} & n_{ox} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_{oy} & m_{oy} & n_{oy} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_{oz} & m_{oz} & n_{oz}
 \end{array} \right] \left( \begin{array}{c} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \\ U_9 \\ U_{10} \\ U_{11} \\ U_{12} \end{array} \right)
 \end{array}$$

$l_{ox}, m_{ox}, n_{ox}, l_{oy}, m_{oy}, n_{oy}, l_{oz}, m_{oz}$  et  $n_{oz}$  : Cosinus directeurs qu'on doit déterminer!

# XI. Cas général...

$l_{ox}, m_{ox}, n_{ox}, l_{oy}, m_{oy}, n_{oy}, l_{oz}, m_{oz}$  et  $n_{oz}$  : Cosinus directeurs qu'on doit déterminer!

On doit avoir au moins 2 points :

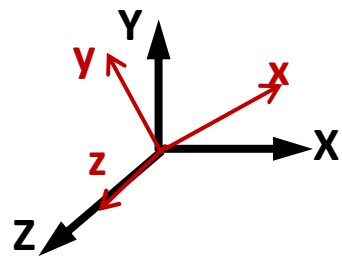
$l_{ox}, m_{ox}, n_{ox}$  : cosinus directeurs entre l'axe x avec le repère global (X, Y, Z)

$l_{oy}, m_{oy}, n_{oy}$  : cosinus directeurs entre l'axe y avec le repère global (X, Y, Z)

$l_{oz}, m_{oz}, n_{oz}$  : cosinus directeurs entre l'axe z avec le repère global (X, Y, Z)

$$\begin{cases} l_{ox} = \frac{X_j - X_i}{L^e} \\ m_{ox} = \frac{Y_j - Y_i}{L^e} \\ n_{ox} = \frac{Z_j - Z_i}{L^e} \end{cases}$$

On considère que l'axe (z) est parallèle à l'axe (Z) :  $z \perp X$  et  $z \perp Y$



$$\vec{k} = \frac{\vec{i} \wedge \vec{j}}{\|\vec{i} \wedge \vec{j}\|} \Rightarrow \vec{i} \wedge \vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{I} & \vec{J} & \vec{K} \\ l_{ox} & m_{ox} & n_{ox} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -n_{ox}\vec{I} + l_{ox}\vec{K} \Rightarrow \|\vec{i} \wedge \vec{j}\| = \sqrt{(-n_{ox})^2 + (l_{ox})^2} = d$$

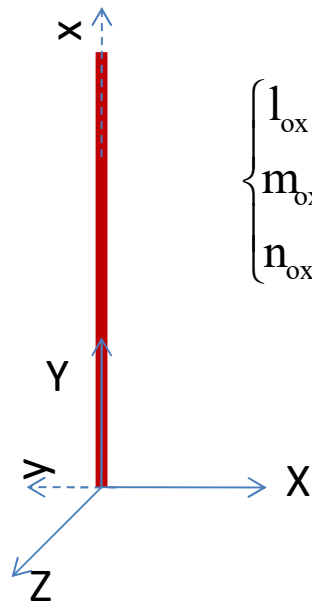
$$\vec{j} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{i}}{\|\vec{k} \wedge \vec{i}\|} \Rightarrow \vec{k} \wedge \vec{i} = \begin{vmatrix} \vec{I} & \vec{J} & \vec{K} \\ n_{ox} & 0 & l_{ox} \\ l_{ox} & m_{ox} & n_{ox} \end{vmatrix} = -\frac{m_{ox} \cdot l_{ox}}{d}\vec{I} + \frac{n_{ox}^2 + l_{ox}^2}{d}\vec{J} - \frac{m_{ox} \cdot n_{ox}}{d}\vec{K}$$

$$\Rightarrow \|\vec{k} \wedge \vec{i}\| = \frac{1}{d} \sqrt{(l_{ox} m_{ox})^2 + (l_{ox}^2 + n_{ox}^2)^2 + (m_{ox} n_{ox})^2} = 1$$

# XI. Cas général...

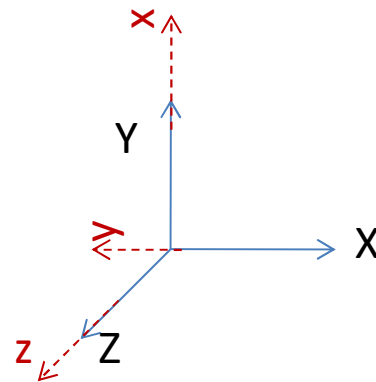
$$\begin{cases} l_{ox} = \frac{X_j - X_i}{L^e} \\ m_{ox} = \frac{Y_j - Y_i}{L^e} \\ n_{ox} = \frac{Z_j - Z_i}{L^e} \end{cases} \quad \begin{cases} l_{oy} = \frac{m_{ox} l_{ox}}{d} \\ m_{oy} = \frac{l_{ox}^2 + n_{ox}^2}{d} \\ n_{oy} = \frac{m_{ox} n_{ox}}{d} \end{cases} \quad \begin{cases} l_{oz} = \frac{n_{ox}}{d} \\ m_{oz} = 0 \\ n_{oz} = \frac{l_{ox}}{d} \end{cases} \quad \text{avec} \quad d = \sqrt{l_{ox}^2 + n_{ox}^2}$$

Cas particulier : Barre verticale



$$\begin{cases} l_{ox} = 0 \\ m_{ox} = 1 \\ n_{ox} = 0 \end{cases} \Rightarrow d = 0$$

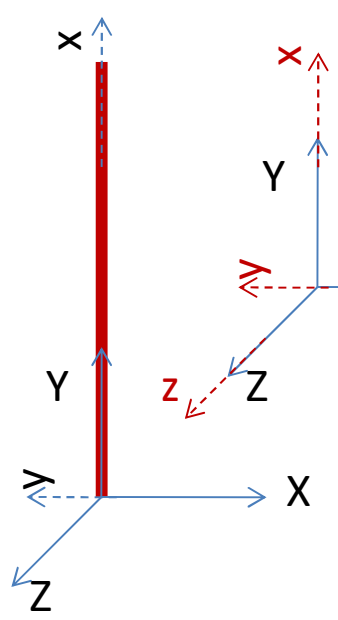
On a une division par zéro pour calculer  $l_{oz}$ ,  $m_{oz}$  et  $n_{oz}$   
 Dans ce cas là, on recalcule les vecteurs unitaires (i, j, k) :



$$\vec{k} = \frac{\vec{I} \wedge \vec{i}}{\|\vec{I} \wedge \vec{i}\|} \Rightarrow \vec{I} \wedge \vec{i} = \begin{vmatrix} \vec{I} & \vec{J} & \vec{K} \\ 1 & 0 & 0 \\ l_{ox} & m_{ox} & n_{ox} \end{vmatrix} = -n_{ox} \vec{J} + m_{ox} \vec{K}$$

$$\Rightarrow \|\vec{I} \wedge \vec{i}\| = \sqrt{(-n_{ox})^2 + (m_{ox})^2} = d_1$$

# XI. Cas général...



$$\vec{j} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{i}}{\|\vec{k} \wedge \vec{i}\|} \Rightarrow \vec{k} \wedge \vec{i} = \begin{vmatrix} \vec{I} & \vec{J} & \vec{K} \\ 0 & -\frac{n_{ox}}{d_1} & \frac{m_{ox}}{d_1} \\ l_{ox} & m_{ox} & n_{ox} \end{vmatrix} = -\left(\frac{n_{ox}^2 + m_{ox}^2}{d_1}\right) \vec{I} + \frac{l_{ox} m_{ox}}{d_1} \vec{J} + \frac{l_{ox} n_{ox}}{d_1} \vec{K}$$

$$\|\vec{k} \wedge \vec{i}\| = \frac{1}{d_1} \sqrt{(m_{ox}^2 + n_{ox}^2)^2 + (l_{ox} m_{ox})^2 + (l_{ox} n_{ox})^2} = 1$$

$$\begin{cases} l_{ox} = \frac{X_j - X_i}{L^e} \\ m_{ox} = \frac{Y_j - Y_i}{L^e} \\ n_{ox} = \frac{Z_j - Z_i}{L^e} \end{cases} \quad \begin{cases} l_{oy} = -\frac{(m_{ox}^2 + n_{ox}^2)}{d_1} \\ m_{oy} = \frac{m_{ox} l_{ox}}{d_1} \\ n_{oy} = \frac{l_{ox} n_{ox}}{d_1} \end{cases} \quad \begin{cases} l_{oz} = 0 \\ m_{oz} = \frac{n_{ox}}{d_1} \\ n_{oz} = \frac{m_{ox}}{d_1} \end{cases}$$

avec  $d_1 = \sqrt{m_{ox}^2 + n_{ox}^2}$

Enfin, la matrice de rotation  $[\lambda_r]$  est égale à :

$$\Rightarrow [\lambda_r] = \begin{bmatrix} l_{ox} & m_{ox} & n_{ox} \\ l_{oy} & m_{oy} & n_{oy} \\ l_{oz} & m_{oz} & n_{oz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



## XII. Algorithme pour déterminer la matrice de rigidité globale

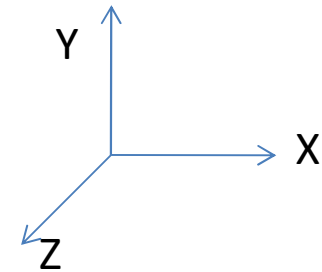
### 1. Discrétisation de la structure en éléments finis

Définir les nœuds et les éléments :

Chaque nœud est défini par ses coordonnées (X,Y,Z)

Chaque élément est défini par :

- ses connectivités (nœud origine « NO » et nœud extrémité « NE ») ;
- Sa longueur ;
- Sa section (b et h);
- Ses caractéristiques mécaniques ( module de Young « E »).



### 2. Définition des DDL :

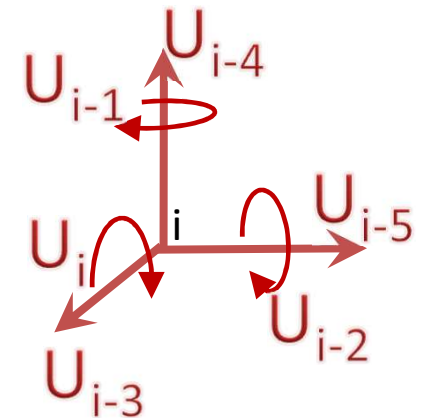
- Il faut introduire le nombre de DDL « nddl » selon les types de sollicitations de la structure ( $nddl = nddl_i \times nnœuds$ ).

Avec :  $nddl_i$  : le nombre de ddl par nœud.

- Numéroté ces DDL dans le repère global :

$$((nddl_i \times n_i) - (nddl_i - 1))$$

Avec  $n_i$  : le numéro du nœud qui varie de (1 à nnœuds)



## XII. Algorithme ...

### 3. Calcul de la matrice de rigidité locale de chaque élément :

Traction :

$$[K] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Flexion

$$[K] = \frac{EI_{zz}}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

Torsion

$$[K] = \frac{GJ}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

### 4. Calcul des cosinus directeurs et définition de la matrice de transformation :

$$\begin{cases} l_{ox} = \frac{X_j - X_i}{L^e} \\ m_{ox} = \frac{Y_j - Y_i}{L^e} \\ n_{ox} = \frac{Z_j - Z_i}{L^e} \end{cases} \quad \begin{cases} l_{oy} = -\frac{m_{ox} l_{ox}}{d} \\ m_{oy} = \frac{l_{ox}^2 + n_{ox}^2}{d} \\ n_{oy} = -\frac{m_{ox} n_{ox}}{d} \end{cases} \quad \begin{cases} l_{oz} = -\frac{n_{ox}}{d} \\ m_{oz} = 0 \\ n_{oz} = \frac{l_{ox}}{d} \end{cases}$$

$$[\lambda_r] = \begin{bmatrix} l_{ox} & m_{ox} & n_{ox} \\ l_{oy} & m_{oy} & n_{oy} \\ l_{oz} & m_{oz} & n_{oz} \end{bmatrix}$$

Dans le cas de barre verticale

$$\begin{cases} l_{ox} = \frac{X_j - X_i}{L^e} \\ m_{ox} = \frac{Y_j - Y_i}{L^e} \\ n_{ox} = \frac{Z_j - Z_i}{L^e} \end{cases} \quad \begin{cases} l_{oy} = -\frac{(m_{ox}^2 + n_{ox}^2)}{d_1} \\ m_{oy} = \frac{m_{ox} l_{ox}}{d_1} \\ n_{oy} = \frac{l_{ox} n_{ox}}{d_1} \end{cases} \quad \begin{cases} l_{oz} = 0 \\ m_{oz} = -\frac{n_{ox}}{d_1} \\ n_{oz} = \frac{m_{ox}}{d_1} \end{cases}$$

## XII. Algorithme ...

5. Calcul de la matrice de rigidité élémentaire globale (X,Y,Z) :

$$[\mathbf{K}^e] = [\boldsymbol{\lambda}]^T [\mathbf{k}] [\boldsymbol{\lambda}]$$

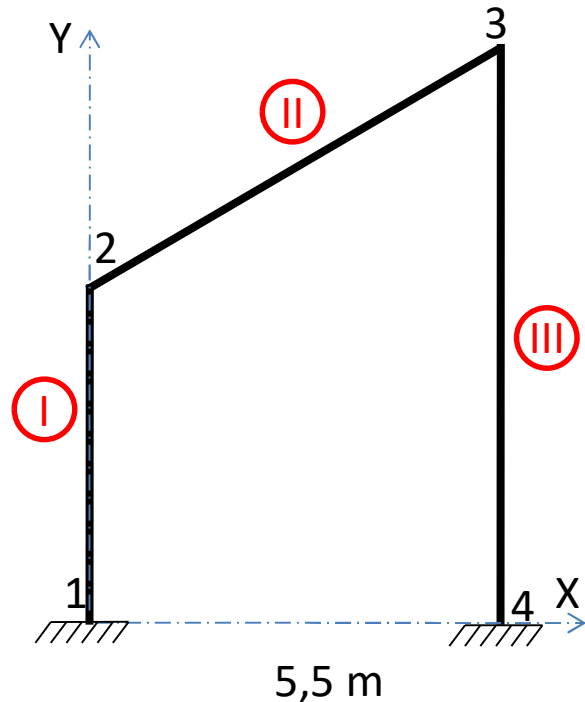
6. Faire l'assemblage pour obtenir la matrice de rigidité de la structure :

$$[\mathbf{K}] = \sum_1^{\text{nelem}} [\mathbf{K}^e]$$

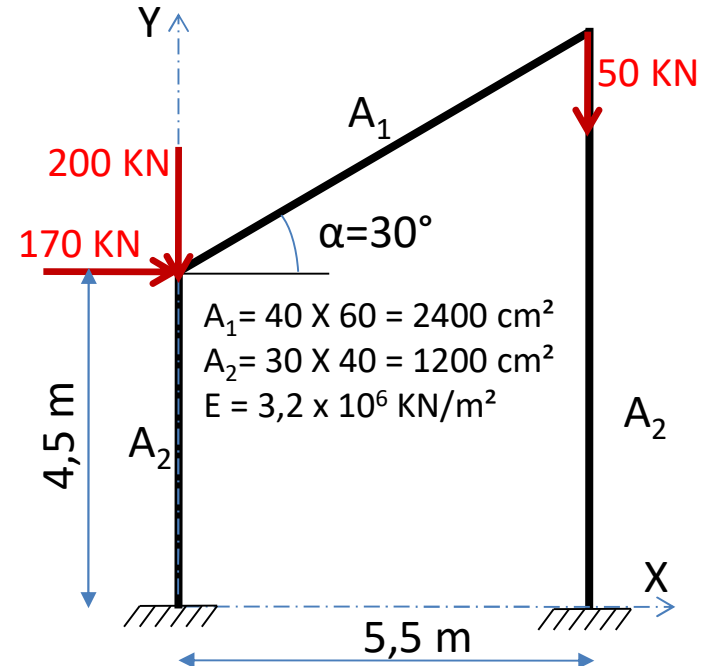
# XIII. Exemple

## Travail à faire :

1. Discrétiser la structure
2. Etablir la matrice de rigidité de chaque élément
3. Etablir la matrice de transformation
4. Ecrire la matrice de rigidité globale
5. Déterminer les ddl pour chaque nœud



N°	X (m)	Y (m)
1	0	0
2	0	4,5
3	5,5	7,675
4	5,5	0



Nœuds

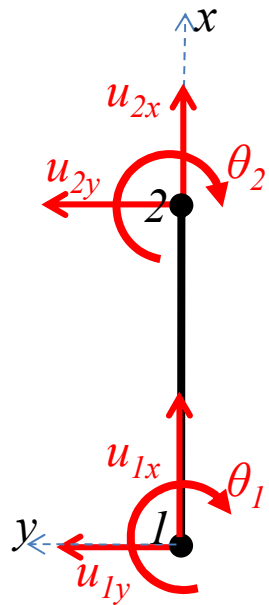
Eléments

N°	NO	NE	L (m)	E (KN/m <sup>2</sup> )	A (m <sup>2</sup> )	I <sub>zz</sub> (m <sup>4</sup> )
1	1	2	4,5	3,2 x 10 <sup>6</sup>	0,12	0,0016
2	2	3	6,35	3,2 x 10 <sup>6</sup>	0,24	0,0072
3	3	4	7,675	3,2 x 10 <sup>6</sup>	0,12	0,0016

# XIII. Exemple...

2. Calcul de la matrice de rigidité locale de chaque élément :

L'élément I

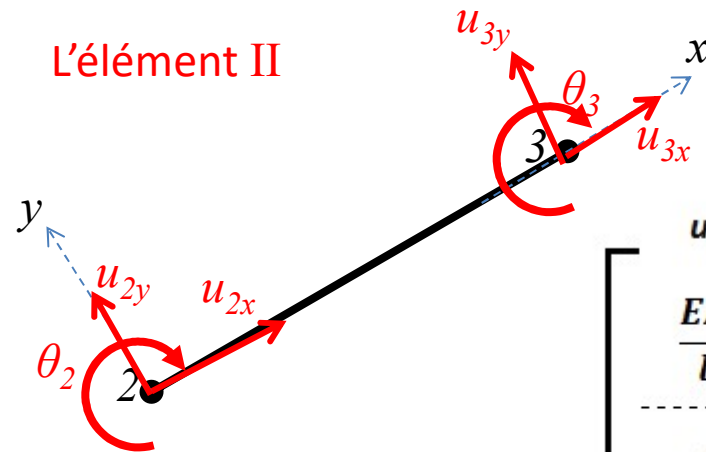


Il y a 3 ddl par nœud (traction+flexion)

$$[k_I] = \begin{bmatrix} \frac{EA_2}{l_1} & 0 & 0 & -\frac{EA_2}{l_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_{2zz}}{l_1^3} & \frac{6EI_{2zz}}{l_1^2} & 0 & -\frac{12EI_{2zz}}{l_1^3} & \frac{6EI_{2zz}}{l_1^2} \\ 0 & \frac{6EI_{2zz}}{l_1^2} & \frac{4EI_{2zz}}{l_1} & 0 & -\frac{6EI_{2zz}}{l_1^2} & \frac{2EI_{2zz}}{l_1} \\ -\frac{EA_2}{l_1} & 0 & 0 & \frac{EA_2}{l_1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_{2zz}}{l_1^3} & -\frac{6EI_{2zz}}{l_1^2} & 0 & \frac{12EI_{2zz}}{l_1^3} & -\frac{6EI_{2zz}}{l_1^2} \\ 0 & \frac{6EI_{2zz}}{l_1^2} & \frac{2EI_{2zz}}{l_1} & 0 & -\frac{6EI_{2zz}}{l_1^2} & \frac{4EI_{2zz}}{l_1} \end{bmatrix} \begin{matrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ \vartheta_1 \\ u_{2x} \\ u_{2y} \\ \vartheta_2 \end{matrix}$$

# XIII. Exemple...

2. Calcul de la matrice de rigidité locale de chaque élément...

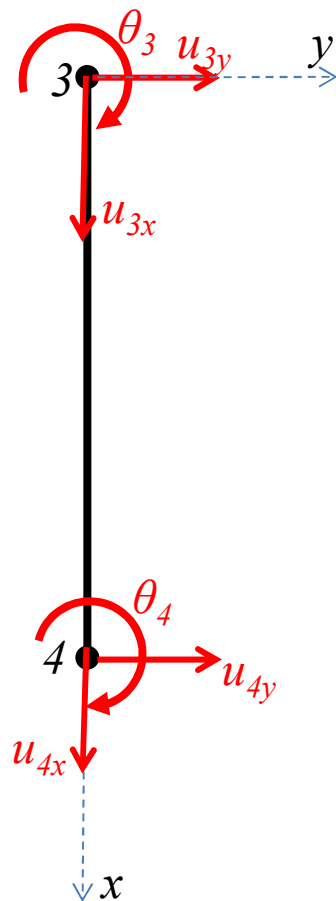


$$[k_{II}] = \begin{bmatrix} \frac{EA_1}{l_2} & 0 & 0 & -\frac{EA_1}{l_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_{1zz}}{l_2^3} & \frac{6EI_{1zz}}{l_2^2} & 0 & -\frac{12EI_{1zz}}{l_2^3} & \frac{6EI_{1zz}}{l_2^2} \\ 0 & \frac{6EI_{1zz}}{l_2^2} & \frac{4EI_{1zz}}{l_2} & 0 & -\frac{6EI_{1zz}}{l_2^2} & \frac{2EI_{1zz}}{l_2} \\ -\frac{EA_1}{l_2} & 0 & 0 & \frac{EA_1}{l_2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_{1zz}}{l_2^3} & -\frac{6EI_{1zz}}{l_2^2} & 0 & \frac{12EI_{1zz}}{l_2^3} & -\frac{6EI_{1zz}}{l_2^2} \\ 0 & \frac{6EI_{1zz}}{l_2^2} & \frac{2EI_{1zz}}{l_2} & 0 & -\frac{6EI_{1zz}}{l_2^2} & \frac{4EI_{1zz}}{l_2} \end{bmatrix} \begin{matrix} u_{2x} \\ u_{2y} \\ \vartheta_2 \\ u_{3x} \\ u_{3y} \\ \vartheta_3 \end{matrix}$$

# XIII. Exemple...

2. Calcul de la matrice de rigidité locale de chaque élément...

L'élément III



$$[k_{III}] = \begin{bmatrix} \frac{EA_2}{l_3} & 0 & 0 & -\frac{EA_2}{l_3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_{2ZZ}}{l_3^3} & \frac{6EI_{2ZZ}}{l_3^2} & 0 & -\frac{12EI_{2ZZ}}{l_3^3} & \frac{6EI_{2ZZ}}{l_3^2} \\ 0 & \frac{6EI_{2ZZ}}{l_3^2} & \frac{4EI_{2ZZ}}{l_3} & 0 & -\frac{6EI_{2ZZ}}{l_3^2} & \frac{2EI_{2ZZ}}{l_3} \\ -\frac{EA_2}{l_3} & 0 & 0 & \frac{EA_2}{l_3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_{2ZZ}}{l_3^3} & -\frac{6EI_{2ZZ}}{l_3^2} & 0 & \frac{12EI_{2ZZ}}{l_3^3} & -\frac{6EI_{2ZZ}}{l_3^2} \\ 0 & \frac{6EI_{2ZZ}}{l_3^2} & \frac{2EI_{2ZZ}}{l_3} & 0 & -\frac{6EI_{2ZZ}}{l_3^2} & \frac{4EI_{2ZZ}}{l_3} \end{bmatrix} \begin{matrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ \vartheta_1 \\ u_{2x} \\ u_{2y} \\ \vartheta_2 \end{matrix}$$

# XIII. Exemple : Matrices de rigidité locales

L'élément I

$$[k_I] \begin{bmatrix} u_{1x} & u_{1y} & \theta_1 & u_{2x} & u_{2y} & \theta_2 \\ 85333,33 & 0 & 0 & -85333,33 & 0 & 0 \\ 0 & 674,24 & 1517,04 & 0 & -674,24 & 1517,04 \\ 0 & 1517,04 & 4551,11 & 0 & -1517,04 & 2275,56 \\ -85333,33 & 0 & 0 & 85333,33 & 0 & 0 \\ 0 & -674,24 & -1517,04 & 0 & 674,24 & -1517,04 \\ 0 & 1517,04 & 2275,56 & 0 & -1517,04 & 4551,11 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ \theta_1 \\ u_{2x} \\ u_{2y} \\ \theta_2 \end{matrix}$$

L'élément II

$$[k_{II}] \begin{bmatrix} u_{2x} & u_{2y} & \theta_2 & u_{3x} & u_{3y} & \theta_3 \\ 120944,88 & 0 & 0 & -120944,88 & 0 & 0 \\ 0 & 1079,80 & 3428,36 & 0 & -1079,80 & 3428,36 \\ 0 & 3428,36 & 14513,39 & 0 & -3428,36 & 7256,69 \\ -120944,88 & 0 & 0 & 120944,88 & 0 & 0 \\ 0 & -1079,80 & -3428,36 & 0 & 1079,80 & -3428,36 \\ 0 & 3428,36 & 7256,69 & 0 & -3428,36 & 14513,39 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_{2x} \\ u_{2y} \\ \theta_2 \\ u_{3x} \\ u_{3y} \\ \theta_3 \end{matrix}$$

L'élément III

$$[k_{III}] \begin{bmatrix} u_{3x} & u_{3y} & \theta_3 & u_{4x} & u_{4y} & \theta_4 \\ 50032,57 & 0 & 0 & -50032,57 & 0 & 0 \\ 0 & 135,90 & 521,51 & 0 & -135,90 & 521,51 \\ 0 & 521,51 & 2668,40 & 0 & -521,51 & 1334,20 \\ -50032,57 & 0 & 0 & 50032,57 & 0 & 0 \\ 0 & -135,90 & -521,51 & 0 & 135,90 & -521,51 \\ 0 & 521,51 & 1334,20 & 0 & -521,51 & 2668,40 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_{3x} \\ u_{3y} \\ \theta_3 \\ u_{4x} \\ u_{4y} \\ \theta_4 \end{matrix}$$



# XIII. Exemple : Matrices de Transformation

## 3. Calcul de la matrice de transformation :

### L'élément I : Élément vertical

$$\begin{cases} l_{ox} = \frac{X_2 - X_1}{L_1} = 0 \\ m_{ox} = \frac{Y_2 - Y_1}{L_1} = 1 \\ n_{ox} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} l_{oy} = -\frac{(m_{ox}^2 + n_{ox}^2)}{d_1} = -1 \\ m_{oy} = \frac{m_{ox} l_{ox}}{d_1} = 0 \\ n_{oy} = \frac{l_{ox} n_{ox}}{d_1} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} l_{oz} = 0 \\ m_{oz} = -\frac{n_{ox}}{d_1} = 0 \\ n_{oz} = \frac{m_{ox}}{d_1} = 1 \end{cases}$$

$$d_1 = \sqrt{m_{ox}^2 + n_{ox}^2} = m_{ox} = 1$$

$$[\lambda]_I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### L'élément III : Élément vertical

$$\begin{cases} l_{ox} = \frac{X_4 - X_3}{L_3} = 0 \\ m_{ox} = \frac{Y_4 - Y_3}{L_3} = -1 \\ n_{ox} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} l_{oy} = -\frac{(m_{ox}^2 + n_{ox}^2)}{d_1} = 1 \\ m_{oy} = \frac{m_{ox} l_{ox}}{d_1} = 0 \\ n_{oy} = \frac{l_{ox} n_{ox}}{d_1} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} l_{oz} = 0 \\ m_{oz} = -\frac{n_{ox}}{d_1} = 0 \\ n_{oz} = \frac{m_{ox}}{d_1} = 1 \end{cases}$$

$$d_1 = \sqrt{m_{ox}^2 + n_{ox}^2} = m_{ox} = -1$$

$$[\lambda]_{III} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# XIII. Exemple : Matrices de Transformation...

## 3. Calcul de la matrice de transformation :

### L'élément II :

$$\begin{cases} l_{ox} = \frac{X_2 - X_1}{L_2} = 0,866 \\ m_{ox} = \frac{Y_2 - Y_1}{L_2} = 0,5 \\ n_{ox} = \frac{Z_2 - Z_1}{L_2} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} l_{oy} = -\frac{m_{ox} l_{ox}}{d} = -0,5 \\ m_{oy} = \frac{l_{ox}^2 + n_{ox}^2}{d} = 0,866 \\ n_{oy} = -\frac{m_{ox} n_{ox}}{d} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} l_{oz} = -\frac{n_{ox}}{d} = 0 \\ m_{oz} = 0 \\ n_{oz} = \frac{l_{ox}}{d} = 1 \end{cases}$$

$$d = \sqrt{l_{ox}^2 + n_{ox}^2} = l_{ox}$$

$$[\lambda]_{II} = \begin{bmatrix} 0,866 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,5 & 0,866 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0,866 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,5 & 0,866 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# XIII. Exemple : Matrices de rigidité globales élémentaires

4. Calcul de la matrice de rigidité élémentaire globale :  $[K^e] = [\lambda]^T [k] [\lambda]$

L'élément I

$$[K^e_I] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 85333,33 & 0 & 0 & -85333,33 & 0 & 0 \\ 0 & 674,24 & 1517,04 & 0 & -674,24 & 1517,04 \\ 0 & 1517,04 & 4551,11 & 0 & -1517,04 & 2275,56 \\ -85333,33 & 0 & 0 & 85333,33 & 0 & 0 \\ 0 & -674,24 & -1517,04 & 0 & 674,24 & -1517,04 \\ 0 & 1517,04 & 2275,56 & 0 & -1517,04 & 4551,11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K^e_I] = \begin{bmatrix} 674,24 & 0,00 & -1517,04 & -674,24 & 0,00 & -1517,04 \\ 0,00 & 85333,33 & 0,00 & 0,00 & -85333,33 & 0,00 \\ -1517,04 & 0,00 & 4551,11 & 1517,04 & 0,00 & 2275,56 \\ -674,24 & 0,00 & 1517,04 & 674,24 & 0,00 & 1517,04 \\ 0,00 & -85333,33 & 0,00 & 0,00 & 85333,33 & 0,00 \\ -1517,04 & 0,00 & 2275,56 & 1517,04 & 0,00 & 4551,11 \end{bmatrix}$$

# XIII. Exemple : Matrices de rigidité globales élémentaires

L'élément II :

$$[K_{II}^e] = \begin{bmatrix} 0,866 & -0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,866 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,866 & -0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0,866 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 120944,88 & 0 & 0 & -120944,88 & 0 & 0 \\ 0 & 1079,80 & 3428,36 & 0 & -1079,80 & 3428,36 \\ 0 & 3428,36 & 14513,39 & 0 & -3428,36 & 7256,69 \\ -120944,88 & 0 & 0 & 120944,88 & 0 & 0 \\ 0 & -1079,80 & -3428,36 & 0 & 1079,80 & -3428,36 \\ 0 & 3428,36 & 7256,69 & 0 & -3428,36 & 14513,39 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,866 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,5 & 0,866 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,866 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,5 & 0,866 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K_{II}^e] = \begin{bmatrix} 90973,29 & 51901,58 & -1714,18 & -90973,29 & -51901,58 & -1714,18 \\ 51901,58 & 31046,02 & 2968,96 & -51901,58 & -31046,02 & 2968,96 \\ -1714,18 & 2968,96 & 14513,39 & 1714,18 & -2968,96 & 7256,69 \\ -90973,29 & -51901,58 & 1714,18 & 90973,29 & 51901,58 & 1714,18 \\ -51901,58 & -31046,02 & -2968,96 & 51901,58 & 31046,02 & -2968,96 \\ -1714,18 & 2968,96 & 7256,69 & 1714,18 & -2968,96 & 14513,39 \end{bmatrix}$$

# XIII. Exemple : Matrices de rigidité globales élémentaires

L'élément III :

$$[K^e_{III}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50032,57 & 0 & 0 & -50032,57 & 0 & 0 \\ 0 & 135,90 & 521,51 & 0 & -135,90 & 521,51 \\ 0 & 521,51 & 2668,40 & 0 & -521,51 & 1334,20 \\ -50032,57 & 0 & 0 & 50032,57 & 0 & 0 \\ 0 & -135,90 & -521,51 & 0 & 135,90 & -521,51 \\ 0 & 521,51 & 1334,20 & 0 & -521,51 & 2668,40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K^e_{III}] = \begin{bmatrix} 135,90 & 0,00 & 521,51 & -135,90 & 0,00 & 521,51 \\ 0,00 & 50032,57 & 0,00 & 0,00 & -50032,57 & 0,00 \\ 521,51 & 0,00 & 2668,40 & -521,51 & 0,00 & 1334,20 \\ -135,90 & 0,00 & -521,51 & 135,90 & 0,00 & -521,51 \\ 0,00 & -50032,57 & 0,00 & 0,00 & 50032,57 & 0,00 \\ 521,51 & 0,00 & 1334,20 & -521,51 & 0,00 & 2668,40 \end{bmatrix}$$

# XIII. Exemple : Matrice de rigidité globale

$K^e_I$ 
 $K^e_{II}$ 
 $K^e_{III}$

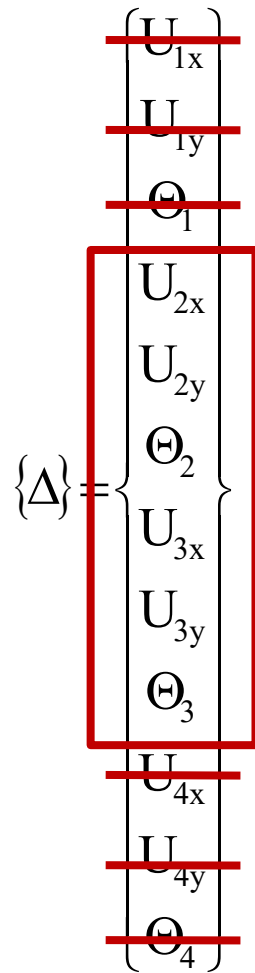
$K^e_I + K^e_{II}$

$K^e_{II} + K^e_{III}$

	$u_{1x}$	$u_{1y}$	$\theta_1$	$u_{2x}$	$u_{2y}$	$\theta_2$	$u_{3x}$	$u_{3y}$	$\theta_3$	$u_{4x}$	$u_{4y}$	$\theta_4$	
[K]	674,24	0	-1517,04	-674,24	0	-1517,04	0	0	0	0	0	0	$u_{1x}$
	0	85333,33	0	0	-85333,33	0	0	0	0	0	0	0	$u_{1y}$
	-1517,04	0	4551,11	1517,04	0	2275,56	0	0	0	0	0	0	$\theta_1$
	-674,24	0	1517,04	91647,53	51901,58	-197,14	-90973,29	-51901,58	-1714,18	0	0	0	$u_{2x}$
	0	-85333,33	0	51901,58	116379,35	2968,96	-51901,58	-31046,02	2968,96	0	0	0	$u_{2y}$
	-1517,04	0,00	2275,56	-197,14	2968,96	19064,50	1714,18	-2968,96	7256,69	0	0	0	$\theta_2$
	0	0	0	-90973,29	-51901,58	1714,18	91109,19	51901,58	1192,67	-135,90	0	-521,51	$u_{3x}$
	0	0	0	-51901,58	-31046,02	-2968,96	51901,58	81078,59	-2968,96	0	-50032,57	0	$u_{3y}$
	0	0	0	-1714,18	2968,96	7256,69	1192,67	-2968,96	17181,79	521,51	0	1334,20	$\theta_3$
	0	0	0	0	0	0	-135,90	0	521,51	135,90	0	521,51	$u_{4x}$
	0	0	0	0	0	0	0	-50032,57	0	0	50032,57	0	$u_{4y}$
	0	0	0	0	0	0	-521,51	0	1334,20	521,51	0	2668,40	$\theta_4$

# XIII. Exemple: conditions aux limites

6. Détermination des ddl de chaque nœud :



Les conditions aux limites :

$$u_{1x} = u_{1y} = \theta_1 = u_{4x} = u_{4y} = \theta_4 = 0$$

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ M_1 \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ M_2 \\ F_{3x} \\ F_{3y} \\ M_3 \\ F_{4x} \\ F_{4y} \\ M_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 170 \\ -200 \\ 0 \\ 0 \\ -50 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

# XIII. Exemple: conditions aux limites...

## 6. Détermination des ddl de chaque nœud ... :

	$u_{1x}$	$u_{1y}$	$\theta_1$	$u_{2x}$	$u_{2y}$	$\theta_2$	$u_{3x}$	$u_{3y}$	$\theta_3$	$u_{4x}$	$u_{4y}$	$\theta_4$
$u_{1x}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$u_{1y}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\theta_1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$u_{2x}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$u_{2y}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\theta_2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$u_{3x}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$u_{3y}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\theta_3$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$u_{4x}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$u_{4y}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\theta_4$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	$u_{1x}$	$u_{1y}$	$\theta_1$	$u_{2x}$	$u_{2y}$	$\theta_2$	$u_{3x}$	$u_{3y}$	$\theta_3$	$u_{4x}$	$u_{4y}$	$\theta_4$
$u_{1x}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$u_{1y}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\theta_1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$u_{2x}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$u_{2y}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\theta_2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$u_{3x}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$u_{3y}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\theta_3$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$u_{4x}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$u_{4y}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\theta_4$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	$u_{1x}$	$u_{1y}$	$\theta_1$	$u_{2x}$	$u_{2y}$	$\theta_2$	$u_{3x}$	$u_{3y}$	$\theta_3$	$u_{4x}$	$u_{4y}$	$\theta_4$
$u_{1x}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$u_{1y}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\theta_1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$u_{2x}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$u_{2y}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\theta_2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$u_{3x}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$u_{3y}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\theta_3$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$u_{4x}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$u_{4y}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\theta_4$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0



# XIII. Exemple: Détermination des ddl

$$\begin{bmatrix} 170 \\ -200 \\ 0 \\ 0 \\ -50 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 91647,53 & 51901,58 & -197,14 & -90973,29 & -51901,58 & -1714,18 \\ 51901,58 & 116379,35 & 2968,96 & -51901,58 & -31046,02 & 2968,96 \\ -197,14 & 2968,96 & 19064,50 & 1714,18 & -2968,96 & 7256,69 \\ -90973,29 & -51901,58 & 1714,18 & 91109,19 & 51901,58 & 1192,67 \\ -51901,58 & -31046,02 & -2968,96 & 51901,58 & 81078,59 & -2968,96 \\ -1714,18 & 2968,96 & 7256,69 & 1192,67 & -2968,96 & 17181,79 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_{2x} \\ U_{2y} \\ \Theta_2 \\ U_{3x} \\ U_{3y} \\ \Theta_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 91647,53 U_{2x} + 51901,58 U_{2y} - 197,14 \Theta_2 - 90973,29 U_{3x} - 51901,58 U_{3y} - 1714,18 \Theta_3 = 170 \\ 51901,58 U_{2x} + 116379,35 U_{2y} + 2968,96 \Theta_2 - 51901,58 U_{3x} - 31046,02 U_{3y} + 2968,96 \Theta_3 = -200 \\ -197,14 U_{2x} + 2968,96 U_{2y} + 19064,5 \Theta_2 + 1714,18 U_{3x} - 2968,96 U_{3y} + 7256,69 \Theta_3 = 0 \\ -90973,29 U_{2x} - 51901,58 U_{2y} + 1714,18 \Theta_2 + 91109,19 U_{3x} + 51901,58 U_{3y} + 1192,67 \Theta_3 = 0 \\ -51901,58 U_{2x} - 31046,02 U_{2y} - 2968,96 \Theta_2 + 51901,58 U_{3x} + 81078,59 U_{3y} - 2968,96 \Theta_3 = -50 \\ -1714,18 U_{2x} + 2968,96 U_{2y} + 7256,69 \Theta_2 + 1192,67 U_{3x} - 2968,96 U_{3y} + 17181,79 \Theta_3 = 0 \end{cases}$$

**Le système peut être résolu par l'une des méthodes de résolution des systèmes d'équations linéaires**

# XIII. Exemple: Détermination des ddl...

$$\begin{bmatrix} U_{2x} \\ U_{2y} \\ \theta_2 \\ U_{3x} \\ U_{3y} \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2806 \\ -0,0021 \\ -0,0304 \\ 0,2801 \\ -0,0014 \\ 0,0215 \end{bmatrix}$$