Corrigé TD n°3 et n°4.

Ex 2 (TD 3) $T \rightsquigarrow \mathcal{U}_{[0,\theta]}$, $\theta > 0$, $C \rightsquigarrow \mathcal{E}(\theta)$ $T \perp\!\!\!\perp C$.

1°) déjà vue

2°) $(X_1, D_1), \dots, (X_n, D_n)$ observations de (X, D) :

On a : $f_T(x) = \frac{1}{\theta} \cdot \mathbb{1}_{[0,\theta]}(x)$, $f_C(x) = \theta e^{-\theta x}$, $x \geq 0$.

$$S_T(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ 1 - \frac{x}{\theta}, & 0 \leq x \leq \theta \\ 0, & x \geq 0 \end{cases} ; \quad S_C(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ e^{-\theta x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

La vraisemblance de l'échantillon $(X_1, D_1), \dots, (X_n, D_n)$:

$$L(x_1, \dots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \left(f_T(x_i;\theta) \cdot S_C(x_i;\theta) \right)^{D_i} \left(f_C(x_i;\theta) \cdot S_T(x_i;\theta) \right)^{1-D_i}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\theta} \cdot \mathbb{1}_{[0,\theta]}(x_i) \cdot e^{-\theta x_i} \cdot \mathbb{1}_{(x_i \geq 0)} \right)^{D_i} \times$$

$$\times \left(\theta e^{-\theta x_i} \cdot \mathbb{1}_{(x_i \geq 0)} \cdot \left(1 - \frac{x_i}{\theta}\right) \mathbb{1}_{(0 \leq x_i \leq \theta)} \right)^{1-D_i}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\theta} \cdot e^{-\theta x_i} \cdot \mathbb{1}_{(0 \leq x_i \leq \theta)} \right)^{D_i} \left(e^{-\theta x_i} (\theta - x_i) \cdot \mathbb{1}_{(0 \leq x_i \leq \theta)} \right)^{1-D_i}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\theta^{D_i}} e^{-\theta D_i x_i} \right) \cdot \left(e^{-\theta(1-D_i) x_i} (\theta - x_i)^{1-D_i} \right) \cdot \mathbb{1}_{(0 \leq x_i \leq \theta)}$$

En prenant le log on obtient :

$$\ln L(x_1,\dots,x_n,\theta) = \sum_{i=1}^{n} \Big[-D_i \ln\theta - \theta D_i X_i - \theta(1-D_i)X_i$$

$$+ (1-D_i)\ln(\theta - X_i) \Big]$$

$$\boxed{\ln L(x_1,\dots,x_n,\theta) = \sum_{i=1}^{n} -D_i \ln\theta - \theta X_i + (1-D_i)\ln(\theta - X_i)}$$

3). L'emv $\hat{\theta}_n$ vérifie : $\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = 0$.

D'où

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^{n} -\frac{D_i}{\theta} - X_i + (1-D_i)\cdot\frac{1}{\theta - X_i} = 0$$

$$\boxed{= \sum_{i=1}^{n} \frac{-\theta^2 X_i + \theta(1 + X_i^2 - 2D_i) + D_i X_i}{\theta(\theta - X_i)} = 0} \quad (*)$$

Ainsi l'emv. $\hat{\theta}_n$ vérifie l'équation $(*)$ ci dessus que nous ne pouvons pas résoudre analytiquement !

4°) Pour une observation (X_1, D_1) on a de $(*)$.

$$\frac{-\theta^2 X_1 + \theta(1+X_i^2-2D_i) + D_i X_i}{\theta(\theta - X_i)} = 0$$

D'où l'emv $\hat{\theta}_1$ vérifie :

$$-\hat{\theta}_1 X_1 + \hat{\theta}_1 (1+X_1^2-2D_1) + D_1 X_1 = 0.$$

à résoudre et ne retenir que la racine positive $\hat{\theta}_1 > 0$.

ensuite tenter le calcul de $\mathbb{E}(\hat{\theta}_1)$ et $V(\hat{\theta}_1)$!

5°) Cas non censuré i.e $D_i = 1$ $\forall i$ avec $T \sim \mathcal{U}_{[0,\theta]}$.

$$L(T_1, \dots, T_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} \mathbb{1}_{[0,\theta]}(T_i)$$

$$= \frac{1}{\theta^n} \mathbb{1}_{(0 \le T_i \le \theta)}$$

$\vdots$

Trouver l'emv $\hat{\theta}_n^{nc}$ et calculer $\mathbb{E}(\hat{\theta}_{nc})$

et $V(\hat{\theta}_n^{nc})$

TD n°4

I) $T \rightsquigarrow W_{(a,b)}$. $f_T(t) = abt^{a-1} e^{-bt^a}$, $t>0$
$a>0, b>0$

a) Après calcul on a : $F_T(t) = \int_0^t f_T(u)du = 1 - e^{-bt^a}$, $t \geq 0$

et $S_T(t) = e^{-bt^a}$, $t \geq 0$

$$h_T(t) = \frac{-S'(t)}{S(t)} = abt^{a-1} , t \geq 0$$

b) $$\mathbb{E}(T) = \int_0^\infty S(u)du = \int_0^\infty e^{-bt^a} dt = \left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{a}} \cdot \frac{1}{a} \Gamma\left(\frac{1}{a}\right)$$

$$\mathbb{E}(T-t / T>t) \overset{\text{(Formule)}}{=} \frac{1}{S(t)} \cdot \int_t^\infty S(u)du .$$

On calcul $\int_t^\infty S(u)du = \int_t^\infty e^{-bu^a} du$ $(v = u^a)$ $= \dots$

II) les questions 1) et 2) à faire en relation avec l'n° 2 de TD n° 3.

3) On observe $(X_1, D_1) \dots, (X_n, D_n)$ de (X, D) ;

$T \sim f_T(x) = \frac{2\theta x}{(1+\theta x^2)^2}, x \geq 0$, $\begin{cases} F_T(x) = 1 - \frac{1}{1+\theta x^2}, x>0 \\ S_T(x) = \frac{1}{1+\theta x^2} \end{cases}$

$C \sim \mathcal{U}_{(0,\theta)}$. $f_C(x) = \frac{1}{\theta} \cdot \mathbb{1}_{(0,\theta)}(x)$, $S_C(x) = \begin{cases} 1 & , x<0 \\ 1 - \frac{x}{\theta} & , 0<x<\theta \\ 0 & x>\theta \end{cases}$

D'où la vraisemblance $L(X_1 \dots, X_n, \theta)$:

$$L(X_1, \dots, X_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \left(f_T(X_i, \theta) \cdot S_C(X_i, \theta)\right)^{D_i} \left(f_C(X_i, \theta) \cdot S_T(X_i, \theta)\right)^{1-D_i}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{2\theta X_i}{1+\theta X_i^2} \cdot \mathbb{1}_{(X_i \geq 0)} \cdot \left(1 - \frac{X_i}{\theta}\right) \mathbb{1}_{(0 \leq X_i \leq \theta)} \right)^{D_i} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{\theta} \cdot \mathbb{1}_{(0 \leq X_i \leq \theta)} \cdot \frac{1}{1+\theta X_i^2} \cdot \mathbb{1}_{(X_i \geq 0)} \right)^{1-D_i}$$

enfin on trouve la vraisemblance :

$$\boxed{L(X_1, \dots, X_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{2X_i(\theta - X_i)}{(1+\theta X_i^2)} \cdot \mathbb{1}_{(0 \leq X_i \leq \theta)} \right)^{D_i} \left(\frac{1}{\theta(1+\theta X_i)^2} \cdot \mathbb{1}_{(0 \leq X_i \leq \theta)} \right)^{1-D_i}}$$

4) l'emv $\hat{\theta}_n$ vérifie l'équation :

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \ln L(x_1, \dots, x_n, \theta) = 0$$

qui est : pour $\underline{0 \leq x_i \leq \theta}$;

$$\sum_{i=1}^{n} D_i \left(\ln(2x_i(\theta - x_i)) - \ln(1+\theta x_i^2) \right) + (1 - D_i)\left(-\ln(\theta(1+\theta x_i^2)\right) = 0$$

ou encore :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial\theta} \left[D_i \cdot \ln(2x_i(\theta - x_i)) - \ln\theta(1+\theta x_i^2) + D_i \ln\theta \right] = 0} \quad (**)$$

calculer la dérivée !

Donc l'emv $\hat{\theta}_n$ vérifie l'équation $(**)$ ci dessus que nous ne pouvons pas résoudre !

5) Pour une observation (X_1, D_1) on a.

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \left[D_1 \ln(2X_1(\theta - X_1)) - \ln\theta(1+\theta X_1^2) + D_1 \ln\theta \right) = 0$$

$$D_1 \frac{2X_1}{2X_1(\theta - X_1)} - \frac{1}{\theta} - \frac{X_1^2}{1+\theta X_1^2} + D_1 \frac{1}{\theta} = 0$$

à résoudre en θ !