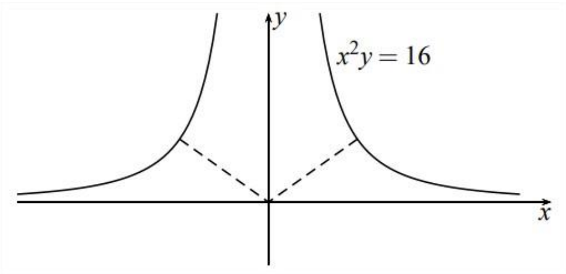
Corrigé
Contrôle continu

Exercice 1 (10 points)

1. Déterminer le(s) point(s), de la courbe $x^2y = 16$, le(s) plus proche(s) (distance minimale) au point d'origine (0,0).
2. Déterminer la distance minimale

N.B : Le tracé de la courbe $x^2y = 16$ permet de se rendre compte de l'existence de deux points symétriques par rapport à l'axe OY et correspondant à la distance minimale recherchée.



Le problème peut être exprimé comme suit, puisqu'il est équivalent de minimiser la distance de la courbe au point d'origine $\sqrt{x^2 + y^2}$ ou de minimiser **son carré** $x^2 + y^2$ (le carré de la distance) :

$$\min f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$s.c. \quad g(x, y) = x^2y - 16 = 0 \quad (C)$$

Etape à suivre pour résoudre ce problème :

1. Vérification de la qualification de la contrainte
2. Montrer l'existence d'au moins une solution (un minimum global)
3. Trouver les points critiques.
4. Déterminer leurs natures.
5. Déduire le(s) point(s) qui vérifie(nt) la distance minimale.

1ère étape : Etude de la qualification de la contrainte

Cette vérification consiste à résoudre le système d'équation $\nabla g(x, y) = 0_{R^2}$ et étudier la régularité de la contrainte C.

$$\nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} 2xy = 0 \\ x^2 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y \in R \end{cases}$$

$\nabla g(x,y)$ s'annule au points ayant $x=0,\ \forall\, y\in R$, mais ces points n'appartiennent pas à notre contrainte (les points $(0,y)\notin C\ car\ g(0,y)=y.0^2-16=0-16=0$ impossible). Ainsi, l'ensemble C est régulier (tous les points de C sont réguliers), et donc tous les points critiques du Lagrangien que nous allons les rechercher sont des points critiques du problème d'optimisation.

Note : On peut laisser cette vérification après la recherche des points critiques du Lagrangien en étudiant la régularité de chaque point.

2ème étape : Montrer l'existence d'au moins une solution (un minimum global)

Pour cela :

1. Il faut montrer que f est continue sur C.
2. Il faut montrer que C est fermé.
3. Il faut que l'une des deux conditions suivantes soit vérifiée :
   a. f est coércive
   b. C est borné

1. <u>Montrer que f est continue sur C.</u>

f est un polynôme de 2ème degré, donc f est **continu** sur $C\subset R^2$

2. <u>Montrer que C est fermé.</u>

$$C=\{(x,y)\ \notin \mathrm{R}^2, x^2y-16=0\}$$

L'ensemble $\{0\}$ est fermé et la fonction $g(x,y)=x^2y-16$ est continue sur R^2, ainsi l'image réciproque C de l'ensemble $\{0\}$ par la fonction $g(x,y)=x^2y-16$ est un ensemble **fermé**.

3. <u>Montrer que f est coércive</u>

Posons : $\begin{cases} x=rcos(\theta) \\ y=rsin(\theta)\end{cases}$ avec $r=\left\|(x,y)\right\|_2>0$ et $\theta\in[0,2\pi[$.

$$\lim_{\|x,y\|_2\to+\infty} f(x,y)=\lim_{r\to+\infty}\Phi_f(r,\theta)=\lim_{r\to+\infty} r^2\cos^2(\theta)+r^2\sin^2(\theta)=\lim_{r\to+\infty} r^2=+\infty$$

Ainsi, f est coércive.

La fonction f est continue et coércive et la contrainte C est fermée, et donc le problème admet au moins une solution.

Remarque :

Le problème admet plusieurs solutions (la solution n'est pas unique) car l'ensemble C n'est pas convexe (Graphiquement, si on prend n'importe quels deux points A et B de l'ensemble C, on trouve que le segment qui relie A et B n'est pas inclus dans C).

3ème étape : Recherche des points critiques

a. Calcul du Lagrangien

Les fonctions f et g sont continues et différentiables (de classe C^1).

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x^2y - 16)$$

b. Recherche des points critiques du Lagrangien

$$\nabla L(x, y, \lambda) = \begin{cases} 2x + 2xy\lambda \\ 2y + x^2\lambda \\ x^2y - 16 \end{cases}$$

Pour trouver les points critiques du L, il faut résoudre le système d'équation :

$$\begin{cases} 2x + 2xy\lambda = 0 \\ 2y + x^2\lambda = 0 \\ x^2y - 16 = 0 \end{cases}$$

C'est un système de 3 équations non-linéaires en 3 dimensions.

Rappel : si on a p contraintes, donc on aura 2^p à étudier.

On a une seule contrainte ($p = 1$) dans notre problème, donc on aura 2 cas à étudier.

<u>1er cas : $\lambda = 0$</u>

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \\ x^2y - 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ -16 = 0 \end{cases}$$ impossible, donc cette solution est refusée.

<u>2ème cas : $\lambda \neq 0$</u>

$$\begin{cases} 2x + 2xy\lambda = 0 \\ 2y + x^2\lambda = 0 \\ x^2y - 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(1 + y\lambda) = 0 & (L1) \\ 2y + x^2\lambda = 0 & (L2) \\ x^2 = \frac{16}{y} & (L3) \end{cases}$$

(L1) $\Leftrightarrow$ $x = 0$ ou bien $1 + y\lambda = 0$

Si on remplace x par 0 dans (L3), on obtient : $0 = \frac{16}{y}$, **impossible**.

$1 + y\lambda = 0 \leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{y}$

On remplace dans (L2), λ par $-\frac{1}{y}$ et x^2 par $\frac{16}{y}$, on obtient : $2y - \frac{1}{y}.\frac{16}{y} = 2y - \frac{16}{y^2} = 0 \leftrightarrow$ $2y^3 - 16 = 8 \leftrightarrow y^3 = 8 \leftrightarrow \boldsymbol{y = 2}$. $(\rightarrow \lambda = -\frac{1}{2})$

$\leftrightarrow x^2 = 8 \leftrightarrow \boldsymbol{x = 2\sqrt{2}}$ ou bien $\boldsymbol{x = -2\sqrt{2}}$.

Ainsi, les points critiques du Lagrangien sont $(2\sqrt{2}, 2, -\frac{1}{2})$ et $(-2\sqrt{2}, 2, -\frac{1}{2})$.

Puisque tout l'ensemble C régulier (1ère étape), alors $X_1^*(2\sqrt{2})$ et $X_2^*(-2\sqrt{2})$ sont des points critiques du problème d'optimisation.

4ème étape : Déterminer la nature des points critiques

Puisque le problème admet plusieurs solutions et les deux points critiques X_1^* et X_2^* ont la même image par la fonction f ($f(X_1^*) = f(X_2^*) = 12$), ainsi le problème admet un minimum global égal à 12 aux points $X_1^*(2\sqrt{2}, 2)$ et $X_2^*(-2\sqrt{2}, 2)$.

Ces deux points de la courbe $x^2y - 16 = 0$ sont les points les plus proches au point d'origine (0,0) avec une distance égale à $3\sqrt{2}$.

Exercice 2 (10 points)

Trouver les points critique du $f(x,y) = x^2y - 3e^x$ sous la contrainte $g(x,y) = y - e^x = 0$, et déterminer leur nature.

Etape à suivre :

1. Vérification de la qualification de la contrainte
2. Trouver les points critiques.
3. Déterminer leurs natures.

$$f(x,y) = x^2y - 3e^x$$

$$\text{s.c. } g(x,y) = y - e^x = 0 \quad (C)$$

1ère étape : Etude de la qualification de la contrainte

On doit résoudre le système d'équation : $\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} -e^x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} x = ? \\ y = ? \end{cases}$$

Ce système n'a pas de solution car $-e^x < 0$ et $1 > 0 \rightarrow \nabla g(x,y) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \; \forall \; (x,y) \in R$.

Ainsi, l'ensemble C est régulier et donc tous les points critiques du Lagrangien sont des points critiques du problème d'optimisation.

2ème : Recherche des points critiques

a. Calcul du Lagrangien

Les fonctions f et g sont continues et différentiables (de classe C^1).

$$L(x,y,\lambda) = x^2y - 3e^x + \lambda(y - e^x)$$

Pour trouver les points critiques du L, il faut résoudre le système d'équation :

$$\begin{cases} 2xy - 3e^x - \lambda e^x = 0 \\ x^2 + \lambda = 0 \\ y - e^x = 0 \end{cases}$$

C'est un système de 3 équations non-linéaires en 3 dimensions.

Rappel : si on a p contraintes, donc on aura 2^p cas à étudier.

On a une seule contrainte ($p = 1$) dans notre problème, donc on aura 2 cas à étudier.

<u>**1er cas : $\lambda = 0$**</u>

$$\begin{cases} -3 = 0 \\ x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \leftrightarrow \text{ impossible, donc cette solution est refusée.}$$

<u>**2ème cas : $\lambda \neq 0$**</u>

$$\begin{cases} 2xy - 3e^x - \lambda e^x = 0 \\ x^2 + \lambda = 0 \\ y - e^x = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 2xy - 3e^x - \lambda e^x = 0 & (L1) \\ \lambda = -x^2 & (L2) \\ y = e^x & (L3 \end{cases}$$

On remplace dans L3, λ par $-x^2$ et y par e^x, on obtient :

$2xe^x - 3e^x + x^2e^x = 0 \;\leftrightarrow\; e^x(x^2 + 2x - 3) = 0$ (L1)

$e^x > 0$, donc la solution de L1 est la solution de $x^2 + 2x - 3 = 0$

C'est une équation de 2ème degré.

$$\Delta=16 \rightarrow \begin{cases} x = -3 \rightarrow y = e^{-3} \; et \; \lambda = -9 \\ ou \; bien \\ x = 1 \rightarrow y = e \; et \; \lambda = -1 \end{cases}$$

Le lagrangien admet deux points critiques $(-3, e^{-3}, -9)$ et $(1, e, -1)$.
L'ensemble C est régulier, et donc $X_1^*(-3, e^{-3})$ et $X_2^*(1, e)$ sont des points critiques du problème d'optimisation.

3ème étape : Déterminer la nature des points critiques du problème

La fonction f est deux fois différentiables (de classe C^2).
On calcule d'abord la matrice Hessienne bordée.

$$H_B = \begin{pmatrix} 0 & J_G \\ J_g^t & \nabla^2_{x,y} L \end{pmatrix}$$

$J_g = \left(\frac{dg}{dx}, \frac{dg}{dy}\right) = (-e^x, 1) \rightarrow J_g^t = \begin{pmatrix} -e^x \\ 1 \end{pmatrix}$

$\nabla_{x,y} L = \begin{pmatrix} 2xy - 3e^x - \lambda e^x \\ x^2 + 1 \end{pmatrix} \rightarrow \nabla^2_{x,y} L = \begin{pmatrix} 2y - 3e^x - \lambda e^x & 2x \\ 2x & 0 \end{pmatrix}$.

$$H_B = \begin{pmatrix} 0 & -e^x & 1 \\ -e^x & 2y - 3e^x - \lambda e^x & 2x \\ 1 & 2x & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Point X_1^* (-3,e^{-3}) :</u>

On calcule H_B au point $(-3, e^{-3}, -9)$.

$$H_B(-3, e^{-3}, -9) = \begin{pmatrix} 0 & -e^{-3} & 1 \\ -e^x & 8e^{-3} & -6 \\ 1 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

On a une seule contrainte ($p = 1$) et deux variables ($n = 2$), donc on doit calculer le déterminant mineur principal H_2.

Rappel : avec p contraintes et n variables, on doit calculer $H_{p+1},\ H_{p+2}, \dots, H_n$.

$$H_2 = \begin{vmatrix} 0 & -e^{-3} & 1 \\ -e^x & 8e^{-3} & -6 \\ 1 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 0.49 > 0$$

H_2 est positif, et donc le problème d'optimisation admet un maximum local au point

X_1^* (-3,e^{-3}).

<u>Point $X_2^*(1, e)$:</u>

On calcule H_B au point $(1, e, -1)$.

$$H_B(1, e, -1) = \begin{pmatrix} 0 & -e & 1 \\ -e & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} 0 & -e & 1 \\ -e & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -10.87 > 0$$

H_2 est négatif, et donc le problème d'optimisation admet un minimum local au point $X_1^*(1, e)$.

Remarque 1 :

Le problème n'admet pas un minimum global car : (théorème d'existence d'un minimum global)

- La contrainte C est fermée mais **elle n'est pas bornée.**
- f est continue mais **elle n'est pas coércive** ($\lim\limits_{||x,y||\to+\infty} f(x,y)$ dépend de θ).

Le problème n'admet pas un maximum global car :

- La contrainte C est fermée mais **elle n'est pas bornée**.
- $-f$ est continue mais **elle n'est pas coércive** ($\lim\limits_{||x,y||\to+\infty} -f(x,y)$ dépend de θ).

Théorème d'existence d'un maximum global

Soient C une contrainte fermée et f une fonction continue de C dans R.

1. $-f\ coércive \to\ \exists\ a \in C : f(a) = \max\limits_{X\in C} f(X)$
2. $C\ bornée\ \to\ \exists\ a \in C : f(a) = \max\limits_{X\in C} f(X)$

Théorème d'unicité d'un maximum global

Sous les mêmes hypothèses du théorème d'existence d'un maximum global, si f est strictement concave et C est convexe, alors :

$\exists!\, a \in C : f(a) = \max\limits_{X\in C} f(X)$