Optimisation avancée
M1 Génie Industriel
2019-2020

Corrigé
Rattrapage
Contrôle continu

Y. Bensmain
Durée : 1h30

Exercice 1 (12 points)

Trouver les points critiques du problème d'optimisation (P1) suivant et déterminer leur nature :

$$f(x, y) = x^2 y$$

$$s.c. \quad g(x, y) = 2x^2 + y^2 - 3 = 0 \quad (C)$$

Etape à suivre pour résoudre ce problème :

1. Trouver les points critiques.
2. Etudier la régularité de chaque point critique.
3. Déterminer la nature de chaque point critique.

1ère étape : Recherche des points cirtiques

a. Calcul du Lagrangien

Les fonctions f et g sont continues et différentiables (de classe C^1).

$$L(x, y, \lambda) = x^2 y + \lambda(2x^2 + y^2 - 3)$$

b. Recherche des points critiques du Lagrangien

$$\nabla L(x, y, \lambda) = \begin{cases} 2xy + 4x\lambda \\ x^2 + 2y\lambda \\ 2x^2 + y^2 - 3 \end{cases}$$

Pour trouver les points critiques du L, il faut résoudre le système d'équation :

$$\begin{cases} 2xy + 4x\lambda = 0 \\ x^2 + 2y\lambda = 0 \\ 2x^2 + y^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

C'est un système de 3 équations non-linéaires en 3 dimensions.

Rappel : si on a p contraintes, donc on aura 2^p à étudier.

On a une seule contrainte ($p = 1$) dans notre problème, donc on aura 2 cas à étudier.

<u>1er cas : $\lambda = 0$</u>

$$\begin{cases} 2xy + 4x\lambda = 0 \\ x^2 + 2y\lambda = 0 \\ 2x^2 + y^2 - 3 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ x^2 = 0 \\ y^2 - 3 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ } et \text{ } y = \sqrt{3} \\ ou \text{ } bien \\ x = 0 \text{ } et \text{ } y = -\sqrt{3} \end{cases}$$

Donc, on obtient dans ce cas deux points critiques du Lagrangien $(0, \sqrt{3}, 0)$ et $(0, -\sqrt{3}, 0)$.

<u>1er cas : $\boldsymbol{\lambda \neq 0}$</u>

$$\begin{cases} 2xy + 4x\lambda = 0 \\ x^2 + 2y\lambda = 0 \\ 2x^2 + y^2 - 3 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 2x(y + 2\lambda) = 0 & (L1) \\ x^2 + 2y\lambda = 0 & (L2) \\ 2x^2 + y^2 - 3 = 0 & (L3) \end{cases}$$

$2x(y + 2\lambda) = 0 \leftrightarrow x = 0$ ou bien $y + 2\lambda = 0$

$$x = 0 \leftrightarrow \begin{cases} 2y\lambda = 0 & (L2) \\ y^2 - 3 = 0 & (L3) \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = 0, y = \sqrt{3}\ et\ \lambda = 0 \\ ou\ bien \\ x = 0, y = \sqrt{3}\ et\ \lambda = 0 \end{cases}$$

Ces deux points critiques ont été déjà trouvés dans le 1er cas : $\lambda = 0$

$$y + 2\lambda = 0 \leftrightarrow y = -2\lambda \leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4\lambda^2 = 0 & (L2) \\ 2x^2 + 4\lambda^2 - 3 = 0 & (L3) \end{cases}$$

$$(L2)+(L3) \rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \leftrightarrow x^2 = 1 \leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x = 1}, \lambda = \frac{1}{2}, y = -1\ \ ou\ bien \\ \boldsymbol{x = 1}, \lambda = -\frac{1}{2}, y = 1\ ou\ bien \\ \boldsymbol{x = -1}, \lambda = \frac{1}{2}, y = -1\ \ ou\ bien \\ \boldsymbol{x = -1}, \lambda = -\frac{1}{2}, y = 1\ \ ou\ bien \end{cases}$$

Les points critiques du Lagrangien obtenus dans ce **2ème cas ($\boldsymbol{\lambda \neq 0}$)** sont :$(1, -1, \frac{1}{2})$, $(1, 1, -\frac{1}{2})$, $(-1, -1, \frac{1}{2})$ et $(-1, 1, -\frac{1}{2})$.

2ème étape : Etudier la régularité de chaque point critique

Rappel **:** si un point critique du lagrangien est un point régulier du C, alors ce point est un point critique du problème d'optimisation.

On calcule d'abord le gradient de la fonction $g(x, y)$.

$$\nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} 4x \\ 2y \end{pmatrix}$$

Point $\boldsymbol{X_1^*(0, \sqrt{3})}$:

$$\nabla g(X_1^*) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\nabla g(X_1^*) \neq 0_{R^2}$, alors le point $X_1^*\left(0, \sqrt{3}\right)$ est régulier, ainsi ce point est un point critique du problème d'optimisation.

Point $\boldsymbol{X_2^*\left(0, -\sqrt{3}\right)}$:

$$\nabla g(X_2^*) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\sqrt{3} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\nabla g(X_2^*) \neq 0_{R^2}$, alors le point $X_1^*\left(0, -\sqrt{3}\right)$ est régulier, ainsi ce point est un point critique du problème d'optimisation.

Point $\boldsymbol{X_3^*(1, -1)}$:

$$\nabla g(X_3^*) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\nabla g(X_3^*) \neq 0_{R^2}$, alors le point $X_3^*(1, -1)$ est régulier, ainsi ce point est un point critique du problème d'optimisation.

Point $\boldsymbol{X_4^*(1, 1)}$:

$$\nabla g(X_4^*) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\nabla g(X_4^*) \neq 0_{R^2}$, alors le point $X_4^*(1, 1)$ est régulier, ainsi ce point est un point critique du problème d'optimisation.

Point $\boldsymbol{X_5^*(-1, -1)}$:

$$\nabla g(X_3^*) = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\nabla g(X_5^*) \neq 0_{R^2}$, alors le point $X_5^*(-1, -1)$ est régulier, ainsi ce point est un point critique du problème d'optimisation.

Point $\boldsymbol{X_6^*(-1, 1)}$:

$$\nabla g(X_4^*) = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\nabla g(X_6^*) \neq 0_{R^2}$, alors le point $X_6^*(-1, 1)$ est régulier, ainsi ce point est un point critique du problème d'optimisation.

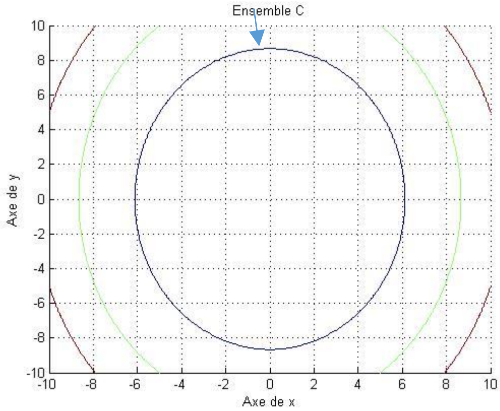
3ème étape : Déterminer la nature de chaque point critique

$$C = \{(x, y) \in R^2, 2x^2 + y^2 = 3\}$$

C est un ellipse du centre (0,0), C est un ensemble fermé car C est l'image réciproque de l'ensemble {3} par la fonction continue $2x^2 + y^2$.

On remarque dans la figure ci-dessous que l'ensemble C est borné.

f est continue et C est fermée et bornée, alors le problème d'optimisation admet un minimum global en au moins un seul point et un maximum global en au moins un seul point.



On calcule l'image des points critiques par la fonction f :

$$f(\boldsymbol{X_1^*}) = f(\boldsymbol{X_2^*}) = \mathbf{0}$$

$$f(\boldsymbol{X_3^*}) = f(\boldsymbol{X_5^*}) = \mathbf{-1}$$

$$f(\boldsymbol{X_4^*}) = f(\boldsymbol{X_6^*}) = \mathbf{1}$$

Les deux point critiques X_3^* et X_5^* ont la plus petite image (-1), et donc le problème admet un minimum global égal à -1 en ces deux points.

Les deux point critiques X_4^* et X_6^* ont la plus grande image (1), et donc le problème admet un minimum global égal à -1 en ces deux points.

Pour déterminer la nature des points X_1^* et X_2^* (minimum local ou maximum local), on calcule la matrice Hessienne bordée.

La fonction f est deux fois différentiables (de classe C^2).

$$H_B = \begin{pmatrix} 0 & J_G \\ J_g^t & \nabla_{x,y}^2 L \end{pmatrix}$$

$$J_g = \left(\frac{dg}{dx}, \frac{dg}{dy}\right) = (4x, 2y) \rightarrow J_g^t = \begin{pmatrix} 4x \\ 2y \end{pmatrix} = \nabla g(x, y)$$

$$\nabla_{x,y} L = \begin{pmatrix} 2xy + 4x\lambda \\ x^2 + 2y\lambda \end{pmatrix} \rightarrow \nabla_{x,y}^2 L = \begin{pmatrix} 2y + 4\lambda & 2x \\ 2x & 2\lambda \end{pmatrix}.$$

$$H_B = \begin{pmatrix} 0 & 4x & 2y \\ 4x & 2y+4\lambda & 2x \\ 2y & 2x & 2\lambda \end{pmatrix}$$

Point X_1^* $(0,\sqrt{3})$: On calcule H_B au point $(0,\sqrt{3},0)$.

$$H_B(0,\sqrt{3},0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} & 0 \\ 2\sqrt{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a une seule contrainte ($p = 1$) et deux variables ($n = 2$), donc on doit calculer le déterminant mineur principal H_2.

$$H_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} & 0 \\ 2\sqrt{3} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -24\sqrt{3} < 0$$

H_2 est négatif, et donc le problème d'optimisation admet un minimum local au point
X_1^* $(0,\sqrt{3})$.

Point X_2^* $(0,-\sqrt{3})$: On calcule H_B au point $(0,-\sqrt{3},0)$.

$$H_B(0,\sqrt{3},0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2\sqrt{3} \\ 0 & -2\sqrt{3} & 0 \\ -2\sqrt{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a une seule contrainte ($p = 1$) et deux variables ($n = 2$), donc on doit calculer le déterminant mineur principal H_2.

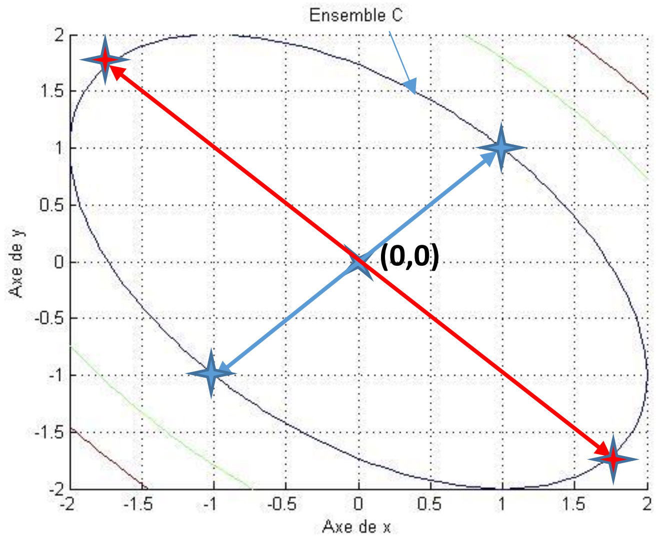
$$H_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} & 0 \\ 2\sqrt{3} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 24\sqrt{3} > 0$$

H_2 est positif, et donc le problème d'optimisation admet un maximum local au point
X_2^* $0,-\sqrt{3})$.

Exercice 2 **(8 points)**

Trouver les points, de l'ellipse $x^2 + xy + y^2 = 3$, les plus proches au point d'origine.

$$C = \{(x, y) \in R^2, x^2 + xy + y^2 = 3\}$$



 : Les points de la courbe les plus proche à (0,0).

 : Les points de la courbe les plus loin à (0,0).

Il est clair sur la figure que les points les plus proches sont (-1,-1) et (1,1)

Le problème (P2) peut être exprimé comme suit :

$$\min f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$s.c. \quad g(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3 = 0 \quad (C)$$

puisqu'il est équivalent à trouver les points (x, y) qui minimisent la distance $\sqrt{x^2 + y^2}$ (du point au point d'origine) ou qui minimisent **son carré** $x^2 + y^2$ (le carré de la distance) :

Il est possible d'étudier la régularité de C (c.à.d. étudier la régularité de tous les points de C) avant la recherche des points critiques du Lagrangien, comme il est possible de laisser cette étude après la recherche des points critiques du L en étudiant seulement la régularité de ces points critiques.

Rappel : Si un point critique du Lagrangien est régulier, alors ce point est un point critique du problème d'optimisation.

1- Etude de la régularité de C (ou bien vérification de la qualification de C)

On commence par résoudre le système d'équation $\nabla g(x, y) = 0_{R^2}$

$$\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x + y \\ x + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$\nabla g(x, y)$ s'annule seulement au points (0,0), mais ce point n'appartient pas à notre ensemble C (le points $(0,0) \notin C$ car $g(0,0) = 0^2 + 0 * 0 + 0^2 - 3 \neq 0$). Ainsi, l'ensemble C est régulier (tous les points de C sont réguliers), et donc tous les points critiques du Lagrangien que nous allons les rechercher sont des points critiques du problème d'optimisation.

2- Montrer l'existence d'au moins une solution (un minimum global)

La fonction f est **continue** et **coércive** (revoir l'exemple du cours et l'exercice 5 de la série1).

L'ensemble C est **fermé** car l'ensemble {3} est fermé et la fonction $x^2 + xy + y^2$ est continue sur R^2.

➔ P2 admet au moins une solution (un minimum global en au moins un point).

A noter aussi que C est bornée car on peut entourer l'ensemble C par un cercle de centre (0,0) et de rayon M (=3 par exemple) (revoir la définition 2.2.5 du chapitre 2). Mathématiquement :

$$\forall\ (x, y) \in C, \|(x, y)\| \leq M$$

Puisque C est borné, donc la fonction f sous la contrainte admet un minimum global (revoir la dernière partie du « Corrigé CC Opt M1 2020.pdf ».

3- Recherche des points critiques du P2

a. Calcul du Lagrangien

Les fonctions f et g sont continues et différentiables (de classe C^1).

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x^2 + xy + y^2 - 3)$$

b. Recherche des points critiques du Lagrangien

$$\nabla L(x, y, \lambda) = \begin{cases} 2x + 2x\lambda + y\lambda \\ 2y + 2y\lambda + x\lambda \\ x^2 + xy + y^2 - 3 \end{cases}$$

Pour trouver les points critiques du L, il faut résoudre le système d'équation :

$$\begin{cases} 2x + 2x\lambda + y\lambda = 0 \\ 2y + 2y\lambda + x\lambda = 0 \\ x^2 + xy + y^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

C'est un système de 3 équations non-linéaires en 3 dimensions.

Rappel : si on a p contraintes, donc on aura 2^p à étudier.

On a une seule contrainte ($p = 1$) dans notre problème, donc on aura 2 cas à étudier.

<u>**1er cas : $\boldsymbol{\lambda = 0}$**</u>

$$\begin{cases} 2x + 2x\lambda + y\lambda = 0 \\ 2y + 2y\lambda + x\lambda = 0 \\ x^2 + xy + y^2 - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ -3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{ impossible, donc cette solution est refusée.}$$

<u>**1er cas : $\boldsymbol{\lambda \neq 0}$**</u>

$$\begin{cases} 2x + 2x\lambda + y\lambda = 0 \\ 2y + 2y\lambda + x\lambda = 0 \\ x^2 + xy + y^2 - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \lambda(2x + y) = 0 \quad (L1) \\ 2y + \lambda(2y + x) = 0 \quad (L2) \\ x^2 + xy + y^2 - 3 = 0 \quad (L3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{2x}{2x+y} = -\frac{2y}{2y+x} \\ x^2 + xy + y^2 - 3 = 0 \ (L3) \end{cases}$$

$$-\frac{2x+y}{2x} = -\frac{2y+x}{2y} \Leftrightarrow 4xy + 2y^2 = 4xy + 2x^2 \Leftrightarrow x^2 = y^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ ou\ bien \\ x = -y \end{cases}$$

$$y = x \Leftrightarrow \text{(L3) devient } 3x^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x = 1} \rightarrow \boldsymbol{y = 1} \rightarrow \lambda = -\frac{2}{3} \\ ou\ bien \\ \boldsymbol{x = -1} \rightarrow \boldsymbol{y = -1} \rightarrow \lambda = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$y = -x \Leftrightarrow \text{(L3) devient } x^2 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x = \sqrt{3}} \rightarrow \boldsymbol{y = -\sqrt{3}} \rightarrow \lambda = -2 \\ ou\ bien \\ \boldsymbol{x = -\sqrt{3}} \rightarrow \boldsymbol{y = \sqrt{3}} \rightarrow \lambda = -2 \end{cases}$$

Les points critiques du Lagrangien sont :

$\left(1,1,-\frac{2}{3}\right), \left(-1,-1,-\frac{2}{3}\right), \left(\sqrt{3},-\sqrt{3},-2\right), (-\sqrt{3},\sqrt{3},-2)$.

Puisque l'ensemble C est régulier, le problème P2 admet les points critiques suivants :

$$X_1^*(1,1), X_2^*(-1,-1), X_3^*\left(\sqrt{3},-\sqrt{3}\right), X_4^*(-\sqrt{3},\sqrt{3})$$

On peut étudier la régularité des points critiques du Lagrangien un par un si on l'a pas fait au début de la résolution de l'exercice (revoir l'étape 2 de l'exercice 1).

4- Nature des points critiques du P2

Calculons l'image de chaque point critique :

$$f(X_1^*) = f(X_2^*) = 2$$

$$f(X_3^*) = f(X_4^*) = 6$$

Puisque le problème admet au moins une solution et les deux points critiques X_1^* et X_2^* ont la plus petite image par la fonction f $(f(X_1^*) = f(X_2^*) = 2)$, ainsi le problème admet un minimum global égal à 2 aux points $X_1^*(1,1), X_2^*(-1,-1)$. Ceux sont les point de l'ellipse les plus proche au point d'origine (distance = $\sqrt{(f(X_1^*)} = \sqrt{(f(X_2^*)} = \sqrt{2}$)