Unité d’enseignement : UEF 3.1.1
Matière : ***Hydraulique générale II***
Code la matière: ***HS511***
VHS: 45h00 (cours: 1h30, TD: 1h30)
Crédits : **4**
Coefficient : **2**

Objectifs de l’enseignement:

L’objectif de cette matière est de fournir les bases nécessaires à la compréhension et au calcul des phénomènes présents en hydraulique appliquée, au génie de l’eau et de l’environnement, en particulier ceux rencontrés en assainissement en canaux et en rivière

Connaissances préalables recommandées :

Connaissance des bases Mathématiques, mécanique des fluides et hydraulique générale I

Chapitre 1: Rappels sur l'hydraulique générale

Ecoulement laminaire ; Ecoulement turbulent ; Ecoulement à potentiel des vitesses.

Chapitre 2: Equation des quantités de mouvement (3 semaines)

Théorème de la quantité de mouvement ; Equation intégrale de la quantité de mouvement ; Coefficient de correction de la quantité de mouvement, Application du théorème de quantité de mouvement ; Réaction d'un jet ; Action d'un jet sur une plaque ; Action d'un jet sur un coude.

Chapitre 3 : Ecoulements à travers les orifices et les ajutages (2 semaines)

Ecoulements à travers les Orifices ; Ecoulements à travers les ajutages.

Chapitre 4 : Ecoulements dans les conduites en charge (4 semaines)

Réseaux de conduites comportant une pompe ou une turbine ; Réseaux maillés ; réseaux ramifiés.

Chapitre 5: Ecoulement à surface libre en régime uniforme (3 semaines)

Classification des écoulements à surface libre ; Equation de base d'un écoulement à surface libre ; Conditions d'écoulement uniforme ; Paramètres hydrauliques de la section transversale des canaux.

Chapitre 6 : Notions sur les écoulements à surface libre graduellement varié et brusquement varié (3 semaines)

Hypothèses d'écoulement graduellement varié ; Charge spécifique ; Régime critique ; Profondeur et charge critiques ; Nombre de Froude ; Présentation graphique de la charge spécifique ; Equation différentielle des écoulements graduellement variés ; Classement des profils en long des écoulements graduellement varié. Ressaut hydraulique ; Equation de mouvement ; Hauteurs conjuguées ; Longueur caractéristique du ressaut ;

Mode d’évaluation : Contrôle continu : 40%; Examen : 60%.

Références bibliographiques :

1. Carlier, M., (1980). Hydraulique générale et appliquée, Collection de la direction des
études et recherches d’électricité de France, Volume 14, 2ème édition, Eyrolles, Paris,
France.
2. Graf Walter H., Altinakar M.(1998). Hydrodynamique une introduction, Collection :
3. Hug M. (1975). Mécanique des fluides appliquée, Edition Masson, Paris.
4. Kremenetski N., Schterrenliht D., Alychev V., Yakovleva L. (1984). Hydraulique, édition
MIR-Moscou.
5. Laborde J.P. (2007). Eléments d'hydraulique générale Edition école polytechnique de
l’université de Nice – SophiaAntipolis
6. Lencastre, A. (1999). Hydraulique générale, Editions Eyrolles, première édition, Paris

Rappels

Quelques définitions :

- **Fluide :** - est constitué de molécules mobiles entre elles
  - n'a pas de forme propre (prend celle du récipient)

- **Différents types de fluides :**

  Les gaz : - Les molécules occupent tout l'espace de leur enceinte
  - Sont compressibles et expansibles (PV=nRT)

  Les liquides : - Les molécules occupent un volume indépendant de celui du récipient
  - Sont peu compressibles et expansibles

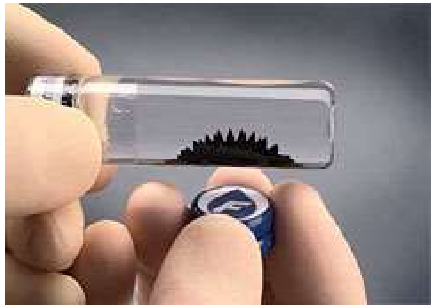
Quelques fluides

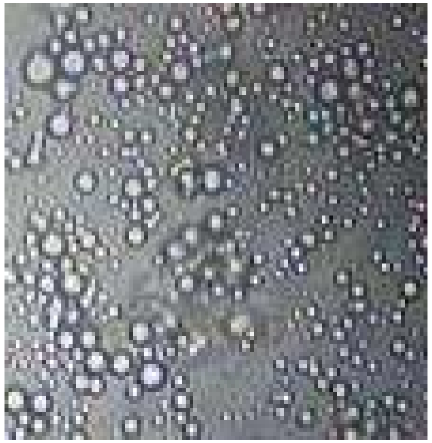
Monophasiques
eau, air, huile, métaux fondus

Multiphasiques
- aérosols (brouillard)
- émulsions (lait, vinaigrette, anisette...)
- suspensions (pâtes, boues)
- liquides à bulles (surface de l'océan, fluides de refroidissement)

« Complexes »
- magma, plasmas, ferrofluides (propriétés magnétiques)
- polymères, micelles, cristaux liquides (molécules 1D ou 2D...)
- milieux granulaires (sable, poudres)

Ferrofluides

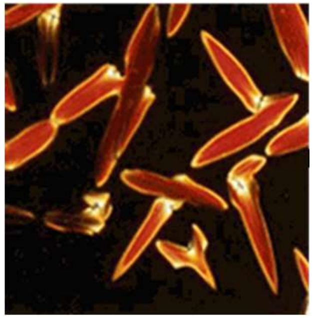




Lait

Liquide à bulles

Cristaux liquides



PROPRIETES DES LIQUIDES

Dans l'établissement des principes de l'hydraulique, certaines propriétés des fluides jouent un rôle important, d'autres seulement un rôle mineur ou aucun rôle du tout. En hydrostatique (fluide au repos) c'est le *poids spécifique* qui est la propriété la plus importante, tandis qu'en hydrodynamique (fluide en mouvement), la *densité* et la *viscosité* sont des propriétés dominantes. La *pression de vapeur* prend de l'importance quand interviennent des basses pressions, le liquide en question contient des bulles de vapeur, c'est le phénomène de cavitation. La *tension de surface* influe sur les conditions statiques et dynamiques dans les conduits très étroits, c'est le phénomène de capillarité.

1. - Masse volumique

La masse volumique (ρ) est le rapport : (ρ=Masse M/ Volume V) en [Kg/m^3]
Pour les liquides, le volume est pratiquement insensible aux variations de pression et, dans la majorité des cas, il augmente faiblement quand la température augmente, l'eau faisant exception à cette règle en dessous de 4°C.

ρ_{eau} = 1000 kg/m^3 $\rho_{mercure}$ = 13546 kg/m^3 $\rho_{air\ sec}$ = 1,205 kg/m^3

Attention **: Contrairement aux liquides, les gaz sont fortement compressibles. La variation de masse volumique dépend de la température et de la pression :**

r = f (p,T).

2. - Poids spécifique

Il représente la force de gravité agissant sur la masse par unité de volume :

$\gamma = \rho.g$ [N/m3]

γ eau = 10^4 N/m^3

Varie avec la température (même pour un liquide)
Varie avec la pression (peu pour un liquide)

Propriétés physiques - FLUIDES

- Propriétés physiques (quelques définitions):
  - masse volumique
  - Poids spécifique
  - Densité relative

T (C.)	d (g/ml)
0	0,99987
4	1,00000
5	0,99999
10	0,99973
15	0,99913
20	0,99823
25	0,99707
30	0,99567
35	0,99406
40	0,99224
45	0,99025
50	0,98807
55	0,98573
60	0,98324
65	0,98059
70	0,97781
75	0,97489
80	0,97183
85	0,96865
90	0,96534
95	0,96192
100	0,95838

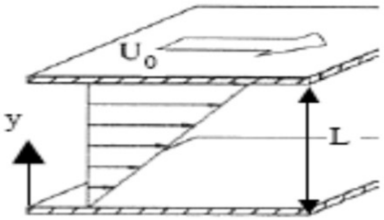
3. - Viscosité

La viscosité d'un fluide en mouvement est la propriété qui exprime sa résistance à une force tangentielle.

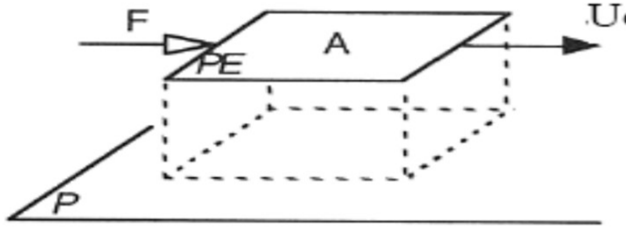
Expérience :

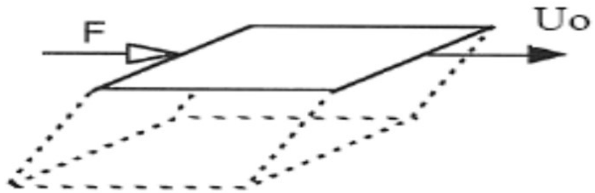
Considérons un fluide placé entre deux plaques planes, parallèles, distantes de L et horizontales. L'une est fixe et l'autre est en mouvement uniforme de vitesse Uo. Pour générer une vitesse de la plaque supérieure (surface A), il faut exercer une force F. Cette force est la résultante des forces de frottements visqueux.

Répartition de la vitesse entre deux plaques en régime laminaire



Répartition de la vitesse entre deux plaques en régime laminaire





Déformation du fluide

Cette force est la résultante des forces de frottements visqueux.

L'expérimentation permet de déduire une proportionnalité entre le rapport de la force F et la surface A avec le rapport entre la vitesse Uo et la longueur L telle que :

$$\frac{F}{A} = \mu \frac{U_0}{L} = \mu \frac{\partial U}{\partial y}$$

μ [N.s/m^2] est appelé viscosité dynamique ou absolue.

Unité :

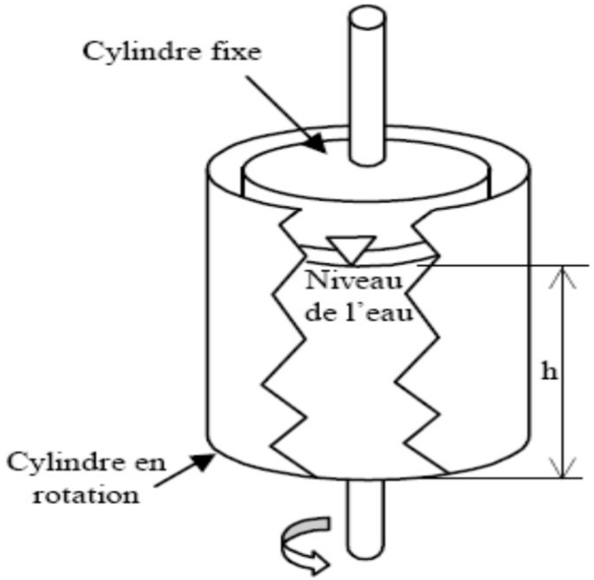
En <u>système international (SI)</u>, l'unité de viscosité dynamique est le $(\mathbf{Pa.s})$ ou **Poiseuille** (Pl) : 1 Pl = 1 kg/m.s

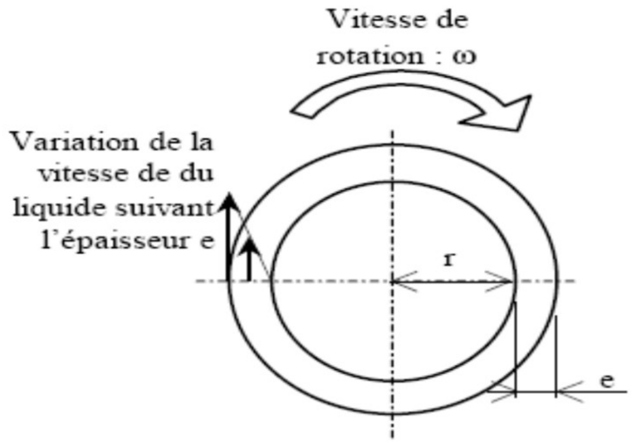
En *système d'unités (CGS)* :L'unité est le **Poise** (Po) ; 1 Pl = 10 Po = 1 daPo = 10^3 cPo.

Le viscosimètre :

On considère deux cylindres coaxiaux séparés par un intervalle e dont l'espace entre eux est rempli par un liquide. On fait tourner le cylindre extérieur à vitesse constante (w) et on maintient fixe le cylindre intérieur.

Le fluide en contact avec le cylindre extérieur va y adhérer et par conséquent va être animé de la vitesse V du cylindre extérieur. Le fluide en contact avec le cylindre fixe aura une vitesse nulle. La viscosité fait naître une force de frottement que l'on mesure par le couple M.





Les expériences ont montré que :

- **si e est faible par rapport au rayon intérieur r, la courbe représentative de la variation de la vitesse entre r et r+e est une droite,**
- **le couple (M) varie proportionnellement à la vitesse et on a :**

$$M = \mu \frac{(2.\pi.r.h).r}{e} V$$

On définit un deuxième coefficient de viscosité, le coefficient de viscosité cinématique :

$$\boldsymbol{\vartheta} = \frac{\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\rho}}$$

$\boldsymbol{\vartheta}$ en [m²/s]

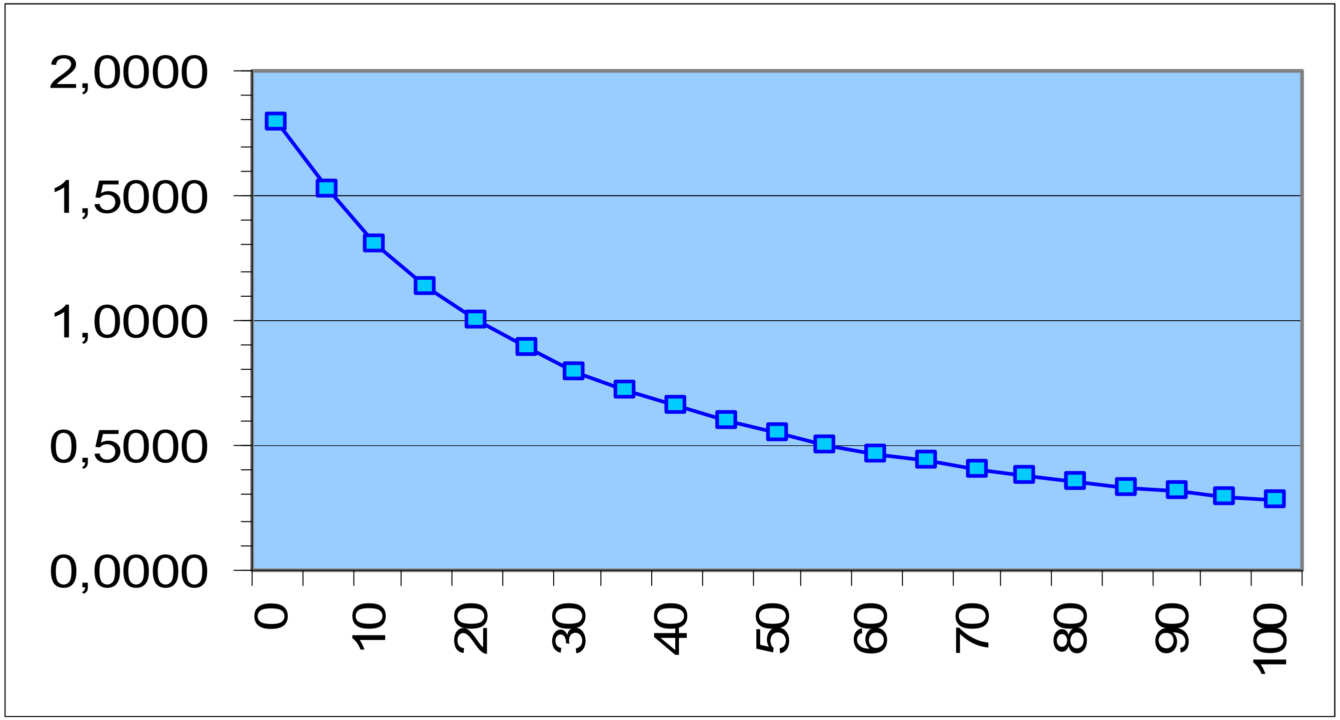
μ_{eau} à 20°C = 10^{-3} N.s/m²
ν_{eau} à 20°C = 10^{-6} m²/s
$\mu_{mercure}$ = 1,554.10^{-3} N.s/m²
$\nu_{mercure}$ = 0,1147.10^{-6} m²/s
μ_{air} = 18,5.10^{-6} N.s/m²
ν_{air} = 15,6.10^{-6} m²/s

Dimension : $[\nu] = L^2 T^{-1}$
unité SI : m^2/s
système cgs : le Stokes (St) $1 m^2/s = 10^4$ St $= 10^6$ cSt

On appelle fluide parfait un fluide dont la viscosité serait nulle (fluide inexistant dans la nature). La viscosité existe dès qu'il y a mouvement relatif entre particules, que ce soit en régime laminaire ou turbulent.

Viscosité de H_2O

T (C.)	viscosité (cP)
0	1,7870
5	1,5190
10	1,3070
15	1,1390
20	1,0020
25	0,8904
30	0,7975
35	0,7194
40	0,6529
45	0,5960
50	0,5468
55	0,5040
60	0,4665
65	0,4335
70	0,4042
75	0,3781
80	0,3547
85	0,3337
90	0,3147
95	0,2975
100	0,2818



3.4. - Pression de vapeur saturante

L'ébullition est un phénomène de changement d'état, dans lequel le liquide passe à l'état de vapeur. Tous les liquides ont tendance à s'évaporer ; la phase liquide se transforme en phase gazeuse. Au cours de cette transformation, les molécules de vapeur exercent une pression appelée pression de vapeur saturante. Dans le cas de l'eau, la pression de vapeur (ps) croît avec une augmentation de la température (T). La pression de vapeur saturante pour l'eau est donnée par la relation empirique suivante :

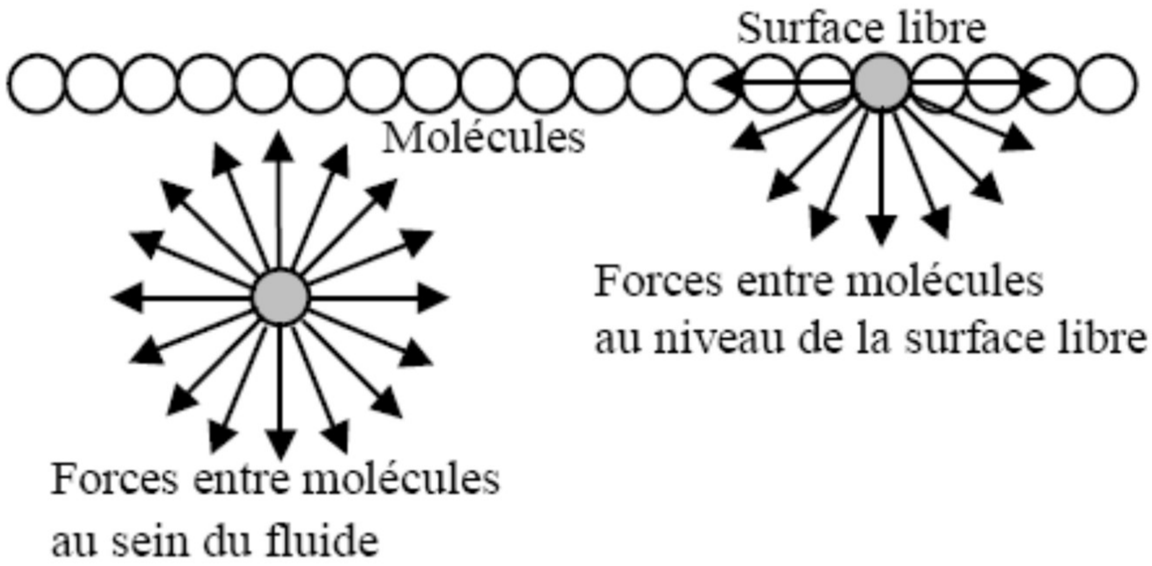
$$\log_{10}(p_s) = 22.435 - \frac{2795}{T + 273.15} - 3.868 \log_{10}(T + 273.15) \text{ avec } p_s \text{ en Pa et T en °Celsius.}$$

Si, à température constante, on abaisse la pression à la surface d'un liquide, ce dernier se met à bouillir lorsqu'on atteint la pression de vapeur saturante correspondant à cette température. Dans l'écoulement des liquides, il peut arriver que la pression en certains points devienne inférieure à la pression de vapeur saturante. Le liquide entre alors localement en ébullition et des bulles de vapeur apparaissent au sein même de l'écoulement. Ce phénomène, appelé cavitation, est le plus souvent nuisible pour les installations où il se produit (canalisation, pompes, turbine…). Les variations de volume lors du changement d'état sont telles qu'il se produit au sein du fluide de véritables explosions de bulles au moment de la vaporisation et de violentes implosions, lors de la condensation.

5. - Tension superficielle

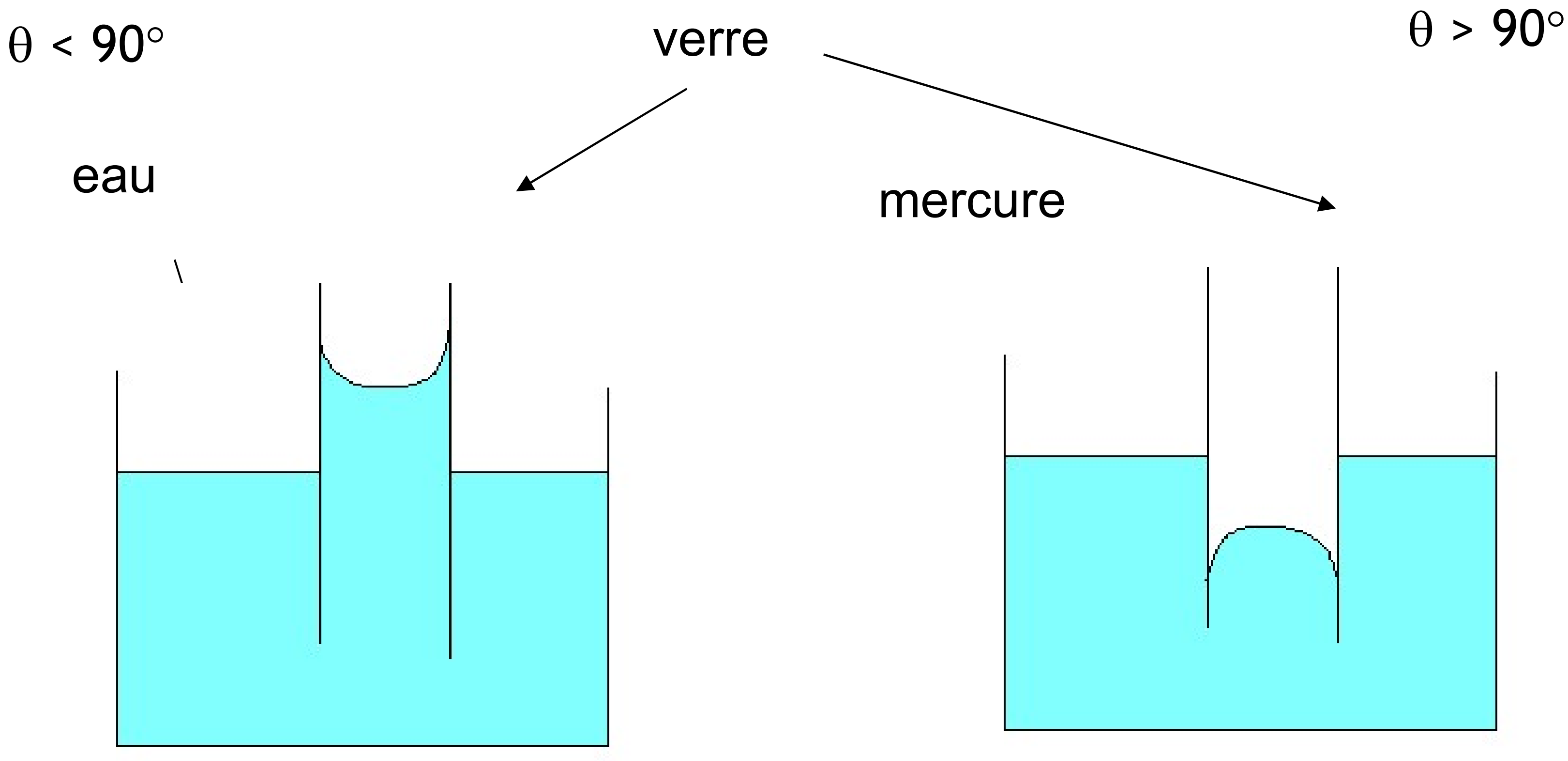
Une molécule liquide au repos est soumise aux forces d’attractions que les molécules voisines exercent sur elle. Une molécule à la surface libre d’un liquide ou à la surface de séparation de deux liquides non miscibles n’est plus soumise à l’action de forces symétriques, puisqu’elle n’est plus entourée symétriquement par d’autres molécules de même nature. Ainsi la résultante des forces moléculaires n’est plus nulle. La surface de séparation se comporte comme une membrane tendue. La force d’attraction tangentielle à la surface nécessaire pour arracher des particules agissant le long d’un segment de longueur unitaire est appelée tension superficielle.

Les effets de tension superficielle ne sont pas importants dans les écoulements en eau potable ou en assainissement et ne sont donc pas pris en compte.



Tension de surface : Air – eau à 20°C : 0,0724 N/m

Capillarité



Montée capillaire

Descente capillaire

RAPPELS D'HYDRODYNAMIQUE

DEFINITIONS :

*Le **DEBIT** est la quantité de matière qui traverse une section droite de la conduite pendant l'unité de temps*.

Débit masse :
Si dm est la masse élémentaire de fluide qui a traversé une section droite de la conduite pendant l'intervalle de temps dt, le débit-masse s'écrit :

$$Q_m = \frac{dm}{dt}$$ unité : kg·s^{-1} (M T^{-1})

Débit volume :
Si dV est le volume élémentaire de fluide qui a traversé une section droite de la conduite pendant l'intervalle de temps dt , le débit-volume s'écrit :

$$Q = Q_V = \frac{dv}{dt}$$ unité : m^3·s^{-1} (L^3 T^{-1})

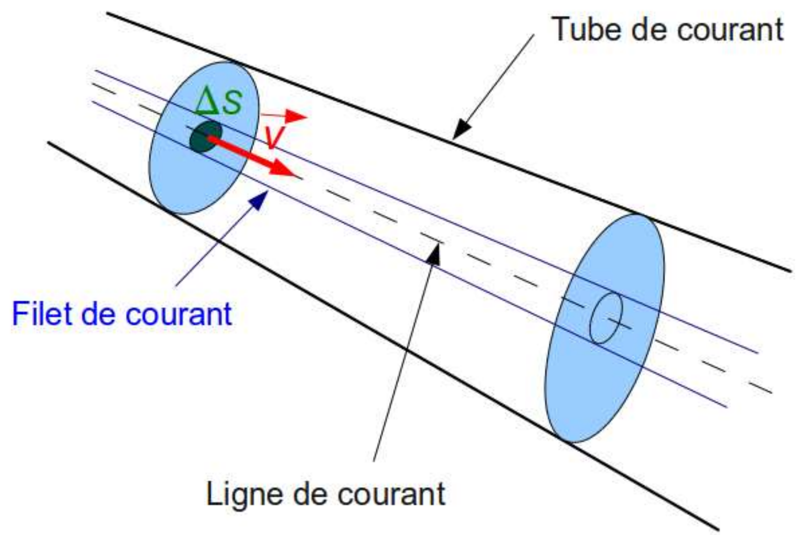
Relation entre qm et qV : La masse volumique est donnée par la relation

$\rho = \frac{dm}{dv}$ d'où $q_m = \rho\ q_V$

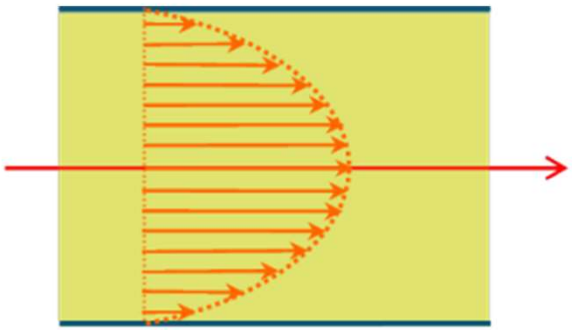
Ecoulements PERMANENTS :

Un régime d'écoulement est dit ***permanent*** si les paramètres qui le caractérisent (pression, température, vitesse, masse volumique, ..), ont une valeur constante au cours du temps.

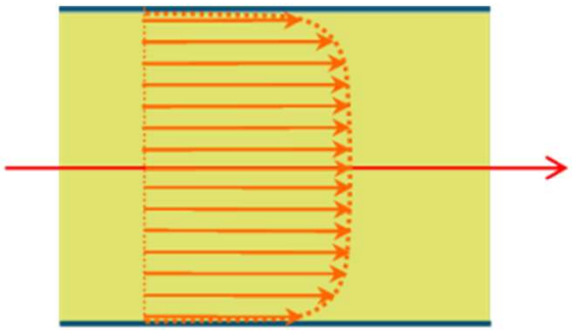
Ligne de courant : En régime ***permanent***, on appelle ligne de courant la courbe suivant laquelle se déplace un élément de fluide.
Tube de courant : Ensemble de lignes de courant s'appuyant sur une courbe fermée.
Filet de courant : Tube de courant s'appuyant sur un élément de surface dS. La section de base dS du tube ainsi définie est suffisamment petite pour que la vitesse du fluide soit la même en tous ses points (répartition uniforme)



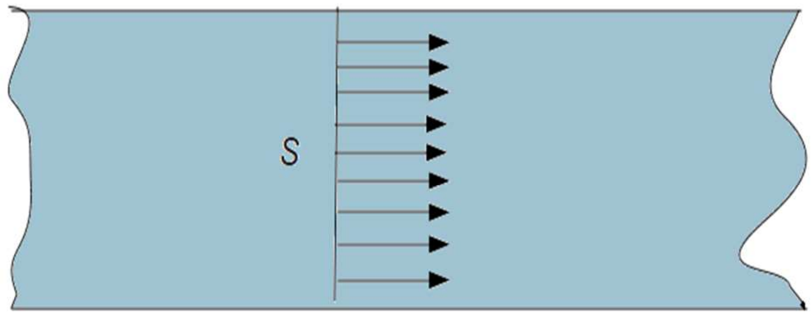
Vitesse moyenne: En général la vitesse V n'est pas constante sur la section S d'un tube de courant ; on dit qu'il existe un profil de vitesse. Le débit est obtenu à partir de la vitesse moyenne U :



profil d'écoulement laminaire



profil d'écoulement turbulent



La vitesse moyenne du fluide est telle que le débit est le même que dans la situation de gauche.

$$\boxed{U = V_{moy} = \frac{Q}{S}}$$

La vitesse moyenne U ou v_{moy} apparaît comme la vitesse uniforme à travers la section S qui assurerait le même débit que la répartition réelle des vitesses.

CARACTERISATION DES FORCES agissantes sur une masse liquide

1. Les forces

Les forces qui agissent sur un volume fini de fluide sont de deux types :
- *Les forces de volumes*,
- *Les forces de surfaces*.

1.1. - Les forces de volumes

Elles se composent des forces suivantes :
- Les forces de pesanteur provenant de la gravité.
- Les forces d'accélération pure :

Elles proviennent de la variation de la vitesse (V) de la masse d'une fluide (M) dans le temps.

$$F_{accélération\ pure} = M \frac{\partial V}{\partial t}$$

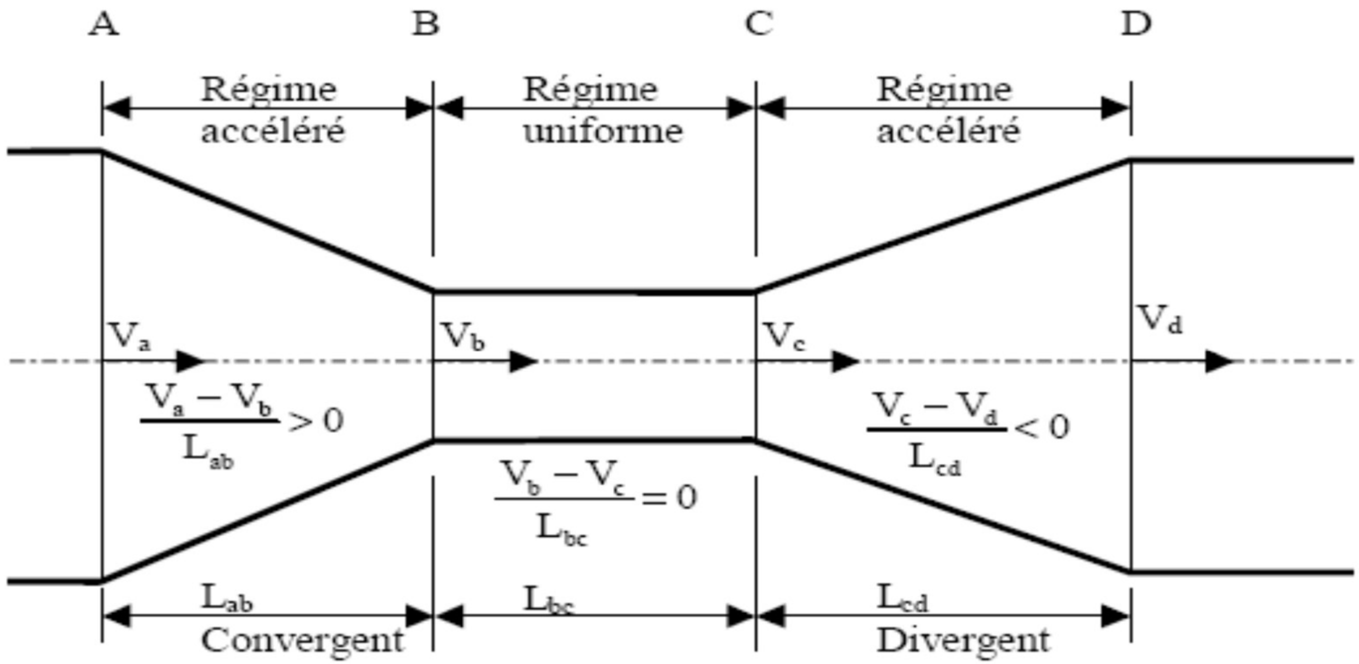
Prenons par exemple deux réservoirs à la même hauteur, dont l'un est vide et l'autre plein, reliés par une conduite de diamètre constant, horizontal et muni d'une vanne. A l'ouverture de la vanne, il se produit un écoulement.

La variation de la vitesse dans le temps $\frac{\partial V}{\partial t}$ crée au sein de l'écoulement

Les forces d’accélération convective :
Elles proviennent de la variation de la vitesse (Vx, Vy, Vz) dans l’espace (repère [x, y, z]).

$$F_{\text{accélération convective}} = M\left(\frac{\partial V}{\partial x}.V_x + \frac{\partial V}{\partial y}.V_y + \frac{\partial V}{\partial z}.V_z\right)$$

Prenons une conduite dont l’écoulement ne varie pas dans le temps (dV/ dt = 0). L’écoulement étant permanent, le débit est identique en tout point de la canalisation. Or, si la surface A est supérieure à la surface B alors la vitesse en B (Vb) est supérieur à la vitesse en A (Va).
Cette variation de vitesse va engendrer une accélération qui va générer une force d’accélération convective.



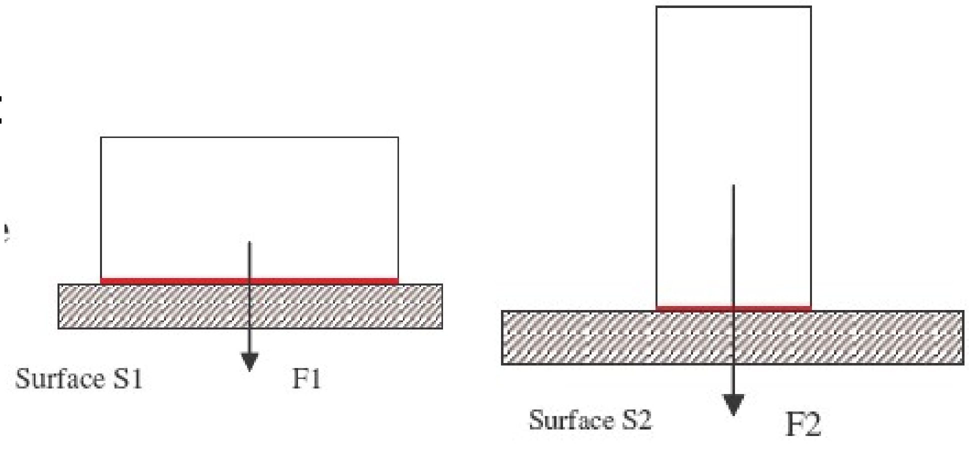
1.2. Les forces de surfaces

Elles se composent des forces suivantes :

❑ Les forces de pression :

La pression (p) est le rapport entre une force F agissant perpendiculairement à la surface (A) d'un fluide :

$$p = \frac{F}{A}$$



❑ Les forces de frottement de viscosité :

Nous avons vu précédemment qu'un fluide, dont les particules sont en mouvement relatif, génèrent des forces de frottement dues à la viscosité. Le force de frottement s'écrit :

$$F = \mu A \frac{\partial U}{\partial y}$$

❑ Les forces générées par la turbulence :

La turbulence à tendance à « freiner » l'écoulement. Une façon de les représenter mathématiquement consiste à les assimiler à des forces de frottement, ce qui est faux compte tenu de la nature même de la turbulence.

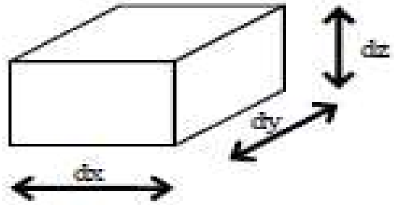
Importance des différentes forces

En général, l'hydraulicien doit s'occuper de l'effet de la force dominante. Dans la plupart des problèmes d'écoulement des fluides, la pesanteur, la viscosité et l'élasticité sont prépondérantes, mais pas toujours simultanément.
L'importance relative des différentes forces agissant sur un liquide est calculée par des nombres adimensionnels représentant les rapports entre ces forces. L'analyse dimensionnelle permet de simplifier ces rapports. Les différentes dimensions utilisées
sont :

- ✓ L : longueur,
- ✓ T : temps,
- ✓ ρ : masse volumique.

6. - OUTILS MATHEMATIQUES

Elément de volume : $dv = dx.dy.dz$



Dérivée partielle : $\dfrac{\partial}{\partial x}$

Dérivée totale : $$dP = \frac{\partial P}{\partial t}dt + \frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz$$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$$

Gradient d'un scalaire : $\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \underline{\text{grad}}(f) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix}$

Gradient d'un vecteur : $\underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{V}) = \underline{\underline{\text{grad}}}\begin{bmatrix} Vx \\ Vy \\ Vz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial Vx}{\partial x} & \dfrac{\partial Vx}{\partial y} & \dfrac{\partial Vx}{\partial z} \\ \dfrac{\partial Vy}{\partial x} & \dfrac{\partial Vy}{\partial y} & \dfrac{\partial Vy}{\partial z} \\ \dfrac{\partial Vz}{\partial x} & \dfrac{\partial Vz}{\partial y} & \dfrac{\partial Vz}{\partial z} \end{bmatrix}$

Divergence d'un vecteur : $\text{div}(\underline{V}) = \dfrac{\partial Vx}{\partial x} + \dfrac{\partial Vy}{\partial y} + \dfrac{\partial Vz}{\partial z}$

Rotationnel : $\underline{\text{Rot}}(\underline{V}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Vx \\ Vy \\ Vz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial Vz}{\partial y} - \dfrac{\partial Vy}{\partial z} \\ \dfrac{\partial Vx}{\partial z} - \dfrac{\partial Vz}{\partial x} \\ \dfrac{\partial Vy}{\partial x} - \dfrac{\partial Vx}{\partial y} \end{bmatrix}$

II. RAPPELS D'HYDRODYNAMIQUE

L'hydrodynamique a pour but d'étudier les mouvements des liquides en fonction des forces qui leur donnent naissance.

Parmi ces forces celles de viscosité n'interviennent que pour les fluides réels.

Cette remarque conduit à faire donc la distinction entre les liquides réels et les liquides parfaits.

II.1 DYNAMIQUE DES LIQUIDES PARFAITS

II.1.1 Equations générales du mouvement : équations d'Euler

Les forces qui agissent sur un élément de fluide en mouvement sont:

- des forces extérieures (forces de volume) ;
- des forces de pression (forces de surface) ;
- des forces d'inertie.

Cet ensemble de forces satisfait à l'équation générale de la mécanique :

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{\gamma}$$

c'est-à-dire, si X, Y, Z sont les composantes, suivant les trois axes, de la force de volume "F_v" et $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ sont les composantes de l'accélération "γ"

L'équilibre suivant l'axe des y d'un élément de volume parallélépipédique (de volume $dv = dx \cdot dy \cdot dz$) s'établit ainsi :

- force extérieure : selon OX $\rightarrow X \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz$

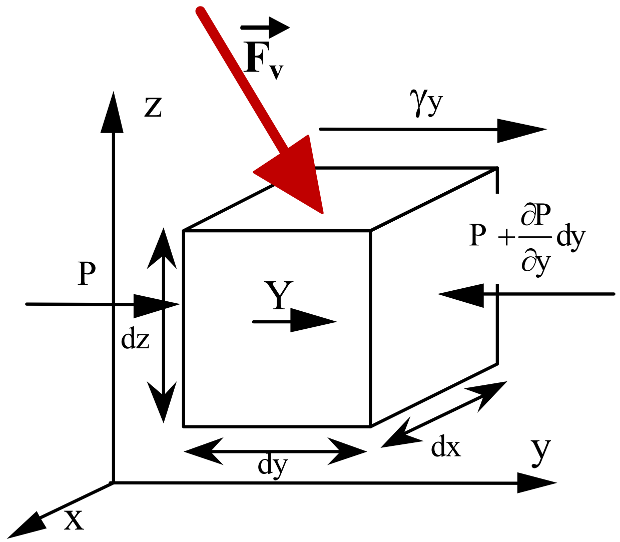
  selon OY $\rightarrow Y \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz$

  selon OZ $\rightarrow Z \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz$

- force d'inertie : selon OX $\rightarrow \gamma_x \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz$

  selon OY $\rightarrow \gamma_y \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz$

  selon OZ $\rightarrow \gamma_z \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz$



- force de pression :

$$\text{selon OX} \rightarrow P \cdot dy\, dz - \left(P + \frac{\partial P}{\partial x} dx\right) dy\, dz$$

$$\text{selon OY} \rightarrow P \cdot dx\, dz - \left(P + \frac{\partial P}{\partial y} dy\right) dx\, dz$$

$$\text{selon OZ} \rightarrow P \cdot dx\, dy - \left(P + \frac{\partial P}{\partial z} dz\right) dx\, dy$$

selon OY:

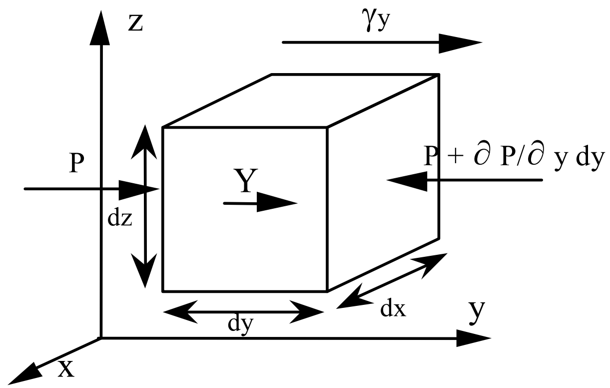
$$(\mathrm{Y}\cdot\ \rho\cdot\ \mathrm{dx}\cdot\ \mathrm{dy}\ \cdot\mathrm{dz}) - \left(\gamma_y\ \cdot\rho\cdot\ dx\cdot\ dy\ \cdot dz\right) + \left(\cancel{P\cdot dx\, dz} - \left(\cancel{P} + \frac{\partial P}{\partial y}dy\right)dx\, dz\right) = 0$$

$$\Longrightarrow (\mathrm{Y}\cdot\ \rho\cdot\ \mathrm{dx}\cdot\ \mathrm{dy}\ \cdot\mathrm{dz}) - \left(\gamma_y\ \cdot\rho\cdot\ dx\cdot\ dy\ \cdot dz\right) + \left(-\frac{\partial P}{\partial y}dy\, dx\, dz\right) = 0$$

$$\Longrightarrow \mathrm{Y}\cdot\ \rho - \gamma_y\cdot\rho - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \Longrightarrow \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} = \mathrm{Y} - \gamma_y$$

Ainsi on obtient l'équation d'EULER sous sa forme développée:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x} = X - \gamma_x = X - \dfrac{du}{dt} \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial y} = \mathrm{Y} - \gamma_y = Y - \dfrac{dv}{dt} \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial z} = Z - \gamma_z = Z - \dfrac{dw}{dt} \end{cases} \qquad (1)$$



L'équation d'EULER sous sa forme Vectorielle est : $\boxed{\dfrac{1}{\rho}\cdot\overrightarrow{grad}P = \overrightarrow{F_v} - \gamma}$ (2)

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = X - \frac{du}{dt} \qquad \cdot dx$$

$$+$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} = Y - \frac{dv}{dt} \qquad \cdot dy$$

$$+$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} = Z - \frac{dw}{dt} \qquad \cdot dz$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}\cdot dx + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}\cdot dy + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}\cdot dz = X\cdot dx + \mathrm{Y}\cdot dy + \mathrm{Z}\cdot dy - \frac{du}{dt}\cdot dx - \frac{dv}{dt}\cdot dy - \frac{dw}{dt}\cdot dz$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial P}{\partial y}\cdot dy + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot dz\right) = X\cdot dx + \mathrm{Y}\cdot dy + \mathrm{Z}\cdot dy - \left(\frac{dx}{dt}du\cdot + \frac{dy}{dt}\cdot dv + \frac{dz}{dt}\cdot dw\right)$$

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial P}{\partial y}\cdot dy + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot dz\right) = X\cdot dx + \mathrm{Y}\cdot dy + \mathrm{Z}\cdot dy - (u\cdot du\cdot + v\cdot dv + w\cdot dw)$$

Puisque la différentielle totale s'écrit:

$$\mathrm{dP} = \frac{\partial P}{\partial t}\cdot dt + \frac{\partial P}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial P}{\partial y}\cdot dy + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot dz \Leftrightarrow \boldsymbol{\frac{\partial P}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial P}{\partial y}\cdot dy + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot dz = \mathrm{dP} - \frac{\partial P}{\partial t}\cdot dt}$$

D'où;

$$\boxed{\frac{1}{\rho}\left(\mathbf{dP} - \boldsymbol{\frac{\partial P}{\partial t}\cdot dt}\right) = X\cdot dx + \mathrm{Y}\cdot dy + \mathrm{Z}\cdot dz - V\cdot dV} \quad (3)$$

C'est la forme différentielle totale de l'équation d'Euler

Si l'écoulement est permanent , toute variation par rapport au temps est nulle c à d $\frac{\partial *}{\partial t} = 0$ *est l'equation d'EULER sera:*

$$\frac{1}{\rho}\left(\mathbf{dP} - \cancel{\frac{\partial P}{\partial t} dt}\right) = X \cdot dx + \mathrm{Y} \cdot dy + \mathrm{Z} \cdot dz - V \cdot dV$$

$$Donc \qquad \boxed{\frac{1}{\rho}\mathbf{dP} = X \cdot dx + \mathrm{Y} \cdot dy + \mathrm{Z} \cdot dz - V \cdot dV \dots\dots\dots (3)}$$

Si L'écoulement se produit dans le champs de pesanteur uniquement, d'où les composante de la force de volume seront:

$$F_v \begin{cases} X = 0 \\ Y = 0 \\ Z = -g \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{1}{\rho}\mathbf{dP} = -g \cdot dz - V \cdot dV} \qquad (4)$$

II.1.2 Equation de continuité

Cette équation traduit la conservation de la masse. Elle se déduit de l'étude d'un parallélépipède élémentaire ou durant un instant dt, l'augmentation de la masse de ce dernier est nulle, est on dira que l'écoulement est conservatif

elle s'écrit sous la relation:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}\, \rho V = 0}$$

Si le liquide est incompressible $\boldsymbol{\rho = Cte}$ et l'équation de continuité se réduira à:

$$\boxed{\text{div}\, V = 0}$$

Avec $\text{div}\,\vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$

Remarque: Si l'écoulement se produit sous forme d'une tube de courant ou toute les vitesse sont perpendiculaire aux sections transversales, l'équation de continuité se réduit à $\boldsymbol{Q = Cte}$.

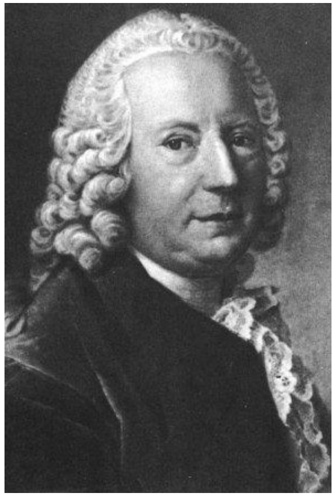
II.1.3 Equation caractéristique du fluide

Cette équation traduit les caractéristiques physiques du fluide : f (P, r, T) = 0

Pour les fluides supposés incompressibles, l'équation s'écrit : $\boldsymbol{\rho = Cte}$

II.1.4 EQUATION DE BERNOULLI

Daniel Bernoulli (1700-1782)



BERNOULLI Posa cinq hypothèses:

1. Fluide parfait
2. Ecoulement permanent
3. Fluide incompressible
4. dans le champs de pesanteur
5. Le long d'une ligne de courant ou d'une trajectoire

Ainsi la forme (4) de l'équation d'Euler est applicable $\frac{1}{\rho}\mathbf{dP} = -g \cdot dz - V \cdot dV$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho}\mathbf{dP} + g \cdot dz + V \cdot dV = 0$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{\rho}\mathbf{dP} + \int g \cdot dz + \int V \cdot dV = cte$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{\rho}\mathbf{dP} + \int g \cdot dz + \int V \cdot dV = cte$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho}\mathbf{P} + g \cdot z + \frac{V^2}{2} = cte$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{\mathbf{P}}{\rho g} + z + \frac{V^2}{2g} = cte}$$

L'équation de Bernoulli n'est une forme intégrale de l'équation d'Euler

L’équation de Bernoulli est bilan d’énergies avec:

$\frac{P}{\rho g}$: *Energie de Pression*

z: *Energie de Position*

$\frac{V^2}{2g}$: *Energie cinétique*

L’intérêt de l’équation de Bernoulli est sont application entre deux points:

$$\boxed{\frac{\mathbf{P}_1}{\rho g} + z_1 + \frac{{V_1}^2}{2g} = \frac{\mathbf{P}_2}{\rho g} + z_2 + \frac{{V_2}^2}{2g}}$$

Le théorème de Bernoulli traduit donc la conservation de l'énergie mécanique le long d'une ligne de courant ou dans tout le fluide si le mouvement est irrationnel.

II.2 HYDRODYNAMIQUE DES LIQUIDES REELS

II.2.1 Equations de Navier-Stokes

Ces équations sont obtenues, comme pour les équations **d'Euler**, en écrivant l'équilibre des forces agissant sur un élément de fluide. Aux forces extérieures, aux forces de pression et aux forces d'inertie s'ajoutent, donc des forces de viscosité qui ont pour expression en projection sur les axe OX, OY et OZ :

$$\begin{cases} \vartheta \Delta u \\ \vartheta \Delta v \\ \vartheta \Delta w \end{cases}$$

Avec $\boldsymbol{\vartheta}$ étant la viscosité cinématique du liquide et $\boldsymbol{\mu}$ étant la viscosité cinématique du liquide avec $\boldsymbol{\vartheta = \frac{\mu}{\rho}}$

les équations de **Navier-Stokes** s'écrivent:

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = X - \gamma_x + \vartheta \Delta u = X - \frac{du}{dt} + \vartheta \Delta u \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} = \mathrm{Y} - \gamma_y + \vartheta \Delta v = Y - \frac{dv}{dt} + \vartheta \Delta v \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} = Z - \gamma_z + \vartheta \Delta w = Z - \frac{dw}{dt} + \vartheta \Delta w \end{cases} \quad (5)$$

Soit sous forme vectorielle :

$$\boxed{\frac{1}{\rho} \cdot \overrightarrow{grad} P = \overrightarrow{F_v} - \vec{\gamma} + \vartheta \Delta \vec{V}} \quad (6)$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = X - \frac{du}{dt} + \vartheta\Delta u \quad \cdot dx$$

$$+$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} = Y - \frac{dv}{dt} + \vartheta\Delta v \quad \cdot dy$$

$$+$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} = Z - \frac{dw}{dt} + \vartheta\Delta w \quad \cdot dz$$

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial P}{\partial y}\cdot dy + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot dz\right) =$$

$$X\cdot dx + \mathrm{Y}\cdot dy + \mathrm{Z}\cdot dy - \left(\frac{dx}{dt}du\cdot + \frac{dy}{dt}\cdot dv + \frac{dz}{dt}\cdot dw\right) + \overbrace{\boldsymbol{\vartheta\Delta u\cdot dx + \vartheta\Delta v\cdot dy + \vartheta\Delta w\cdot dz}}^{\mathbf{A}}$$

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial P}{\partial y}\cdot dy + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot dz\right) = X\cdot dx + \mathrm{Y}\cdot dy + \mathrm{Z}\cdot dy - (u\cdot du\cdot + v\cdot dv + w\cdot dw\,) + \boldsymbol{A}$$

Puisque la différentielle totale s’écrit:

$$\mathrm{dP} = \frac{\partial P}{\partial t}\cdot dt + \frac{\partial P}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial P}{\partial y}\cdot dy + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot dz \Leftrightarrow \boldsymbol{\frac{\partial P}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial P}{\partial y}\cdot dy + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot dz = \mathrm{dP} - \frac{\partial P}{\partial t}\cdot dt}$$

$$D'où;\ \frac{1}{\rho}\left(\boldsymbol{\mathrm{dP} - \frac{\partial P}{\partial t}\cdot dt}\,\right) = X\cdot dx + \mathrm{Y}\cdot dy + \mathrm{Z}\cdot dz - V\cdot dV + \boldsymbol{A} \qquad (7)$$

C’est la forme différentielle totale de l’équation de Navier Stokes

Si l'écoulement est permanent , toute variation par rapport au temps est nulle c à d $\frac{\partial *}{\partial t} = 0$ *est l'équation de Navier-Stokes sera:*

$$\frac{1}{\rho}\left(\mathbf{dP} - \cancel{\frac{\partial P}{\partial t} dt}\right) = X \cdot dx + \mathrm{Y} \cdot dy + \mathrm{Z} \cdot dz - V \cdot dV + \boldsymbol{A}$$

$$Donc \qquad \frac{1}{\rho}\mathbf{dP} = X \cdot dx + \mathrm{Y} \cdot dy + \mathrm{Z} \cdot dz - V \cdot dV + \boldsymbol{A} \dots\dots\dots (8)$$

Si L'écoulement se produit dans le champs de pesanteur uniquement, d'où les composante de la force de volume seront:

$$F_v \begin{cases} X = 0 \\ Y = 0 \\ Z = -g \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{1}{\rho}\mathbf{dP} = -g \cdot dz - V \cdot dV + \boldsymbol{A}} \qquad (9)$$

II.2.2 EQUATION DE BERNOULLI

BERNOULLI Posa cinq hypothèses:

1. Fluide réel
2. Ecoulement permanent
3. Fluide incompressible
4. dans le champs de pesanteur
5. Le long d'une ligne de courant ou d'une trajectoire

Ainsi la forme (9) de l'équation de **Navier-Stokes** est applicable

$$\frac{1}{\rho}\mathbf{dP} = -g \cdot dz - V \cdot dV + \boldsymbol{A}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho}\mathbf{dP} + g \cdot dz + V \cdot dV + \boldsymbol{A} = 0 \quad \Rightarrow \int \frac{1}{\rho}\mathbf{dP} + \int g \cdot dz + \int V \cdot dV + \int \boldsymbol{A} = cte$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{\rho}\mathbf{dP} + \int g \cdot dz + \int V \cdot dV + \int \boldsymbol{A} = cte \Rightarrow \frac{1}{\rho}\mathbf{P} + g \cdot z + \frac{V^2}{2} + \int \boldsymbol{A} = cte$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{\mathbf{P}}{\rho g} + z + \frac{V^2}{2g} + \boldsymbol{J} = cte}$$

Avec ***J*** étant la perte de charge depuis l'origine du mouvement

L'équation de Bernoulli pour un liquide réel

L'équation de Bernoulli est bilan d'énergies avec:

$\frac{P}{\rho g}$: *Energie de pression*

z: *Energie de Position*

$\frac{V^2}{2g}$: *Energie de Pression*

J: *Perte d'énergie*

L'intérêt de l'équation de Bernoulli est sont application entre deux points:

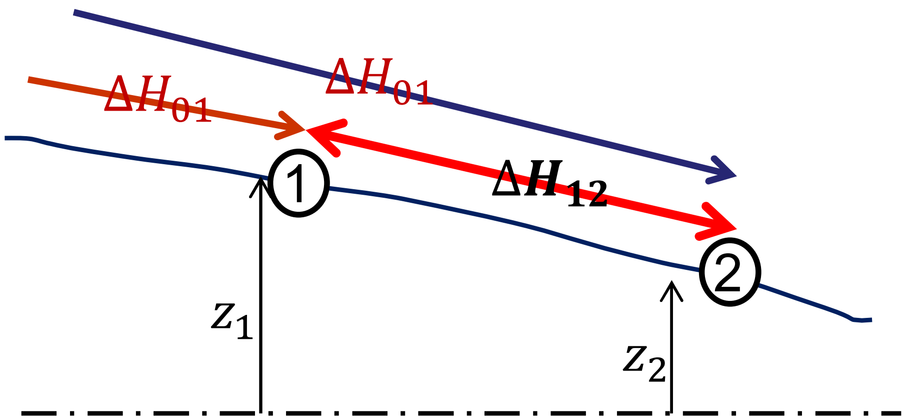
$$\frac{\mathbf{P}_1}{\rho g} + z_1 + \frac{V_1{}^2}{2g} + J_1 = \frac{\mathbf{P}_2}{\rho g} + z_2 + \frac{V_2{}^2}{2g} + J_2$$

J_i: *Perte de charge depuis l'origine du mouvement* c à d ΔH_{0i}

$$\frac{\mathbf{P}_1}{\rho g} + z_1 + \frac{V_1{}^2}{2g} + \Delta H_{01} = \frac{\mathbf{P}_2}{\rho g} + z_2 + \frac{V_2{}^2}{2g} + \Delta H_{02}$$

$$\frac{\mathbf{P}_1}{\rho g} + z_1 + \frac{V_1{}^2}{2g} = \frac{\mathbf{P}_2}{\rho g} + z_2 + \frac{V_2{}^2}{2g} + \Delta H_{12}$$

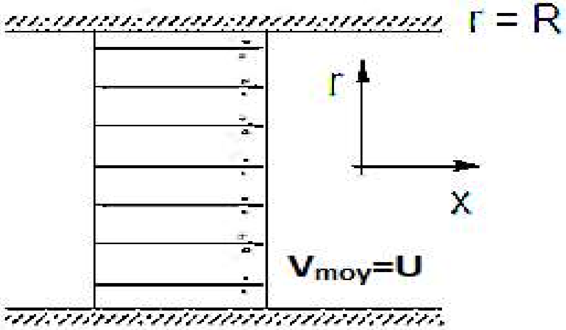
ΔH_{12}: perte de charge entre 1 et 2



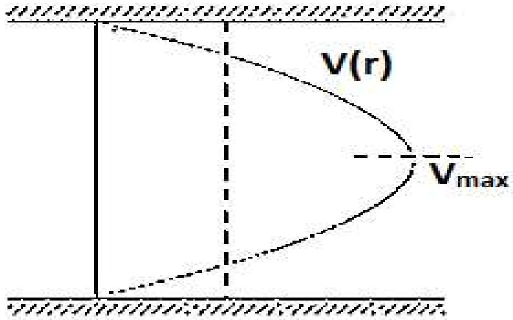
Le théorème de Bernoulli traduit donc la conservation de l'énergie mécanique le long d'une ligne de courant ou dans tout le fluide si le mouvement est irrationnel.

II.2.2 Généralisation de Equation de BERNOULLI à tube de courant

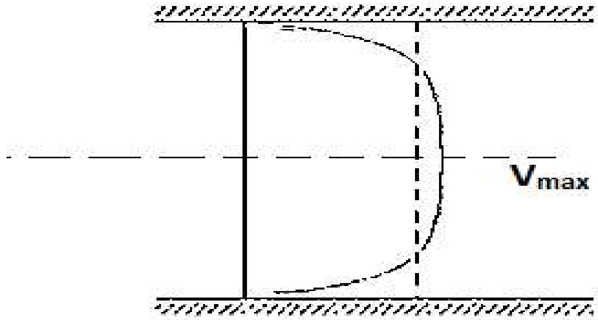
profil de vitesse



Ecoulement idéal



Ecoulement laminaire
Profil parabolique



Profil parabolique
(Pernès, 2004)

$U = Cte$

$$V(r) = V_{max} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

$$V(r) = V_{max} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{1/n}$$

Avec $V_{max} = 2U$

L’équation de Bernoulli peut être généralisée un à tube de courant en considérant les vitesses moyennes « $\boldsymbol{U = \frac{Q}{S}}$ » et en introduisant un coefficient de correction de l’énergie cinétique « α » pour tenir compte de l’intégrale répartition des vitesses

$$\boxed{\frac{\mathbf{P}_1}{\rho g} + z_1 + \alpha_1 \frac{{U_1}^2}{2g} = \frac{\mathbf{P}_2}{\rho g} + z_2 + \alpha_2 \frac{{U_2}^2}{2g} + \Delta H_{12}}$$

$$\frac{\mathbf{P}_1}{\rho g} + z_1 + \alpha_1 \frac{U_1{}^2}{2g} = \frac{\mathbf{P}_2}{\rho g} + z_2 + \alpha_2 \frac{U_2{}^2}{2g} + \Delta H_{12}$$

On **substitue à l'écoulement réel un écoulement fictif** à vitesse U constante dans la section et l'on définit un coefficient α tel que: $\alpha \cdot Ec_{fictive} = Ec_{réelle}$

$$\alpha = \frac{1}{U^3 \cdot S} \iint V^3 \, dS$$

α est appelé ***coefficient de Coriolis ou coefficient de correction de l'énergie cinétique***.

Valeurs de α en fonction du nombre de Reynolds

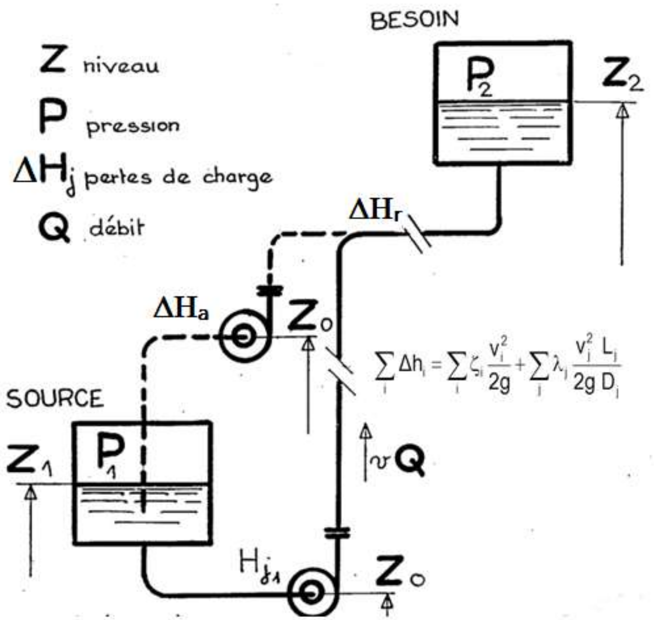
Régime	*Reynolds*	α
Laminaire	Re<4000	2
Turbulent	Re≈4000	1,076
	Re≈100000	1,058
	Re≈2000000	1,030

Equation de Bernoulli en présence d'une machine Hydraulique

a. En Présence d'une Pompe

Les pompes sont des appareils permettant un transfert d'énergie entre le fluide et un dispositif mécanique convenable. Suivant les conditions d'utilisation, ces machines communiquent au fluide soit principalement de l'énergie potentielle par accroissement de la pression en aval, soit principalement de l'énergie cinétique par la mise en mouvement du fluide.

$$\frac{\mathbf{P}_1}{\rho g} + z_1 + \alpha_1 \frac{U_1{}^2}{2g} = \frac{\mathbf{P}_2}{\rho g} + z_2 + \alpha_2 \frac{U_2{}^2}{2g} - hp + \Delta H_{12}$$



Hp étant l'énergie fournit par la pompe au fluide

b. En Présence d'une Turbine

Une **turbine hydraulique** est une machine tournante qui produit une énergie mécanique à partir d'eau en mouvement (cours d'eau ou marée) ou potentiellement en mouvement (barrage).

$$\frac{\mathbf{P}_1}{\rho g} + z_1 + \alpha_1 \frac{U_1{}^2}{2g} = \frac{\mathbf{P}_2}{\rho g} + z_2 + \alpha_2 \frac{U_2{}^2}{2g} + h_T + \Delta H_{12}$$

H_T étant l'énergie fournit par le fluide à la turbine

Charge hydraulique – théorème de Bernoulli

Charge hydraulique

La charge hydraulique exprime l'énergie par unité de poids de fluide et s'exprime en hauteur :

$$H = \alpha \frac{U^2}{2g} + \frac{P}{\rho g} + z$$

U : La vitesse moyenne du liquide (vitesse débitante=Q/S) [m/s]

α est le coefficient de l'énergie cinétique associé à la distribution non uniforme de la vitesse dans la section $\alpha \sim 1{,}05$. Il est souvent pris égal à l'unité

P : la pression en Pa

ρ : La masse volumique du liquide [kg/m3]

z : La cote

2.1.2 Théorème de Bernoulli

Le théorème de Bernoulli exprime qu'aux pertes de charge près, l'énergie du liquide se conserve. Si on note H_1 la charge dans la section S_1 et H_2 la charge dans la section S_2, on a:

$$H_1 = H_2 + J$$

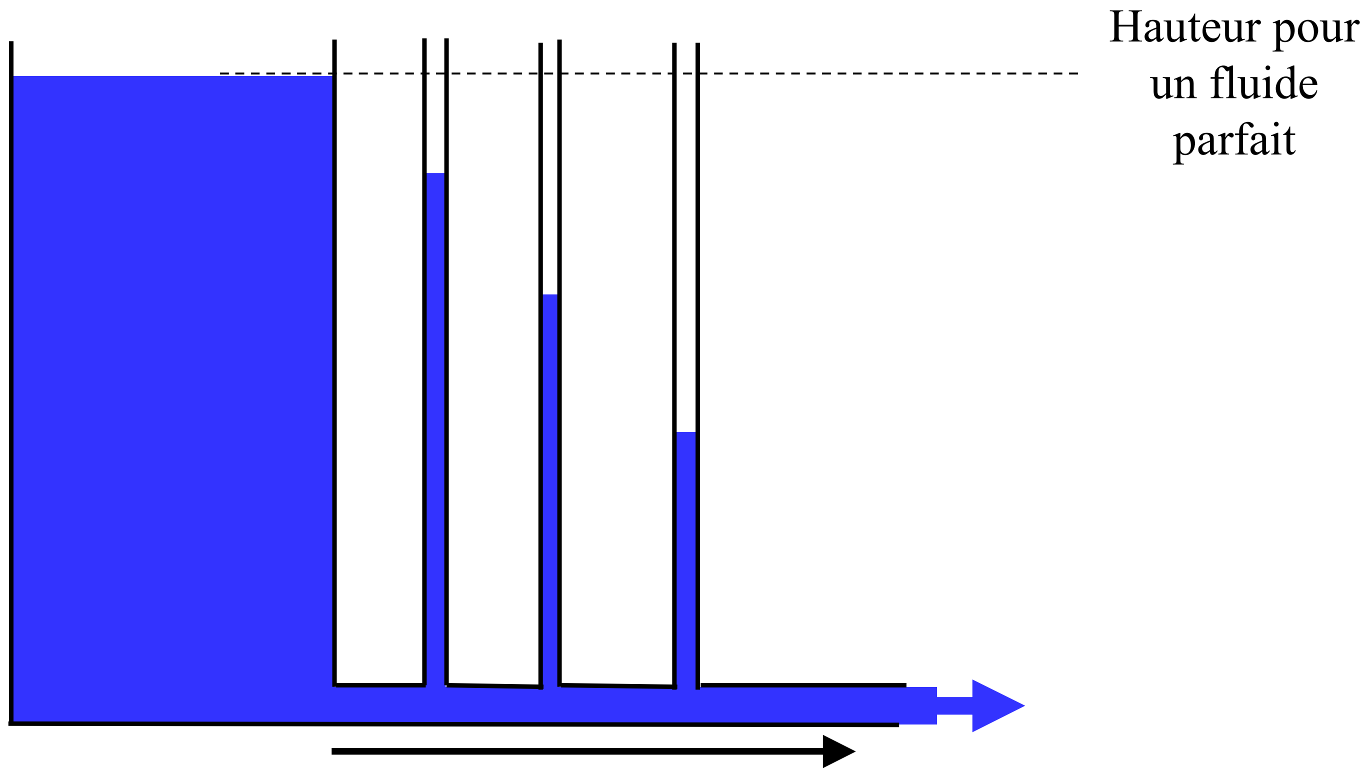
J représente l'ensemble des pertes de charge (différence de charge ΔH) entre les sections S_1 et S_2

On distingue :

- Les pertes de charge linéaires : répartie le long de l'écoulement dues aux frottements visqueux qui dissipent l'énergie du liquide
- Les pertes de charge singulières (ou locales) associées aux diverses singularité placées le long de l'écoulement

Pertes de charge régulières

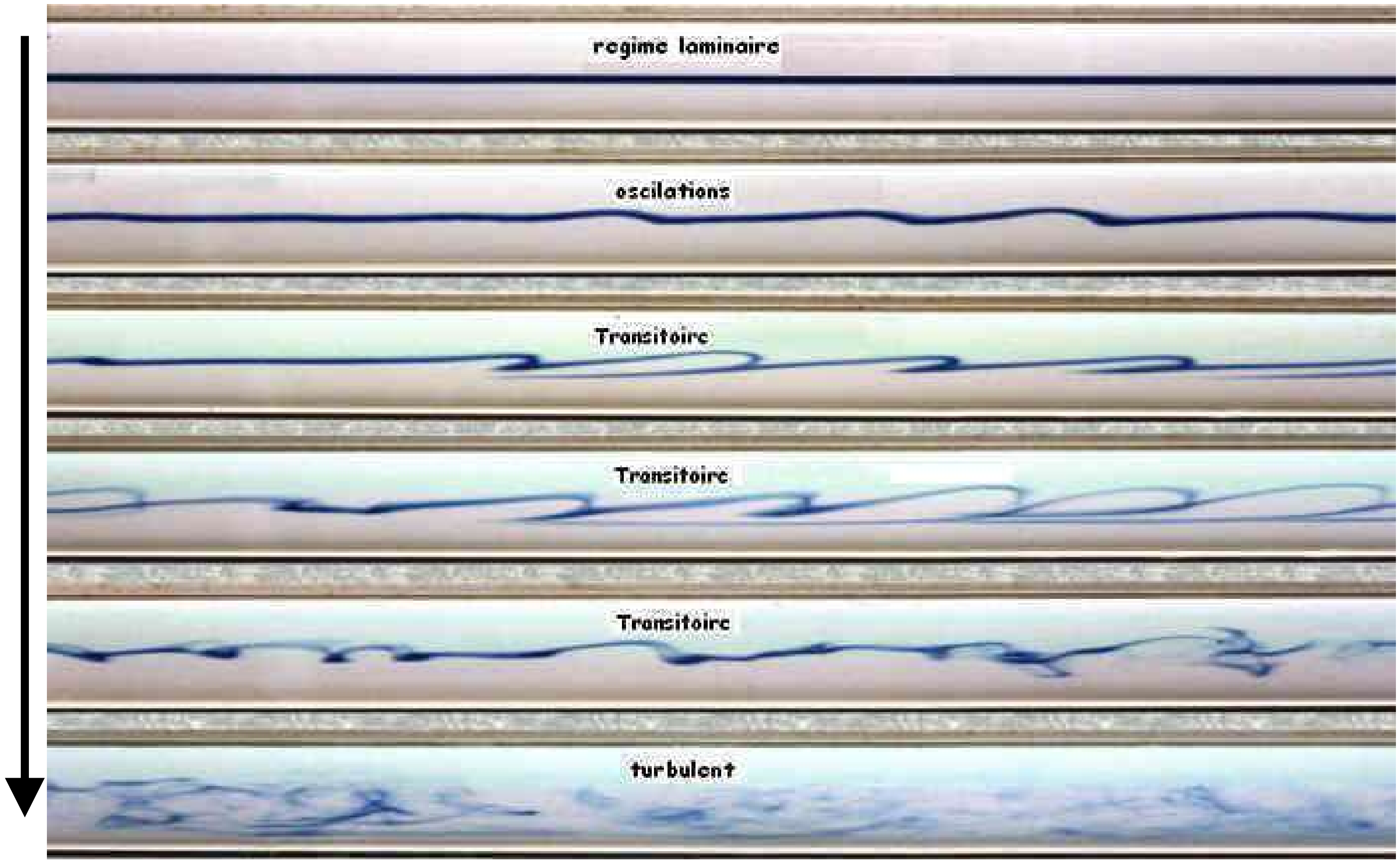
Elles sont proportionnelles à la longueur de conduite.



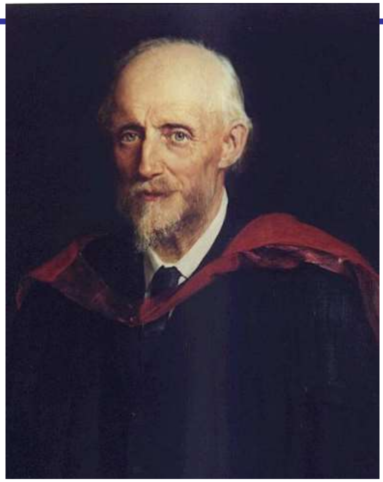
Type d'écoulement

Les pertes de charge dépendent du type d'écoulement.

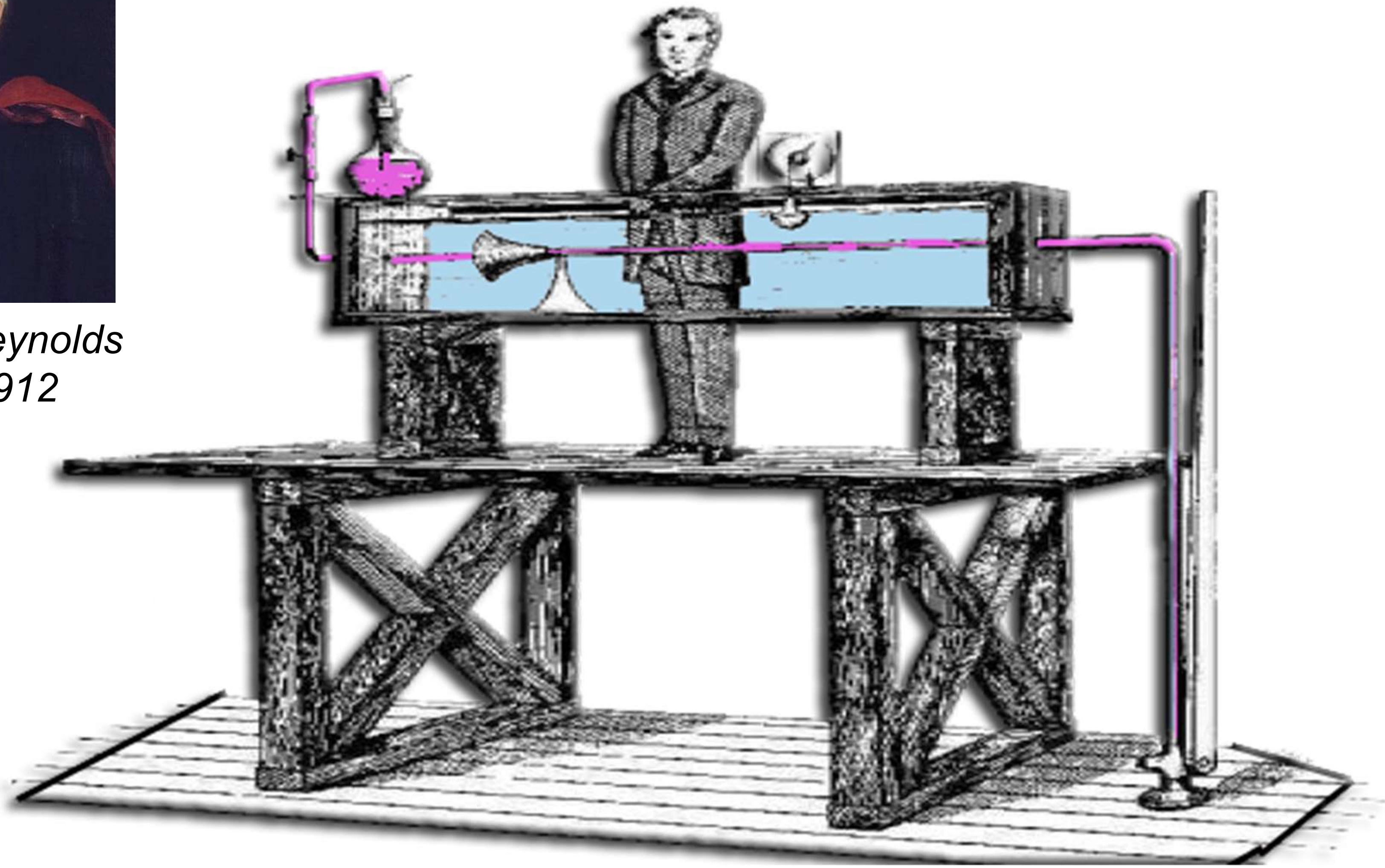
Vitesse augmente



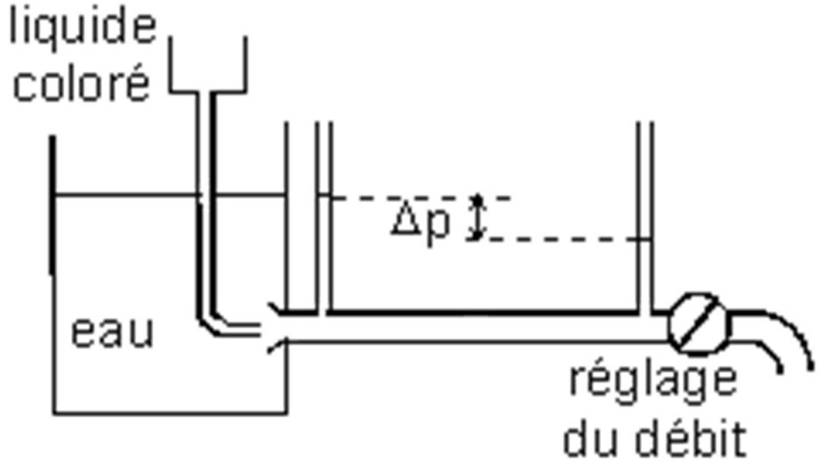
Expériences de ***Reynolds*** (1883)

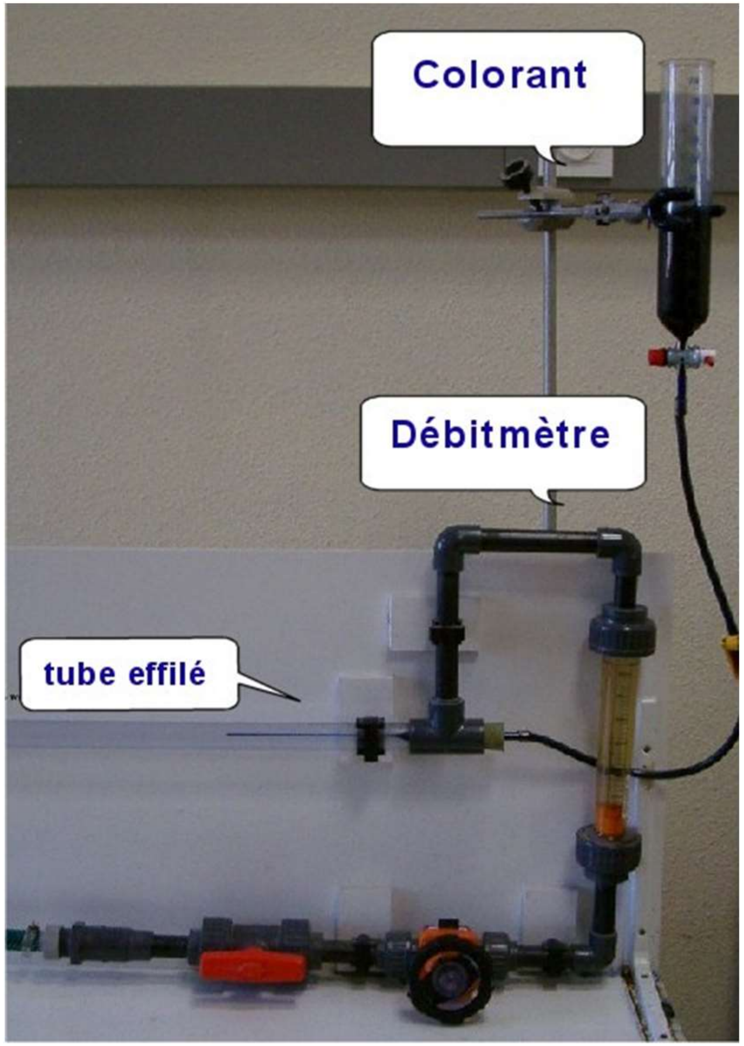


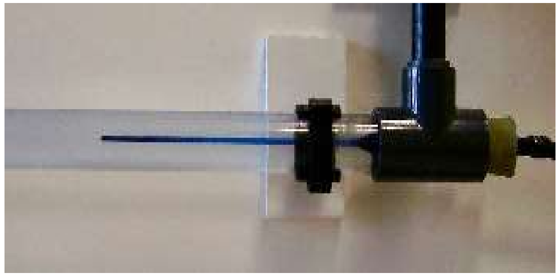
Osborne Reynolds
1842 -1912



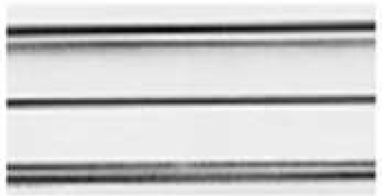
Les expériences réalisées par ***Reynolds*** (1883) lors de l'écoulement d'un fluide dans une conduite cylindrique rectiligne, ont montré l'existence de deux régimes d'écoulement : **laminaire et turbulent**

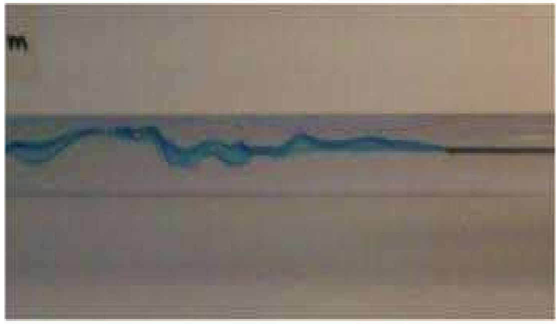




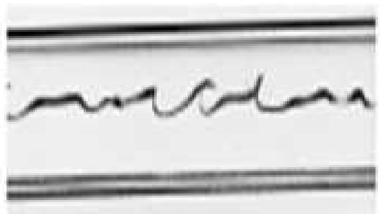


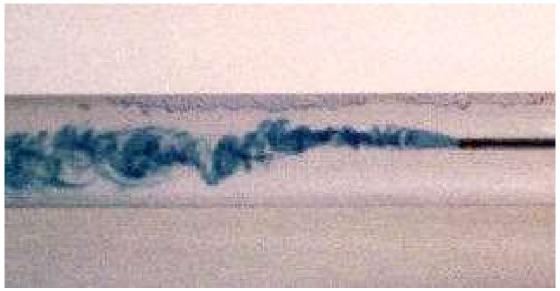
$R_e < 2\,000$: écoulement laminaire



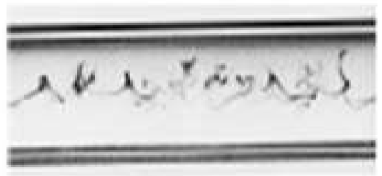


$2\,000 < R_e < 2\,000$: écoulement instable, entre le régime laminaire et le régime turbulent





$R_e > 4\,000$: écoulement turbulent




Laminaire Re<2000 (voir 2300)
a
b
Transitoire 2000 (voir 2300) < Re< 3000 (Voir 4000)
c
d
Turbulent Re>3000 (voir 4000)

En utilisant des fluides divers (viscosité différente), en faisant varier le débit et le diamètre de la canalisation, Reynolds a montré que le paramètre qui permettait de déterminer si l'écoulement est laminaire ou turbulent est un **nombre sans dimension appelé nombre de Reynolds** et donné par :

$$\boxed{\mathrm{Re} = \rho \frac{V \cdot D}{\mu} = \frac{V \cdot D}{\vartheta}}$$

ρ = masse volumique du fluide, V = vitesse moyenne,
D = diamètre de la conduite, μ = viscosité dynamique du fluide,
ϑ = viscosité cinématique

L'expérience montre que :

si Re < 2000 (voir 2300)	***le régime est LAMINAIRE***
si 2000 (voir 2300) < Re < 3000 (voir 4000)	***le régime est intermédiaire***
si Re > 3000 (voir 4000)	***le régime est TURBULENT***

Ces valeurs doivent être considérées comme des ordres de grandeur, le passage d'un type d'écoulement à un autre se faisant progressivement.

Expérimentalement on constate que les pertes de charge générales dépendent des éléments suivants:

- **longueur de la canalisation**
- **viscosité du liquide**
- **diamètre intérieur**
- **débit**
- **rugosité de la canalisation**

Pertes de charge linéaires – pertes de charge singulières

Pertes de charge linéaires

Les pertes de charge linéaires s'expriment par la formule générale de Darcy-Weisbach sous la forme:

Henry Darcy
(1803 – 1858)

Julius Ludwig Weisbach
(1806 – 1871)

$$J = \lambda \frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} \quad \Rightarrow \quad j = \frac{J}{L} = \frac{\lambda}{D}\frac{V^2}{2g}$$

L : est la longueur de la conduite

D : une dimension de la conduite (diamètre pour les conduites circulaire

λ : Coefficient de pertes de charge

Les pertes de charge linéaires sont proportionnelles à la longueur. j représente ainsi la perte de charge par unité de longueur

Le coefficient de pertes de charge dépend du régime de l'écoulement (nombre de Reynolds), de la rugosité de la conduite et de la viscosité du liquide

Pertes de charge linéaires

En écoulement Laminaire R_e<2000, le coefficient de pertes de charge se calcule à partir de la formule de Poiseuille:

$$\boxed{\lambda = \frac{64}{R_e}}$$

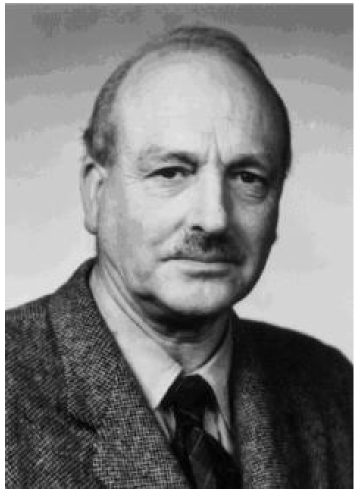
$$\boxed{R_e = \rho\frac{VD}{\mu}}$$

Jean-Louis Marie Poiseuille (1797-1869)

R_e est le nombre de Reynolds
μ la viscosité dynamique du liquide $\mu=10^{-3}$ kg/m·s

Plusieurs formules empiriques et semi empiriques permettent le calcul du coefficient de pertes de charge pour les écoulements turbulents (Re>2000). Nous rappelons ici la formule universelle de pertes de charge de Colbrook White:

Cyril Frank Colebrook (1910-1997)



Cedric Masey White (1898-1993)

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log\left(\frac{\varepsilon}{3{,}7D} + \frac{2{,}51}{R_e\sqrt{\lambda}}\right)$$

ε est la rugosité de la conduite (hauteur des aspérités sur la paroi de la conduite)

Régime d'écoulement	Relation
Laminaire Re<2000	*Poiseuille* $$\lambda = \frac{64}{R_e}$$
Turbulent 2000<Re<5.10^5	*Blasius* $$\lambda = 0.316Re^{-0.25}$$
Turbulent Re>5.10^5	*Karman* $$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2log_{10}\left(\frac{Re\sqrt{\lambda}}{2.51}\right)$$
Turbulent Rugueux	*Karman-Prandtl* $$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2log_{10}\left(\frac{\varepsilon/_D}{3.71}\right)$$
Turbulent Rugueux et semi-rugueux	*Colebrook* $$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2log_{10}\left(\frac{\varepsilon/_D}{3.71} + \frac{2.51}{Re\sqrt{\lambda}}\right)$$

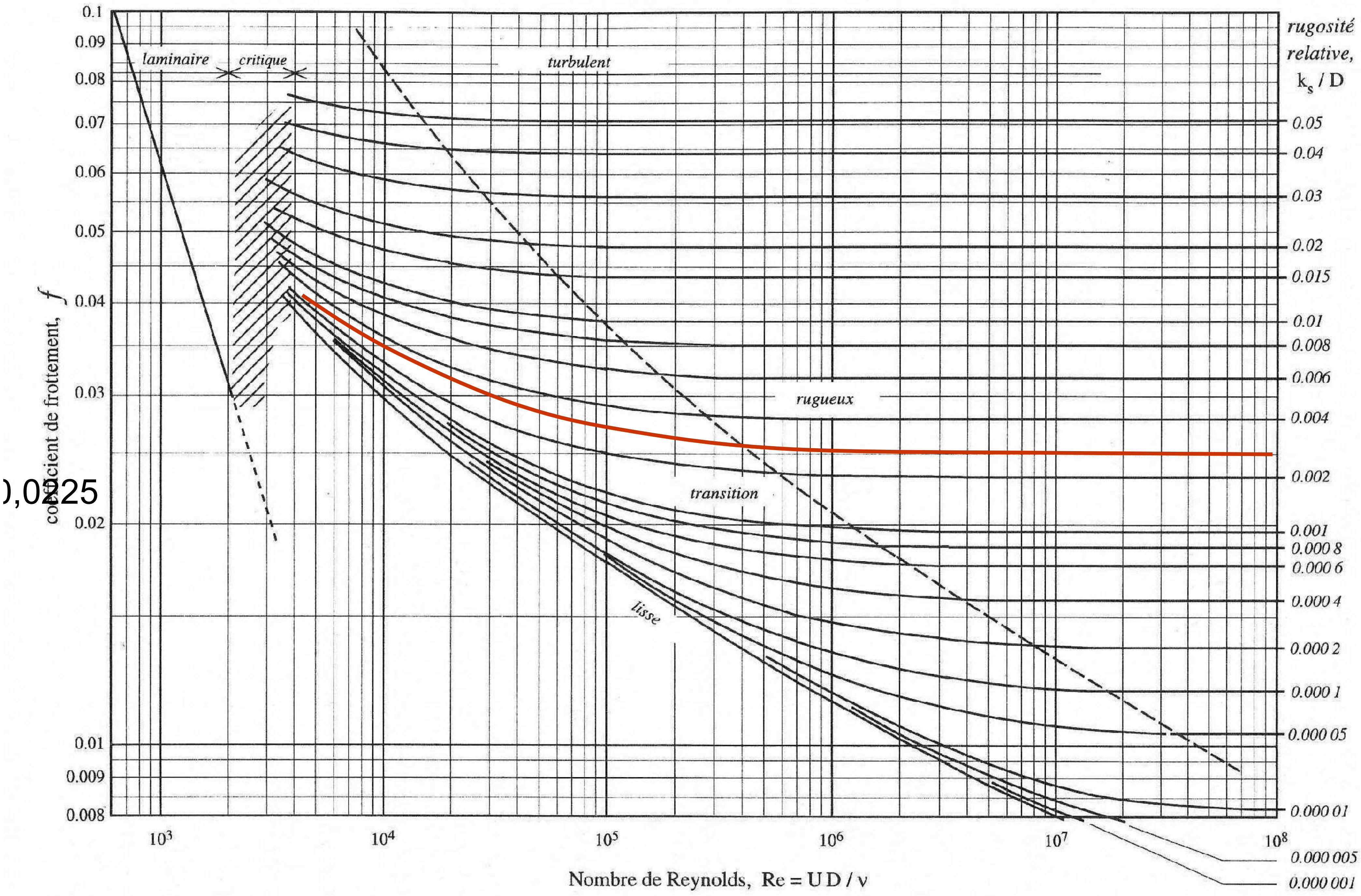
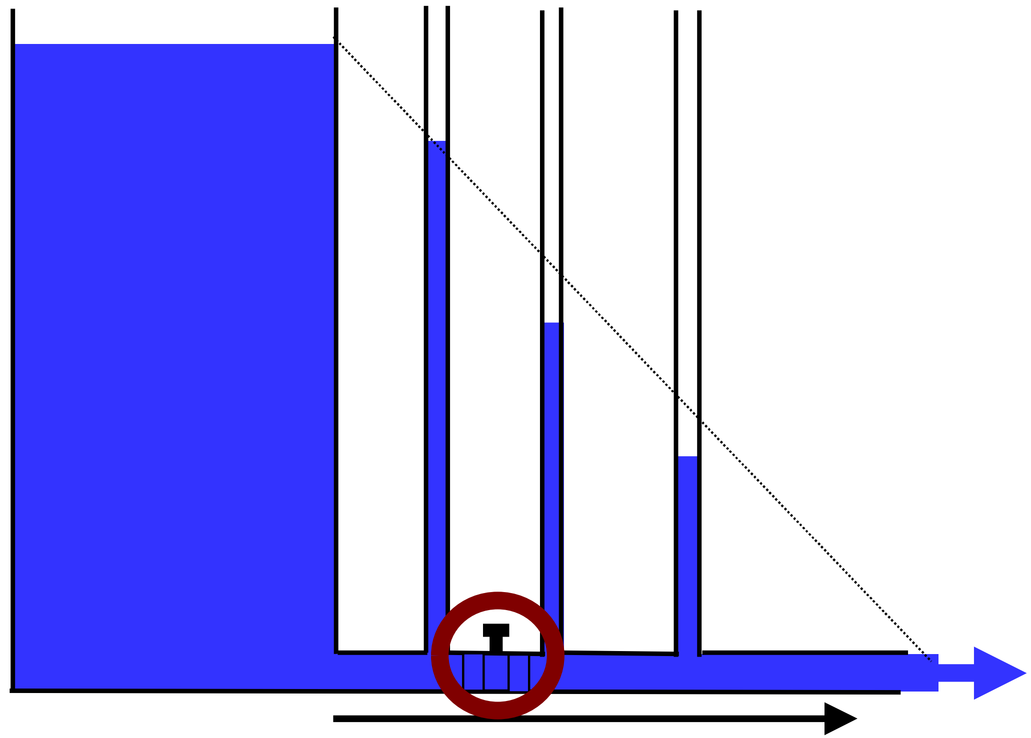


diagramme de Moody

Pertes de charge singulières

Il s'agit des pertes de charge dues aux accidents de parcours (grille, filtre, coude, rétrécissement, vanne …)



Pertes de charge singulières

Les pertes de charge singulières s'expriment par une formule générale de la forme:

$$J = \xi \frac{V^2}{2g}$$

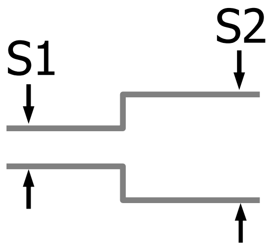
ξ : Coefficient de pertes de charge qui dépend de la nature de la singularité

Parfois, pour simplifier la représentation des réseau, on exprime la perte de charge singulière en longueur équivalente de conduite:

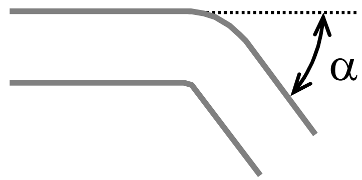
$$\xi \frac{V^2}{2g} = \lambda \frac{L_{eq}}{D} \frac{V^2}{2g} \quad \Rightarrow \quad L_{eq} = \frac{\xi}{\lambda} D = nD$$

Elargissement brusque

$$\xi = (1 - S_1/S_2)^2$$



Coude brusque

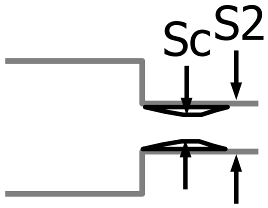


$$\xi = \sin^2 \alpha + 2 \sin^4 \frac{\alpha}{2}$$

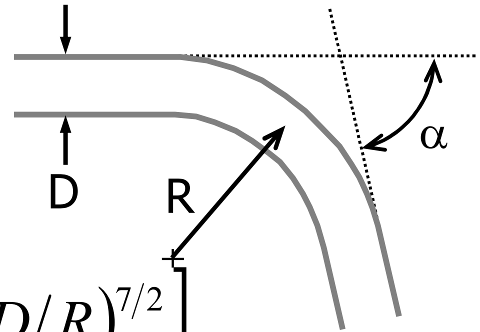
Rétrécissement brusque

$$\xi = (1/\sigma - 1)^2$$

$$\sigma = S_c / S_2$$

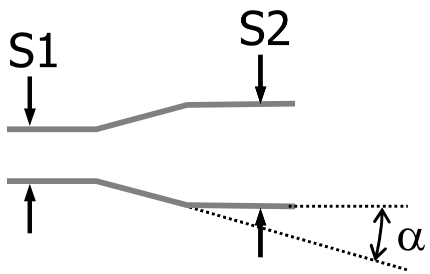


Coude arrondi



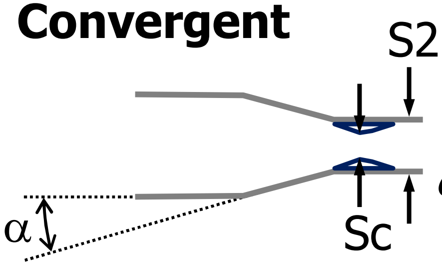
$$\xi = \frac{\alpha}{\pi}\left[0{,}131 + 1{,}847 (D/R)^{7/2}\right]$$

Divergent



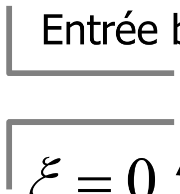
$$\xi = (1 - S_1/S_2)^2 \sin \alpha$$

Convergent



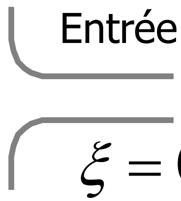
$$\xi = (1/\sigma - 1)^2 \sin \alpha$$

Entrée d'une canalisation



Entrée brusque

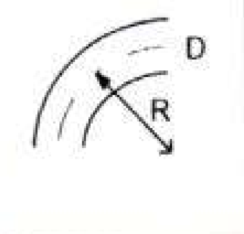
$$\xi = 0{,}5$$



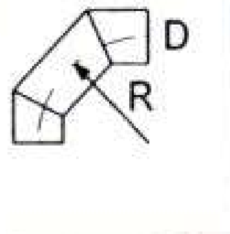
Entrée progressive

$$\xi = 0{,}04$$

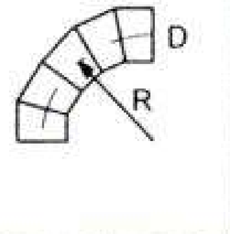
Conduits à section circulaire (diamètre = D)



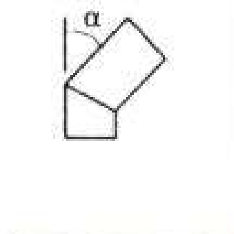
R/D	ζ
0,5	0,9
0,75	0,45
1,0	0,35
1,5	0,25
2,0	0,2



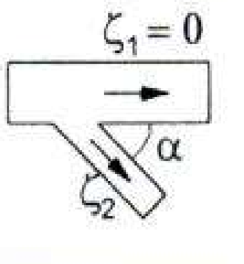
R/D	ζ
0,5	1,3
0,75	0,8
1,0	0,5
1,5	0,3
2,0	0,25



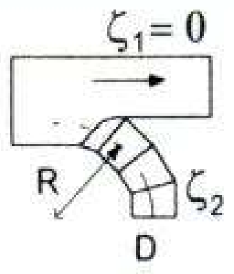
R/D	ζ
0,5	1,1
0,75	0,6
1,0	0,4
1,5	0,25
2,0	0,2



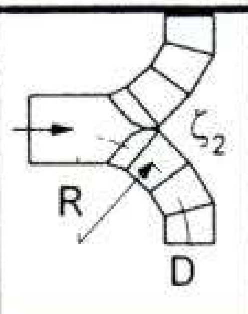
α	ζ
15°	0,1
30°	0,2
45°	0,5
60°	0,7
90°	1,3



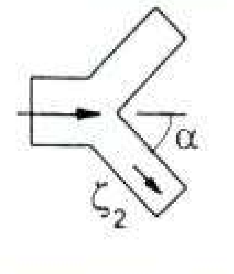
α	ζ_2
15°	0,1
30°	0,3
45°	0,5
60°	0,7
90°	1,3



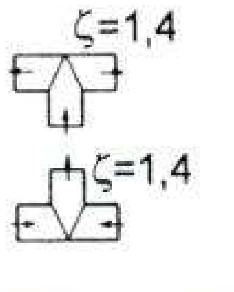
R/D	ζ_2
0,5	1,3
0,75	0,9
1,0	0,8
1,5	0,6
2,0	0,5

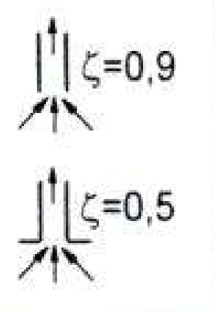


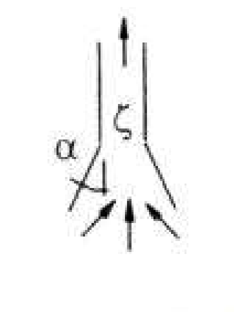
R/D	ζ_2
0,5	1,2
0,75	0,6
1,0	0,4
1,5	0,25
2,0	0,2



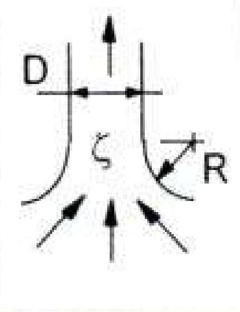
α	ζ_2
15°	0,1
30°	0,3
45°	0,7
60°	1,0
90°	1,4



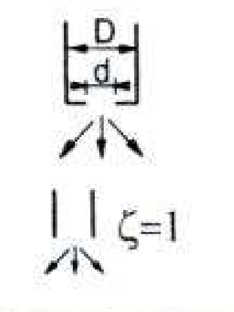




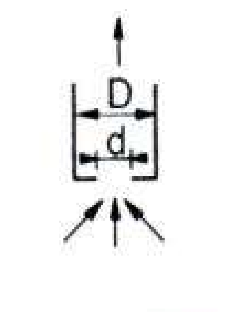
α	ζ
0°	0,9
15°	0,5
30°	0,3
45°	0,3
60°	0,4
90°	0,5



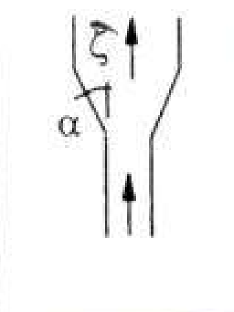
R/D	ζ
0,2	0,2
0,5	0,1
0,8	0,05



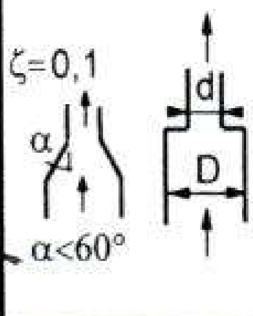
d/D	ζ
0,1	2,5
0,2	2,5
0,4	2,5
0,6	2,3
0,8	1,9
0,9	1,5



d/D	ζ
0,1	1,0
0,2	0,9
0,4	0,7
0,6	0,4
0,8	0,2

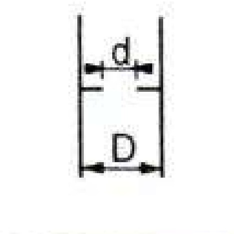


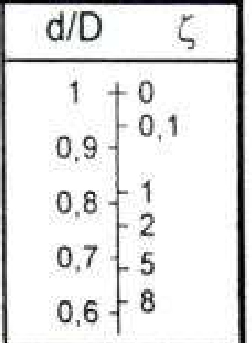
α	ζ
5°	0,15
10°	0,25
15°	0,4
30°	0,8
45°	0,9
90°	1,0



d/D	ζ
0,1	0,6
0,2	0,5
0,4	0,4
0,6	0,3
0,8	0,2

diaphragme





Série d'exercices N°01 (Hydraulique Générale II)

Exercice 1 :

Du pétrole de viscosité dynamique $\mu = 0{,}65 \cdot 10^{-3}$ Pa.s et de densité 0,9 circule dans une conduite de1700m longueur et de diamètre 30cm et de 0,3mm de rugosité à un débit volumique 20 l/s.

a) Déterminer la viscosité cinématique du pétrole dans le système MKS (SI) et le système CGS
b) Calculer la vitesse de l'écoulement et le débit massique
c) Calculer le nombre de Reynolds et en déduire le régime d'écoulement
d) Déterminer le coefficient de perte de charge linéaire graphiquement et en utilisant la formule qui convient
e) Calculer la perte de charge dans la conduite

Exercice 2 :

Déterminer la vitesse critique de l'écoulement de deux fluides dans une conduite de diamètre 20 cm (on suppose pour les deux cas que l'écoulement est laminaire Re =2000)

- ✓ Du pétrole de viscosité 1,42 cSt
- ✓ De l'eau de viscosité 1,16 cPo

Exercice 3 :

Déterminer la perte de charge pour une conduite de 25 cm de diamètre et de rugosité absolue ε = 0,25mm et de longueur 500m si le débit est de 120 l/s dans laquelle s'écoule une huile de densité 0,85 et de viscosité 9 cSt.

SOL EXERCICE 01

système cgs : le Stokes (St) $1m^2/s = 10^4$ St$=10^6$ cSt

$\mu = 0{,}65 \cdot 10^{-3}$ Pa.s et de densité 0,9

$\rho_p = d_P \cdot \rho = 0{,}9 \cdot 10^3 Kg/m^3$

$$\upsilon = \frac{\mu}{\rho} = \frac{0{,}65 \cdot 10^{-3}}{0{,}9 \cdot 10^3} = 0{,}72 \cdot 10^{-6} m^2/s$$ En SI

En CGS $\upsilon = 0{,}72 \cdot 10^{-6} \cdot 10^4 = 0{,}72 \cdot 10^{-2} St = 0{,}72 cSt$

diamètre 30cm à un débit volumique 20 l/s.

$$V = \frac{Q}{S} = \frac{4Q}{\pi \cdot D^2} = \frac{4 \cdot 20 \cdot 10^{-3}}{3{,}14 \cdot 0{,}3^2} = 0{,}28\ m/s$$

$$Q\mathrm{m} = \rho \cdot \mathrm{Q} = 0{,}9 \cdot 10^3 \cdot 20 \cdot 10^{-3} = 18\mathrm{Kg/s}$$

$$Re = \frac{V \cdot D}{\upsilon} = \frac{0{,}28 \cdot 0{,}3}{0{,}72 \cdot 10^{-6}} = 1{,}16 \cdot 10^5 > 2000 \text{ regime turbulent}$$

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0{,}3}{300} = 0{,}001$$

De la courbe de Moody ➔ $\lambda = 0{,}0225$

$-\ 2000 < Re = 1{,}16 \cdot 10^5 < 5 \cdot 10^5$ ==⇒la formule de Blasius peut être utilisée➔

$$\lambda = 0{,}316 \cdot Re^{-0{,}25} = 0{,}316 \cdot (1{,}16 \cdot 10^5)^{-0{,}25} = 0{,}017$$

- En utilisant la formule de colebrook-white car $Re >\ 2000$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log\left(\frac{\varepsilon}{3{,}7D} + \frac{2{,}51}{R_e\sqrt{\lambda}}\right)$$

$$\lambda 0 = 0{,}02 \Rightarrow \lambda 1 = 0{,}022 \Rightarrow \lambda 2 = 0{,}022 \text{ donc } \lambda = 0{,}022$$

$$\lambda = 0{,}022$$

$$\Delta H_l = J = \frac{\lambda L}{D} \cdot \frac{V^2}{2g} = \frac{0{,}022 \cdot 1700}{0{,}3} \cdot \frac{0{,}28^2}{2 \cdot 9{,}81} \approx 0{,}5mce$$

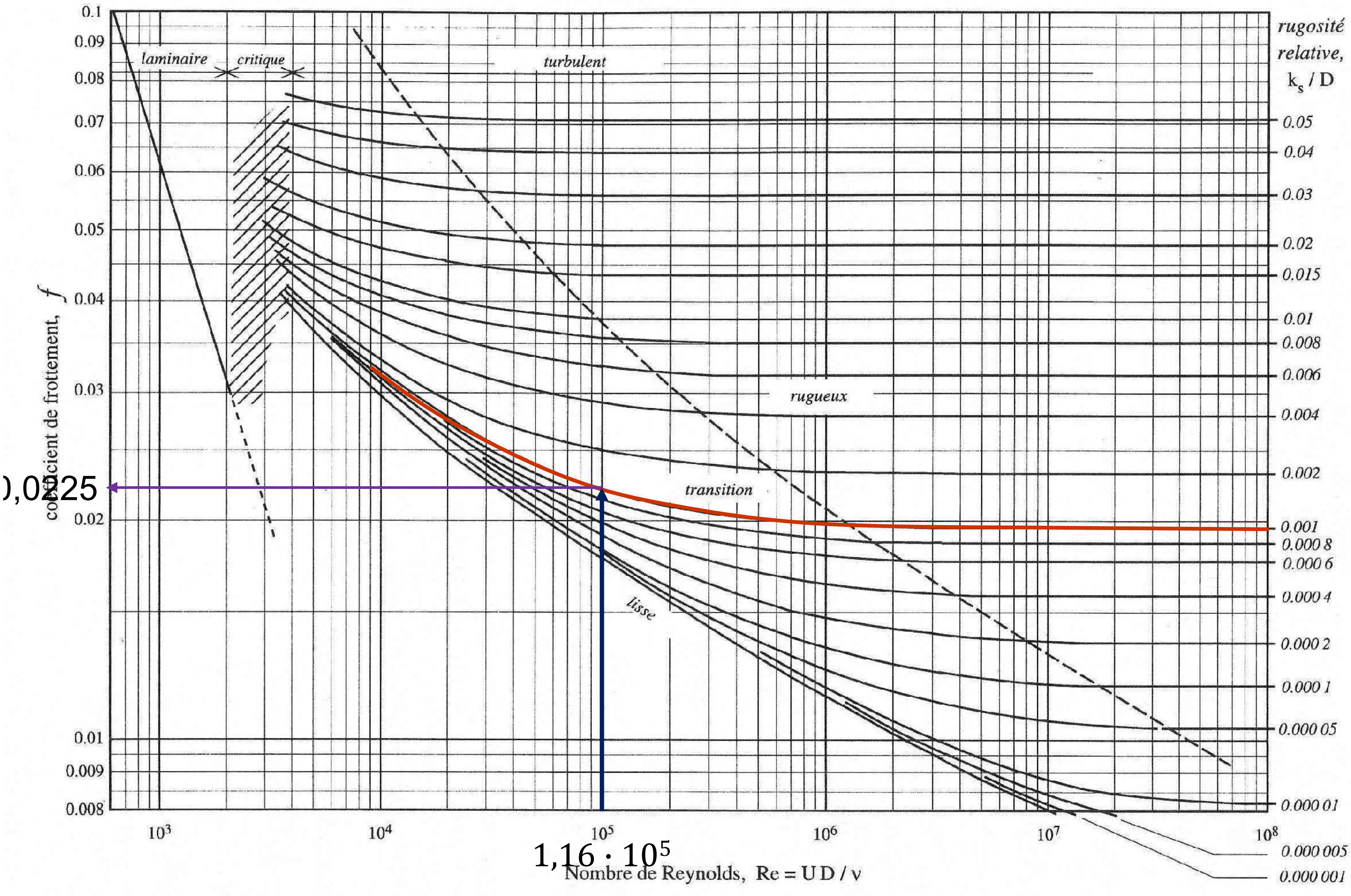
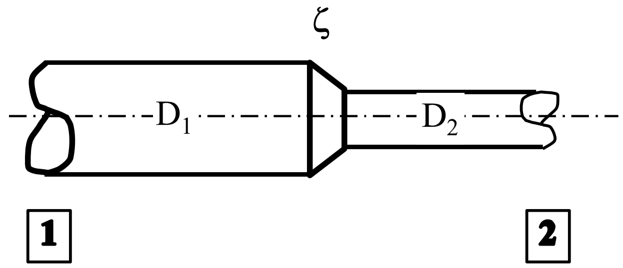


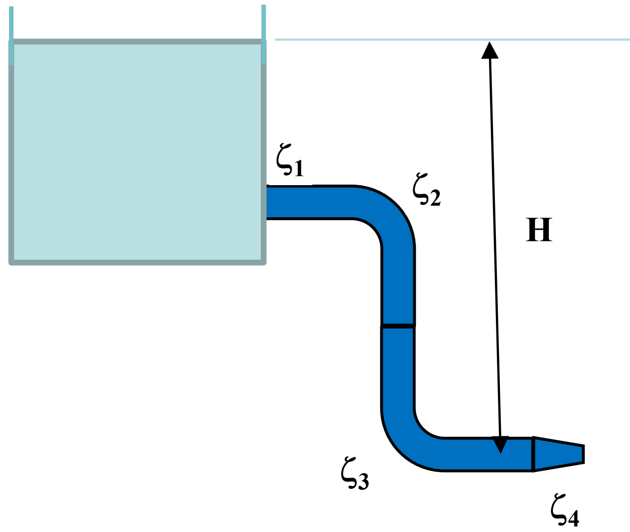
diagramme de Moody

Exercice 4 :

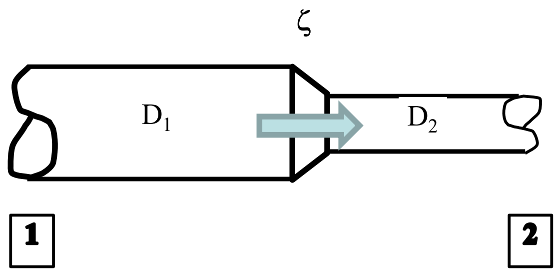
Une conduite constituée de deux tronçons (figure en face) de diamètres et de longueurs différentes transportant de l'eau de masse volumique ρ = 1000 kg/m^3 et de viscosité cinématique 10^{-6} m^2/s
Calculer la différence de pression les deux extrémités de la conduite sachant que :
L_1= 5m, L_2 = 2m, D_1 = 30mm, D_2 = 10 mm, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ =0,1mm , V_1 = 0,6 m/s ζ = 0,45



Exercice 5 :
Soit un system hydraulique de figure en face (le jet sort à l'air libre). La perte de charge du convergent est négligeable (ζ_4=0) par rapport aux pertes dues à l'entrance et aux coudes. On demande de calculer le débit en volume sachant que :
H=20m; D_1= 0,2m; D_2= 0,1m ; L= 300m; ζ_1= 0.08 $\zeta_2 = \zeta_3$= 0.25; υ= 1,3x10^{-6} m^2/s; ε = 0,8mm



Exercice 4



Une conduite constituée de deux tronçons (figure en face) de diamètres et de longueurs différentes transportant de l'eau de masse volumique ρ = 1000 kg/m³ et de viscosité cinématique 10^{-6} m²/s
Calculer la différence de pression les deux extrémités de la conduite sachant que :
L_1= 5m, L_2 = 2m, D_1 = 30mm, D_2 = 10 mm, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ =0,1mm , V_1 = 0,6 m/s ζ = 0,45

Appliquons l'équation de Bernoulli entre (1) et (2)

$$\frac{\mathbf{P}_1}{\rho g} + z_1 + \alpha_1 \frac{V_1{}^2}{2g} = \frac{\mathbf{P}_2}{\rho g} + z_2 + \alpha_2 \frac{V_2{}^2}{2g} + \Delta H_{12}$$

$$\frac{\mathbf{P}_1}{\rho g} - \frac{\mathbf{P}_2}{\rho g} = z_2 - z_1 + \frac{V_2{}^2}{2g} - \frac{V_1{}^2}{2g} + \Delta H_{12} \Leftrightarrow \frac{\Delta P}{\rho g} = \cancel{z_2 - z_1} + \frac{V_2{}^2 - V_1{}^2}{2g} + \Delta H_{12}$$

$$z_2 = z_1 \Rightarrow \frac{\Delta P}{\rho g} = \frac{V_2{}^2 - V_1{}^2}{2g} + \Delta H_{12}$$

De l'équation de continuité $Q = cst \Rightarrow V_1 \cdot S_1 = V_2 \cdot S_2 \Rightarrow V_2 = V_1 \cdot \frac{S_1}{S_2} = V_1 \cdot \frac{D_1^2}{D_2^2}$

$$V_1 = 0{,}6 m/s \Rightarrow V_2 = 0{,}6 \cdot \frac{0{,}03^2}{0{,}01^2} = 5{,}40 m/s$$

$$\Delta H_{12} = \Delta H_L + \Delta H_S$$

$\Delta H_S = \xi \frac{V^2}{2g}$ (l'usage prend toujours la vitesse la plus importante donv $V=V_2$=5,4m/s)

$$\Delta H_S = 0{,}45 \frac{5{,}4^2}{2 \cdot 9{,}81} \approx 0{,}67 mce$$

Perte de charge linéaire

$$\Delta H_l = J = \frac{\lambda L}{D} \cdot \frac{V^2}{2g}$$

$$\Delta H_L = \Delta H_{L1} + \Delta H_{L2} = \frac{\lambda_1 L_1}{D_1} \cdot \frac{V_1^{\,2}}{2g} + \frac{\lambda_2 L_2}{D_2} \cdot \frac{V_2^{\,2}}{2g}$$

λ_1?

$$Re_1 = \frac{V_1 \cdot D_1}{\upsilon} = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}03}{10^{-6}} = 1{,}8 \cdot 10^4 > 2000$$

de la C de Moody λ_1 =0,032

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0{,}1}{30} = 0{,}0033$$

λ_2?

$$Re_2 = \frac{V_2 \cdot D_2}{\upsilon} = \frac{5{,}4 \cdot 0{,}01}{10^{-6}} = 5{,}4 \cdot 10^4 > 2000$$

de la C de Moody λ_1 =0,038

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0{,}1}{10} = 0{,}01$$

$$\Delta H_L = \Delta H_{L1} + \Delta H_{L2} = \frac{0{,}032 \cdot 5}{0{,}03} \cdot \frac{0{,}6^2}{2 \cdot 9{,}81} + \frac{0{,}03 \quad \cdot 2}{0{,}01} \cdot \frac{5{,}4^2}{2 \cdot 9{,}81} = 0{,}098 + 11{,}295 = \mathbf{11{,}39}\boldsymbol{mce}$$

$$\frac{\Delta P}{\rho g} = \frac{5{,}4^2 - 0{,}6^2}{2 \cdot 9{,}81} + 0{,}67 + 11{,}39 = 13{,}528 mce$$

$$\Delta P = 132{,}71\ Kpa = 1{,}327\ bar$$

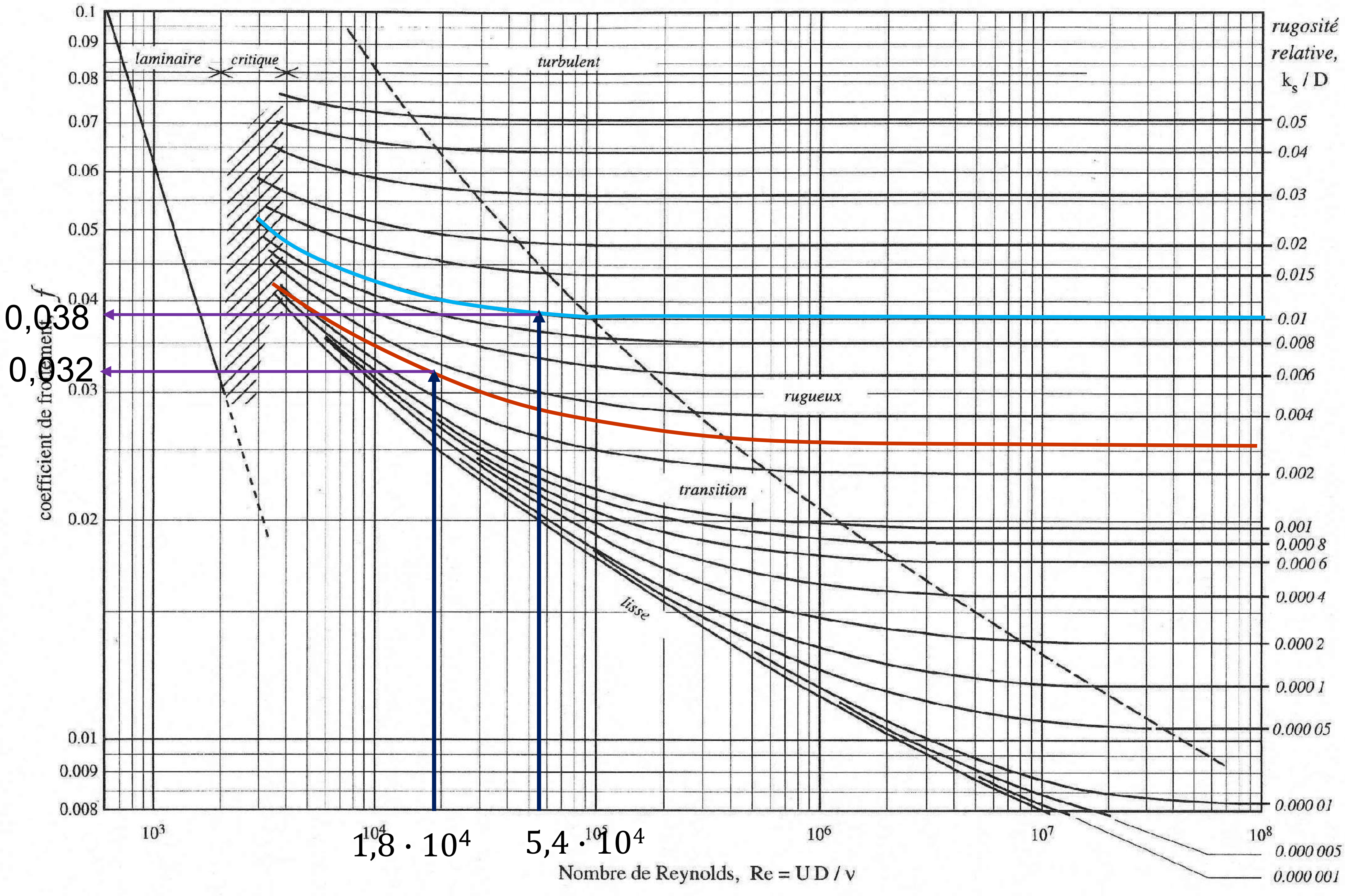


diagramme de Moody