RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen

Exercices corrigés pour l'analyse complexe

$$e^{i\pi}+1=0$$

Sabri BENSID
Abdennassser CHEKROUN
Mohamed Brahim ZAHAF

Exercices corrigés pour l’analyse complexe

Sabri BENSID
Abdennasser CHEKROUN
Mohamed Brahim ZAHAF

25 août 2021

Préface

L'analyse complexe est l'étude des nombres complexes, manipulations et autres propriétés. L'analyse complexe est un outil extrêmement puissant et nombreuses sont les applications pratiques destinées à la résolution de problèmes physiques. L'intégration de contour, par exemple, fournit une méthode de calcul d'intégrales difficiles.

Ce livre est un recueil d'exercices et de problèmes mathématiques d'analyse complexe. Il est le fruit d'un enseignement de mathématiques à l'université de Tlemcen. Nous avons privilégier d'exposer l'application des méthodes de calcul (théorèmes, propositions,..) sans énoncer quoi que ce soit. Notre but est d'offrir aux lecteurs des exercices avec des solutions détaillées et quelques exercices supplémentaires donnés sans solutions pour examiner les capacités des lecteurs. Nous les invitons cependant à chercher eux même les résolutions.

Dans ce livre, nous fournissons une introduction à l'analyse complexe qui est la théorie des fonctions complexes d'une variable complexe. Le premier chapitre rappelle les nombres complexes et les différentes régions du plan complexe telles que le cercle, disque et autres. Le second chapitre initie le lecteur aux fonctions à variable complexe en se focalisant principalement sur la notion d'holomorphie (dérivabilité) de ces fonctions. Le troisième chapitre est consacré aux intgrales curvilignes et aux formules intgrales de Cauchy. Le chapitre quatre est reservé aux séries de Laurent, classification des sngularités et théorie des résidus. Le dernier chapitre établie quelques applications sur les résidus sous forme des intégrales impropres.

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Table des matières

Chapitre 1

Nombres complexes

Sommaire

1.1 Exercices corrigés

Exercice 1.1. Ecrivez les nombres complexes suivants sous la forme algébrique

$$\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7} \quad \text{et} \quad \frac{1+\alpha i}{2\alpha+(\alpha^2-1)i}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Solution

1/ Nous réécrivons la fraction sous cette forme

$$\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7} = (1+i)^2\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^7.$$

Ce qui implique que

$$\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7} = (1+i)^2\left[\frac{(1+i)(1+i)}{2}\right]^7 = 2i\frac{(2i)^7}{2^7} = 2i^8 = 2.$$

Par conséquent,

$$\text{Re}\left(\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}\right) = 2 \qquad \text{et} \qquad \text{Img}\left(\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}\right) = 0.$$

2/ Nous avons

$$\frac{1+\alpha i}{2\alpha + (\alpha^2-1)i} = \frac{i(-i+\alpha)}{i(-2\alpha i + \alpha^2 - 1)}.$$

On obtient donc

$$\frac{1+\alpha i}{2\alpha + (\alpha^2-1)i} = \frac{(\alpha - i)}{(\alpha - i)^2} = \frac{1}{\alpha - i}.$$

Par conséquent,

$$\frac{1+\alpha i}{2\alpha + (\alpha^2-1)i} = \frac{\alpha + i}{\alpha + i(\alpha - i)} = \frac{\alpha}{\alpha^2+1} + i\frac{1}{\alpha^2+1}.$$

Exercice 1.2. Mettre sous la forme trigonométrique les nombres complexes suivants

$$\mathbf{1 - i\sqrt{3}}, \qquad \frac{\mathbf{1 + i\sqrt{3}}}{\mathbf{1 - i}}.$$

Solution

1/ Soit $z = 1 - i\sqrt{3}$. La forme trigonométrique est donnée par

$$z = re^{i\theta},$$

avec $r := |z|$, ce qui donne

$$r = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2,$$

et $\theta := \arg(z)$ vérifiant

$$\cos(\theta) = \frac{\text{Re}(z)}{r} = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta) = \frac{\text{Img}(z)}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2}.$$

Par conséquent,

$$z = 2 \times \exp\left(-\frac{\pi}{3}i + 2k\pi i\right), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

2/ Soit

$$z = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}.$$

Nous pouvons raisonner directement comme ça

$$|z| = \frac{|1+i\sqrt{3}|}{|1-i|} = \frac{2}{\sqrt{2}},$$

et

$$\arg(z) = \arg(1+i\sqrt{3}) - \arg(1-i) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12}.$$

Exercice 1.3. Ecrire sous la forme exponentielle les nombres complexes suivants :

$$\boldsymbol{z_1 = 1-i, \quad z_2 = 5i, \quad z_3 = -4, \quad z_4 = \sin(x) + i\cos(x),\ x \in \mathbb{R}.}$$

Solution

Le module de z_1 est donné par

$$|z_1| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

L'argument satisfait

$$\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \sin(\theta) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Donc, $\theta = -\pi/4$. Ainsi,

$$z_1 = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}.$$

De la même façon on trouve

$$z_2 = 5e^{i\pi/2},$$

et

$$z_3 = 4e^{-i\pi}.$$

Soit maintenant $z_4 = \sin(x) + i\cos(x),\ x \in \mathbb{R}$. Nous utilisons le fait que

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x),$$

et
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x).$$
On obtient donc
$$z_4 = \exp\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Exercice 1.4. Déterminer la forme algébrique du nombre complexe suivant

$$(\sqrt{3} + i)^6.$$

Solution

C'est plus pratique de passer par la forme trigonométrique, c'est-à-dire, pour $z \in \mathbb{C}$,
$$z = |z| \exp\left(i\arg(z)\right).$$
Donc, la puissance se traduit comme suit
$$z^\alpha = |z|^\alpha \exp\left(\alpha i \arg(z)\right), \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$
Nous avons
$$\sqrt{3} + i = 2e^{i\pi/6}.$$
Donc,
$$(\sqrt{3} + i)^6 = 2^6 e^{i\pi} = -64.$$

Exercice 1.5. Calculer les racines carrées des nombres complexes suivants

$$i, \qquad 5 + 12i.$$

Solution

1/ Soit $z = a + ib$ (dans notre cas, a et b sont supposés être $a = 0$ et $b = 1$). On pose $w = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ qui désigne les racines de z. Nous avons la relation suivante

$$w^2 = z.$$

Ce qui implique que

$$(x+iy)^2 = a+ib.$$

Ceci, nous ramène au système suivant

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a, \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2}, \\ 2xy = b. \end{cases}$$

Après calcul, les racines carrées de i sont

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{et} \qquad -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2/ De la même façon, en appliquant le même raisonnement, nous obtenons

$$3+2i \qquad \text{et} \qquad -3-2i.$$

comme racines carrées de $5+12i$.

<u>Exercice</u> 1.6. On considère la fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\forall z \in \mathbb{C},\ z \neq -i, \quad f(z) = \frac{z-2}{z+i}.$$

Déterminer l'ensemble des points tels que $f(z) \in \mathbb{R}$ puis déterminer l'ensemble des points tels que $f(z) \in i\mathbb{R}$.

Solution

Nous allons essayer d'écrire f sous sa forme algébrique. Pour cela, on pose $z = x+iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. Ainsi, nous obtenons, pour $z \neq -i$,

$$f(z) = \frac{z-2}{z+i} = \frac{x+iy-2}{x+iy+i} = \frac{x-2+iy}{x+i(y+1)}.$$

En multipliant par le conjugué du dénominateur, on obtient

$$f(z) = \frac{(x-2+iy)(x-i(y+1))}{x^2+(y+1)^2}.$$

Après calcul, nous aurons

$$\operatorname{Re}(f(z)) = \frac{x^2 - 2x + y^2 + y}{x^2 + (y+1)^2} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Img}(f(z)) = \frac{2y - x + 2}{x^2 + (y+1)^2}.$$

Dans ce cas, l'ensemble des points vérifiant $f(z) \in \mathbb{R}$ implique forcement

$$2y - x + 2 = 0.$$

Par conséquent, l'ensemble des points est la droite $y = \frac{1}{2}x - 1$ privée du point $(0, -1)$.

L'ensemble des points tel que $f(z) \in i\mathbb{R}$ vérifie

$$x^2 - 2x + y^2 + y = 0.$$

Cette équation doit être réécrite comme suite

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + y + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4}.$$

Ce qui donne l'équation du cercle privée du point $(0, -1)$ suivante (centre $(1, -0.5)$ et du rayon $\frac{1}{4}$)

$$(x-1)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}.$$

Exercice 1.7. Résoudre l'équation

$$\boldsymbol{z^2 - z + 1 - i = 0.}$$

Solution

Pour résoudre cette équation du second degré, on calcule le discriminant

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (1 - i) = (1 + 2i)^2.$$

Automatiquement les solutions sont données par la formule

$$z_{1,2} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

A noter qu'ici $\sqrt{\Delta}$ reflète deux valeurs. Nous obtenons donc

$$z_1 = \frac{1-(1+2i)}{2} = -i,$$

et

$$z_2 = \frac{1+(1+2i)}{2} = 1+i.$$

Exercice 1.8. Montrer que

$$\boldsymbol{(|z| = 1 \quad \text{et} \quad z \neq 1) \Rightarrow i\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \in \mathbb{R}.}$$

Solution

Posant, pour $z \neq 1$,

$$w := i\left(\frac{z+1}{z-1}\right).$$

Nous allons vérifier que $\overline{w} = w$ et dans ce cas forcément $w \in \mathbb{R}$. On a

$$\overline{w} = -i\left(\frac{\overline{z}+1}{\overline{z}-1}\right)$$

En utilisant le fait que $|z| = 1$, on obtient

$$\overline{w} = -i\left(\frac{\frac{1}{z}+1}{\frac{1}{z}-1}\right) = i\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = w.$$

Donc,

$$\overline{w} = w.$$

Ceci implique que, pour $|z| = 1$ et $z \neq 1$,

$$i\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \in \mathbb{R}.$$

Exercice 1.9. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et considérons un nombre complexe

$$z = \cos^2(\theta) + i\sin(\theta)\cos(\theta).$$

1) Déterminer θ tel que $z = 0$.
2) Si $z \neq 0$, calculer z^{-1} en fonction de θ.

Solution

1/ Déterminons θ tel que $z = 0$, c'est-à-dire,

$$\cos^2(\theta) + i\sin(\theta)\cos(\theta) = 0.$$

Autrement dit,

$$\cos(\theta)[\cos(\theta) + i\sin(\theta)] = 0.$$

Puisque $\cos(\theta) + i\sin(\theta) = e^{i\theta} \neq 0$, alors

$$\cos(\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

2/ Si $z \neq 0$, calculant z^{-1}. On a

$$z^{-1} = [\cos(\theta)e^{i\theta}]^{-1} = \frac{e^{-i\theta}}{\cos(\theta)} = 1 - i\tan(\theta).$$

Exercice 1.10. Soit z un nombre complexe vérifiant $|z| = 1$. Montrer que

$$Arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & \text{si } \operatorname{Img}(z) > 0, \\ \dfrac{-\pi}{2}, & \text{si } \operatorname{Img}(z) < 0. \end{cases}$$

Solution

On pose $z = x + iy$ pour $x, y \in \mathbb{R}$. On a

$$\frac{z-1}{z+1} = \frac{x-1+iy}{x+1+iy} = \frac{(x-1+iy)(x+1-iy)}{(x+1+iy)(x+1-iy)}.$$

Après calcul, on trouve

$$\frac{z-1}{z+1} = \frac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2} + i\frac{2y}{(x+1)^2+y^2}.$$

En utilisant le fait que $|z| = 1$, alors

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Par conséquent,

$$\frac{z-1}{z+1} = i\frac{2y}{(x+1)^2+y^2}.$$

Ainsi, ce complexe est purement imaginaire. Il est donc clair que

$$Arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{si } \operatorname{Img}(z) = y > 0, \\ \frac{-\pi}{2}, & \text{si } \operatorname{Img}(z) = y < 0. \end{cases}$$

Exercice 1.11. Monter que, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$,

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}.$$

Solution

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \overline{\left(\frac{\overline{z}}{z\overline{z}}\right)}.$$

Puisque $\overline{z}z = |z|^2$, alors

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \overline{\left(\frac{\overline{z}}{|z|^2}\right)} = \frac{1}{|z|^2}\overline{(\overline{z})} = \frac{1}{|z|^2}z.$$

Par conséquent,

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}z}z = \frac{1}{\overline{z}}.$$

Exercice 1.12. **1) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation suivante**

$$\boldsymbol{2z + i\overline{z} = 3.}$$

2) En utilisant le logarithme complexe, résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation suivante

$$\boldsymbol{e^{z-1} = -ie^3.}$$

Solution

1) Soient $z = x + iy$ et $\overline{z} = x - iy$, alors l'équation $2z + i\overline{z} = 3$ devient

$$2x + 2iy + ix + y = 3,$$

$$\Rightarrow \quad 2x + y + i(2y + x) = 3.$$

Par identification, on a

$$\begin{cases} 2x + y = 3, \\ 2y + x = 0, \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 2, \\ y = -1. \end{cases}$$

2) On a

$$e^{z-1} = -ie^3.$$

En utilisant le logarithme complexe, nous avons

$$\ln(e^{z-1}) = \ln(-ie^3),$$

qui implique que

$$z - 1 = \ln(-i) + \ln(e^3).$$

Sachant que

$$\ln(z) = \ln(|z|) + iArg(z),$$

alors nous obtenons $\ln(-i) = \ln(1) - i\frac{\pi}{2}$. Ainsi,

$$z - 1 = -i\frac{\pi}{2} + 3 \quad \Rightarrow \quad z = -i\frac{\pi}{2} + 4.$$

Exercice 1.13. 1. Résoudre l'équation suivante

$$z^4 - i = 0, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

2. Trouver les solutions de l'équation suivante :

$$ie^{iz} - ie^{-iz} = 1, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Solution

1/ La résolution de l'équation se ramène au calcul de la racine quatrième du nombre complexe i. Les racines sont données, pour $k = 0, 1, 2, 3$, par

$$w_k = \sqrt[4]{1}\left[\cos\left(\frac{\pi/2 + 2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi/2 + 2k\pi}{4}\right)\right].$$

Par conséquent,

$$w_0 = \left[\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right],$$

$$w_1 = \left[\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right)\right],$$

$$w_2 = \left[\cos\left(\frac{9\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{8}\right)\right],$$

et

$$w_3 = \left[\cos\left(\frac{13\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{13\pi}{8}\right)\right].$$

2/ L'équation est équivalente à

$$i(e^{iz})^2 - e^{iz} - i = 0, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

On pose $X = e^{iz}$ et on obtient

$$iX^2 - X - i = 0, \qquad X \in \mathbb{C}.$$

On calcule le discriminent

$$\Delta = 1 - 4i(-i) = -3 = 3i^2.$$

Les solution sont données par

$$X_1 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2i} \qquad \text{et} \qquad X_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2i}.$$

Une réécriture conduit à

$$X_1 = \frac{-i - \sqrt{3}}{2} \qquad \text{et} \qquad X_2 = \frac{-i + \sqrt{3}}{2}.$$

La résolution en terme de la variable z donne

$$z_1 = \frac{1}{i} \ln\left(\frac{-i - \sqrt{3}}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{1}{i} \ln\left(\frac{-i + \sqrt{3}}{2}\right).$$

<u>Exercice</u> 1.14. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation suivante :

$$\boldsymbol{2\cos(z) - e^{-iz} = 1 + 2i.}$$

Solution

Par définition, nous avons

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Par conséquent,

$$2\cos(z) - e^{-iz} = 1 + 2i \qquad \Rightarrow \qquad 2\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} - e^{-iz} = 1 + 2i.$$

On obtient

$$e^{iz} = 1 + 2i.$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned} e^{iz} = 1 + 2i \quad &\Rightarrow \quad iz = \log(1 + 2i), \\ &\Rightarrow \quad z = \frac{1}{i}\log(1 + 2i) = \frac{1}{i}\left(\ln(\sqrt{5}) + i\arctan(2) + 2k\pi i\right), \quad k \in \mathbb{Z}, \\ &\Rightarrow \quad z = -i\ln(\sqrt{5}) + \arctan(2) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Exercice 1.15. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation suivante

$$\cos z = 3 + 2e^{iz}.$$

Solution

On a l'équation suivante,

$$\cos z = 3 + 2e^{iz}.$$

Nous avons

$$\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = 3+2e^{iz} \quad \Rightarrow \quad e^{iz}+e^{-iz} = 6+4e^{iz} \quad \Rightarrow \quad 3e^{2iz}+6e^{iz}-1 = 0.$$

On pose $X = e^{iz}$, alors on a

$$X^2 + 6X - 1 = 0.$$

Les solutions de cette équation sont

$$X_1 = -3+\sqrt{6}, \qquad X_2 = -3-\sqrt{6}.$$

Ainsi,

$$e^{iz_1} = -3+\sqrt{6}, \qquad e^{iz_2} = -3-\sqrt{6},$$

$$\Rightarrow iz_1 = \ln(-3+\sqrt{6}), \qquad iz_2 = \ln(-3-\sqrt{6}),$$

$$\Rightarrow iz_1 = \ln|-3+\sqrt{6}|+i\pi+2\pi ki, \quad iz_2 = \ln|3+\sqrt{6}|+i\pi+2\pi k'i, \qquad k,k' \in \mathbb{Z}.$$

Exercice 1.16. Monter que pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}.$$

Solution

Pour monter cette égalité, on suppose que $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$. Nous obtenons

$$e^{z_1+z_2} = e^{x_1+x_2+i(y_1+y_2)} = e^{x_1+x_2}e^{i(y_1+y_2)}.$$

Ce qui donne

$$e^{z_1+z_2} = e^{x_1}e^{x_2}\left[\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)\right].$$

En utilisant, la formule trigonométrique associée, on obtient

$$\begin{aligned} e^{z_1+z_2} &= e^{x_1}e^{x_2}\Big[\cos(y_1)\cos(y_2) - \sin(y_1)\sin(y_2) \\ &\qquad\qquad + i\sin(y_1)\cos(y_2) + i\cos(y_1)\sin(y_2)\Big]. \end{aligned}$$

On peut observer qu'on

$$e^{z_1+z_2} = e^{x_1}e^{x_2}\Big[\cos(y_1) + i\sin(y_1)\Big]\Big[\cos(y_2) + i\sin(y_2)\Big].$$

Enfin, on a obtenu

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}.$$

Exercice 1.17. Déterminer l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie

1. $|z - i| = |z + i|$, **2.** $|(\sqrt{3} + i)z - 1 - i| = 4$.

Solution

1/ Le module $|z - i|$ traduit la distance entre z et le point i. Encore, $|z + i|$ est la distance entre z et le point $-i$. Donc,

$$|z - i| = |z + i|$$

permet de conclure que le point z se situe à la même distance entre $(0, 1)$ et $(0, -1)$, c'est-à-dire z parcoure la médiatrice (Droite perpendiculaire à un segment de droite en son milieu) du segment reliant $(0, 1)$ et $(0, -1)$. On peut remarquer que cette médiatrice est tout simplement l'axe réel, donc z décrit tout les réels.

2/ Rappelons que l'équation du cercle de centre z_0 et de rayon R est donnée par

$$|z - z_0| = R.$$

Essayons d'écrire

$$|(\sqrt{3} + i)z - 1 - i| = 4,$$

sous une forme convenable (équation d'un cercle). Nous réécrivons l'expression ci-dessus et nous obtenons

$$|(\sqrt{3} + i)| \times \left| z - \frac{1+i}{\sqrt{3}+i} \right| = 4.$$

Ceci implique que

$$|z - z_0| = 2 \qquad \text{avec} \quad z_0 = \frac{\sqrt{3}+1}{4} + i\frac{\sqrt{3}-1}{4}.$$

Par conséquent, l'ensemble des points est le cercle de centre z_0 et de rayon 2.

1.2 Exercices supplémentaires

Exercice 1 - On considère les nombres complexes suivants

$$z_1 = \frac{1-i}{i^9(1+2i)}, \quad z_2 = \left[\frac{1+i}{\sqrt{2}} \right]^{10},$$

Écrire z_1 et z_2 sous forme algébrique.

Exercice 2 - 1) Calculer les racines quatrièmes de 1.
2) Calculer $\sqrt[3]{i + \sqrt{3}}$.

Exercice 3 - Développer le nombre complexe

$$(\sqrt{3} - i)^{13}.$$

Résoudre l'équation $z^2 = -5 + 12i$.

Exercice 4 - Résoudre dans $\mathbb{C}$ les deux équations suivantes

$$z^2 - i = 0 \qquad \text{puis} \qquad 2\cos(z) - e^{-iz} = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}.$$

Exercice 5 - Déterminer l'ensemble des points M d'affixe $z \in \mathbb{C}$ tel que

$$z + \overline{z} = |z|^2.$$

Exercice 6 - 1. Calculer la racine carrée du nombre complexe $w = i$.
2. En posant $z = x + iy$, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$|z - 1| = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \Re(z-1).$$

Exercice 7 - Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0.$$

Exercice 8 - Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation suivante

$$\cos z = 3 + 2e^{iz}.$$

Exercice 9 - Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante

$$z^3 - 1 = -i.$$

Exercice 10 - Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$e^{iz} + e^{-iz} - \frac{2}{i^5} = 0.$$

Exercice 11 - En posant $z = x + iy$ résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équations suivante

$$|z| + 1 = 2(z + i).$$

Exercice 12 - On considère les nombres complexes suivants

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3}, \quad z_2 = 1 + i, \quad z_3 = \frac{z_1}{z_2}.$$

1) Écrire z_3 sous forme algébrique.
2) Écrire z_3 sous forme trigonométrique.
3) En déduire les valeurs exactes de $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$.

Exercice 13 - Soit le point M d'affixe z différent de $-i$. On pose

$$w = \frac{1-z}{1-iz}$$

1) Déterminer l'ensemble des points M tels que $Re(w) = 0$.
2) Déterminer l'ensemble des points M tels que $Im(w) = 0$.

Exercice 14 - 1) Montrer les formules suivantes

- $\cos(iz) = ch(z)$
- $\sin(iz) = ish(z)$
- $1 - th^2(z) = \dfrac{1}{ch^2(z)}$.

2) Trouver les parties réelles et imaginaires de $\sin(z)$ et $\cos(z)$.

Exercice 15 - 1) Démontrer que

$$1 + e^{i\pi/5} + e^{i2\pi/5} + e^{i3\pi/5} + e^{i4\pi/5} = \frac{2}{1 - e^{i\pi/5}}.$$

2) En déduire les valeurs des sommes

$$S = \sum_{k=0}^{4} \cos(\frac{k\pi}{5}), \quad S' = \sum_{k=0}^{4} \sin(\frac{k\pi}{5})$$

Exercice 16 - Résoudre dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes

$$1) z^2 + (1-i)z - 3i = 0, \qquad 2) z^2 + z + 1 = 0.$$

Exercice 17 - Résoudre dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes

$$e^z = 5 - 5i, \qquad e^{iz} - (1+i)e^{-iz} = i \qquad et \qquad \cos(z) = 2.$$

Exercice 18 - Calculer les racines cubiques de

$$z = -8.$$

Exercice 19 - Trouver les lieux géométriques suivants

$$1)\ 0 < Re(iz) < 1, \qquad 2)\ Re(z) + im(z) < 1,$$

$$3)\ |\overline{z} - 4 + i| = 1, \qquad 4)\ Re(1-z) < \frac{1}{2},$$

$$5)\ |z - 2i| \leq 3, \qquad 6)\ Re\left(\frac{1}{z}\right) = c,\ \text{Img}\left(\frac{1}{z}\right) = c,$$

$$7)\ 1 \leq |z| \leq 3, \qquad 8)\ z = t^2 + it^4, t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 20 - Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes tels que $z_1\overline{z}_2 \neq 1$. On pose

$$z = \frac{z_1 - z_2}{1 - z_1\overline{z}_2}.$$

Montrer que

$$|z| = 1 \Leftrightarrow |z_1| = 1 \quad \text{ou} \quad |z_2| = 1$$

Exercice 21 - Trouver l'image de l'ensemble

$$A = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$$

par les applications suivantes

$$1) f(z) = 2z + i, \qquad 2) f(z) = \frac{1}{z}.$$

Exercice 22 - Calculer

1) $\sin(1-i)$, 2) $\ln(-1)$, 3) $(-3)^{i/\pi}$, 4) $\ln(1+i)$,

5) i^i, 6) $\arcsin(i)$, 7) $(\cos(i))^i$, 8) $(-1)^{\sqrt{2}}$.

Exercice 23 - 1) Déterminer les nombres complexes solutions de $z^4 = 1$.
2) Déterminer sous forme trigonométrique les solutions de l'équation

$$z^4 = 8(1 - i\sqrt{3}).$$

3) Soit

$$a = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}.$$

Vérifier que $a^4 = 8(1 - i\sqrt{3})$ et en déduire sous forme algébrique les résultats du 2).
4) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.

Exercice 24 - 1) Résoudre l'équation $z^3 = 1$ en utilisant la forme exponentielle.
2) On note j la solution complexe de partie imaginaire positive.
a) Vérifier que j^2 est aussi solution.
b) Montrer que $j^2 = \frac{1}{j} = \overline{j}$
c) Calculer $1 + j + j^2$.

Chapitre 2

Fonctions complexes

Sommaire

2.1 Exercices corrigés

Exercice 2.1. Soit $g : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ définie par

$$g(x+iy) = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}.$$

La fonction g est-elle holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{0\}$?

Solution

Soit $g : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ définie par

$$g(x+iy) = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Posons

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2},$$

et

$$v(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}.$$

Les dérivées partielles de u et v sont données par

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}. \end{cases}$$

Nous remarquons que les conditions de Cauchy-Riemann sont satisfaites sur $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, c'est à dire,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

Ce qui implique que, pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, la fonction f est holomorphe.

Exercice 2.2. Soit $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par

$$g(x+iy) = e^{2x}\left[\cos(2y) + i\sin(2y)\right] - iy + x.$$

La fonction g est-elle holomorphe ?

Solution

Posons $u(x,y) = e^{2x}\left[\cos(2y)\right] + x$ et $v(x,y) = e^{2x}\left[\sin(2y)\right] - y$. Les dérivées partielles de u et v sont données par

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2e^{2x}\left[\cos(2y)\right] + 1, \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = 2e^{2x}\left[\cos(2y)\right] - 1, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -2e^{2x}\left[\sin(2y)\right], \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = 2e^{2x}\left[\sin(2y)\right]. \end{cases}$$

Nous remarquons que les conditions de Cauchy-Riemann, c'est à dire,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

ne sont pas satisfaites, pour tout x et y. Ce qui implique que la fonction f est n'est pas holomorphe.

Exercice 2.3. Soit $z = x + iy$ où x et y sont deux réels et soit la fonction

$$f(z) = (-e^x \sin y + 3) + i(e^x \cos y + 5).$$

Montrer que f est analytique (holomorphe) dans $\mathbb{C}$

Solution

Soit $f(z) = (-e^x \sin y + 3) + i(e^x \cos y + 5)$. Posons

$$u = -e^x \sin y + 3, \qquad v = e^x \cos y + 5.$$

En utilisant les conditions de Cauchy-Riemann, on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -e^x \sin y = \frac{\partial v}{\partial y} = -e^x \sin y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \cos y = -\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y.$$

Ainsi, f est holomorphe dans $\mathbb{C}$.

Exercice 2.4. Soit $z = x + iy$ où x et y sont deux réels et soit la fonction

$$f(z) = e^{x^2-y^2} \cos(2xy) + ie^{x^2-y^2} \sin(2xy).$$

Montrer que f est analytique (holomorphe) dans $\mathbb{C}$.

Solution

Pour $z \in \mathbb{C}$, prenant $f(z) = e^{x^2-y^2}\cos(2xy) + ie^{x^2-y^2}\sin(2xy)$. Posons

$$u(x,y) = e^{x^2-y^2}\cos(2xy) \qquad \text{et} \qquad v(x,y) = e^{x^2-y^2}\sin(2xy).$$

Les dérivées partielles de u et v sont données par

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2xe^{x^2-y^2}\cos(2xy) - 2ye^{x^2-y^2}\sin(2xy), \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = -2ye^{x^2-y^2}\sin(2xy) + 2xe^{x^2-y^2}\cos(2xy), \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -2ye^{x^2-y^2}\cos(2xy) - 2xe^{x^2-y^2}\sin(2xy), \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = 2xe^{x^2-y^2}\sin(2xy) + 2ye^{x^2-y^2}\cos(2xy). \end{cases}$$

Nous remarquons que les conditions de Cauchy-Riemann sont satisfaites pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, c'est à dire,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

Ce qui implique que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, la fonction f est holomorphe. Ainsi, f est analytique sur $\mathbb{C}$.

Exercice 2.5. Soit $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par

$$g(x+iy) = x^2 - y^2 - 2ixy + 2x + 2iy.$$

La fonction g est-elle holomorphe ?

Solution

Posons $u(x,y) = x^2 - y^2 + 2x$ et $v(x,y) = -2xy + 2y$. Les dérivées partielles de u et v sont données par

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2, \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = -2x + 2, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y} = -2y, \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -2y. \end{cases}$$

Nous remarquons que les conditions de Cauchy-Riemann, c'est à dire,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

sont satisfaites pour $(x, y) = (0, 0)$. Ce qui implique que la fonction f est holomorphe au point 0.

<u>Exercice</u> 2.6. Soient $z = x + iy$ et V la fonction définie par

$$V : (x, y) \to xy^2 - \frac{1}{3}x^3.$$

1) Montrer que V est harmonique.
2) Trouver une fonction U telle que la fonction complexe $f(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ soit holomorphe.

Solution

Soient $z = x + iy$ et V la fonction définie par

$$V : (x, y) \to xy^2 - \frac{1}{3}x^3.$$

1) Remarquons que la fonction V admet des dérivées partielles d'ordre 2 continues dans $\mathbb{R}^2$ et

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -2x, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 2x,$$

ce qui donne

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0.$$

Ainsi, V est harmonique.

2) Trouver une fonction U telle que la fonction complexe $f(z) = U(x, y) +$

$iV(x,y)$ soit holomorphe. Si f est holomorphe alors les conditions de Cauchy-Riemann sont vérifies, c'est à dire,

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y},$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}.$$

Donc,

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = 2xy,$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x} = -(y^2 - x^2).$$

Nous avons par intégration en x et par dérivation en y,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U}{\partial x} = 2xy, \\ \Rightarrow \quad & U(x,y) = \int 2xydx = x^2y + c(y), \\ \Rightarrow \quad & \frac{\partial U}{\partial y} = x^2 + c'(y). \end{aligned}$$

D'après la deuxième condition de Cauchy-Riemann, on a

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x^2 - y^2.$$

Par conséquent,

$$c'(y) = -y^2 \Rightarrow c(y) = -\frac{1}{3}y^3 + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

D'où,

$$U(x,y) = x^2y - \frac{1}{3}y^3 + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

et la fonction f prend la forme

$$f(z) = x^2y - \frac{1}{3}y^3 + c + i\left(xy^2 - \frac{1}{3}x^3\right), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2.7. **1) Montrer que la fonction**

$$U(x,y) = 2x^3 - 6xy^2 + x^2 - y^2 - y$$

est harmonique.
2) Soit $z = x + iy$. Trouver toutes les fonctions $V(x,y)$ telle que la fonction complexe

$$f(z) = U(x,y) + iV(x,y)$$

soit holomorphe.

Solution

1) Nous remarquons que la fonction U admet des dérivées partielles d'ordre 2 continues dans $\mathbb{R}^2$, ce qui donne

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 6x^2 - 6y^2 + 2x, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = -12xy - 2y - 1,$$

et,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 12x + 2, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -12x - 2.$$

Ainsi,

$$\triangle U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

Donc, la fonction U est harmonique.

2) La fonction f est holomorphe si et seulement si

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}.$$

Ainsi,

$$\frac{\partial V}{\partial y} = 6x^2 - 6y^2 + 2x \qquad (1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 12xy + 2y + 1 \qquad (2)$$

En utilisant (1), nous avons

$$V(x,y) = \int (6x^2 - 6y^2 + 2x)dy \Rightarrow V(x,y) = 6x^2y - 2y^3 + 2xy + c(x).$$

D'autre part,
$$\frac{\partial V}{\partial x} = 12xy + 2y + c'(x).$$
En utilisant (2), nous avons
$$c'(x) = 1 \Rightarrow c(x) = x + c. \qquad \text{où c est une constante.}$$
Ainsi,
$$V(x,y) = 6x^2y - 2y^3 + 2xy + x + c.$$

Exercice 2.8. Soit $z = x + iy$ où x et y sont deux réels et soit la fonction
$$f(z) = xe^{-y}\cos(x) - ye^{-y}\sin(x) + i(ye^{-y}\cos(x) + xe^{-y}\sin(x)).$$
Montrer que $f(z)$ est analytique dans $\mathbb{C}$.

Solution

On pose
$$u(x,y) = xe^{-y}\cos(x) - ye^{-y}\sin(x) \quad \text{et} \quad v(x,y) = ye^{-y}\cos(x) + xe^{-y}\sin(x).$$
La fonction f est holomorphe si elle vérifie les conditions de Cauchy-Riemann suivantes
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$
Ainsi, nous remarquons que
$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{-y}\cos(x) - xe^{-y}\sin(x) - ye^{-y}\cos(x).$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = e^{-y}\cos(x) - ye^{-y}\cos(x) - xe^{-y}\sin(x).$$
et
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -xe^{-y}\cos(x) - e^{-y}\sin(x) + ye^{-y}\sin(x).$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = -ye^{-y}\sin(x) + e^{-y}\sin(x) + xe^{-y}\cos(x).$$

Ceci implique que la fonction f est bien analytique dans $\mathbb{C}$.

Exercice 2.9. **Soit $z = x + iy$ où x et y sont deux réels et soit la fonction**

$$f(z) = ax + iy + ie^z.$$

1) Mettre $f(z)$ sous la forme $U(x, y) + iV(x, y)$.
2) Déterminer la constante a pour que la fonction $f(z)$ soit holomorphe.

Solution

Nous avons la fonction f donnée par

$$f(z) = ax + iy + ie^z.$$

Nous remplaçons $z = x + iy$, nous obtenons

$$f(x + iy) = ax + iy + ie^{x+iy} = ax + iy + ie^x(\cos y + i \sin y).$$

Ainsi,

$$\begin{cases} U(x, y) = ax - e^x \sin y, \\ V(x, y) = y + e^x \cos y. \end{cases}$$

2) La fonction f est holomorphe si elle vérifie les conditions de Cauchy-Riemann :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = \dfrac{\partial V}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = -\dfrac{\partial V}{\partial x}. \end{cases}$$

Ainsi, nous avons

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = a - e^x \sin y, \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} = 1 - e^x \sin y, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial y} = -e^x \cos y, \\ \dfrac{\partial V}{\partial x} = e^x \cos y. \end{cases}$$

Ceci implique que $a = 1$.

2.2 Exercices supplémentaires

Exercice 25 - Soit la fonction complexe suivante :

$$f(z) = Re(z) \times Img(z).$$

Étudier la dérivabilité de f par deux méthodes.

Exercice 26 - Soit $z = x + iy$ où x et y sont deux réels et soit la fonction

$$f(z) = ax^2 - y^2 + ibxy.$$

Déterminer les constantes réelles a et b pour que la fonction $f(z)$ soit holomorphe.

Exercice 27 - Soit $z = x + iy$ où x et y sont deux réels et soit la fonction

$$f(z) = x + 2ye^x + i(y + y^2 e^x).$$

Examiner si la fonction f est holomorphe dans $\mathbb{C}$.

Exercice 28 - Soit $z = x + iy$ où x et y sont deux réels et soit la fonction

$$f(z) = z^2 + \sin(iz).$$

1) Trouver les parties réelles et imaginaires de la fonction f.
2) Montrer que f est analytique (holomorphe) dans $\mathbb{C}$.

Exercice 29 - Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(x + iy) = x + 2ixy$. La fonction f est-elle holomorphe sur $\mathbb{C}$? Préciser l'ensemble des points de $\mathbb{C}$ où f holomorphe.

Exercice 30 - Soit $z = x + iy$ où x et y sont deux réels et soit

$$f(z) = z^2 + \overline{z} + \cos(iz), \qquad z \in \mathbb{C}.$$

1 - Trouver les parties réelles et imaginaires de la fonction f.
2 - Par deux méthodes différentes, étudier la dérivabilité de la fonction f.

Exercice 31 - Écrire la fonction complexe

$$f(z) = |z|^2 + 3z^2,$$

sous la forme $u(x, y) + iv(x, y)$ avec $z = x + iy$, puis étudier la dérivabilité de cette fonction.

Exercice 32 - Soit f la fonction de la variable complexe $z = x + iy$ où x et y sont deux réels et $f(z) = u(x, y) + v(x, y)$. Supposons que u soit la fonction définie dans $\mathbb{R}^2$ par

$$u(x, y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4.$$

Déterminer la fonction v telle que la fonction f soit holomorphe.

Exercice 33 - 1. Montrer que la fonction

$$V(x, y) = 2xy - y^2 - 2y + x^2 - 3x$$

est harmonique.
2. Soit $z = x + iy$, trouver une fonction $U(x, y)$ telle que la fonction complexe $f(z) = U(x, y) + i\,V(x, y)$ soit holomorphe.

Exercice 34 - Soit $z = x + iy$ où x et y sont deux réels.
1 - Soit la fonction

$$f(z) = 3x - y + 5 + i(ax + by - 3).$$

Pour quelles valeurs de a et b ; la fonction f est holomorphe sur $\mathbb{C}$?
2 - Soit la fonction

$$g(z) = ze^{-z}.$$

- Mettre $g(z)$ sous la forme $U(x, y) + iV(x, y)$.
- Vérifier que U et V vérifient les conditions de Cauchy-Riemann.

Exercice 35 - Soit la fonction complexe

$$f(z) = z^3 + z + 1.$$

- Calculer u et v tel que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ avec $z = x + iy$.
- Montrer que f est holomorphe sur $\mathbb{C}$.
- Montrer que u et v sont harmoniques.

Exercice 36 - Soit la fonction complexe

$$f(z) = 2z + \alpha|z|^2 + i, \qquad \text{avec} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

- Calculer u et v tel que $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ avec $z = x + iy$.
- Déterminer α pour que f soit holomorphe sur $\mathbb{C}$.
- Pour cette valeur de α, montrer que u et v sont harmoniques.

Exercice 37 - Écrire la fonction complexe

$$f(z) = z^2 + \Re(z) + \mathrm{Img}(z)$$

sous la forme $u(x,y) + iv(x,y)$ avec $z = x + iy$, puis étudier la dérivabilité de cette fonction.

Exercice 38 - Indiquer parmi les fonctions suivantes celles qui sont holomorphes

$$1)\ Im(z), \qquad 2)\ e^{\overline{z}}, \qquad 3)\ z^2 + 5iz + 3 - i, \qquad 4)\ (Re(z))^2.$$

Exercice 39 - Indiquer parmi les fonctions suivantes celles qui sont analytiques

$$1)\ ze^z, \qquad 2)\ \overline{z}z^2, \qquad 3)\ \sin(3z), \qquad 4)\ e^{x^2-y^2}\cos(2xy) + ie^{x^2-y^2}\sin(2xy).$$

Exercice 40 - Soit $z = x + iy$ où x et y sont deux réels et soit la fonction

$$f(z) = x^2 + axy + by^2 + i(cx^2 + dxy + y^2).$$

Pour quelles valeurs de a, b, c et d, la fonction f est holomorphe sur $\mathbb{C}$?

Exercice 41 - I) Soit $v(x,y) = x^2 - y^2 + y$.
1)Montrer que v est harmonique.
2)Trouver une fonction f holomorphe sur $\mathbb{C}$ dont la partie imaginaire est v.

II) Trouver la constante $a \in \mathbb{R}$ pour que la fonction $u(x,y) = y^3 + ax^2y$ soit harmonique.

Chapitre 3

Intégration complexe

3.1 Exercices corrigés

Exercice 3.1. Calculer l'intégrale complexe suivante :

$$\int_\gamma 2\overline{z} + 5\, dz, \qquad \textbf{avec } \gamma \textbf{ est le segement : } [i+1, 1].$$

Solution

La paramétrisation du chemin est donnée par :

$$\gamma(t) = (i+1)(1-t) + 1 \times t = i + 1 - it, \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

Clairement, on a

$$\gamma'(t) = -i, \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

Par définition, nous obtenons

$$\int_\gamma 2\overline{z} + 5dz = \int_0^1 [-2i + 2 + 2it + 5](-i)dt.$$

Par conséquent,

$$\int_\gamma 2\overline{z} + 5dz = -i[-i + 7] = -1 - 7i.$$

Exercice 3.2. Calculer l'intégrale suivante

$$\int_\gamma (z^2+3z)dz,$$

où

1) γ : le segment de droite joignant les points $(0,0)$ et $(0,1)$.

2) γ : le quart de cercle de centre $(0,0)$ joignant les points $(2,0)$ et $(0,-2)$.

Solution

1) La paramétrisation du segment de droite joignant les points $(0,0)$ et $(0,1)$ est

$$\gamma(t) = it, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad \text{avec} \quad \gamma'(t) = i.$$

Nous avons

$$\int_\gamma (z^2+3z)dz = \int_0^1 \left((it)^2+3it\right) idt = i\int_0^1 (-t^2+3it)dt = i\left(\left[\frac{-t^3}{3}\right]_0^1 + 3i\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1\right).$$

Alors,

$$\int_\gamma (z^2+3z)dz = \frac{-3}{2} - \frac{i}{3}.$$

2) La paramétrisation du quart de cercle de centre $(0,0)$ joignant les points $(2,0)$ et $(0,-2)$ est

$$\gamma(t) = 2e^{it}, \quad t \text{ varie entre } 0 \text{ et } \frac{-\pi}{2} \quad \text{avec} \quad \gamma'(t) = 2ie^{it}.$$

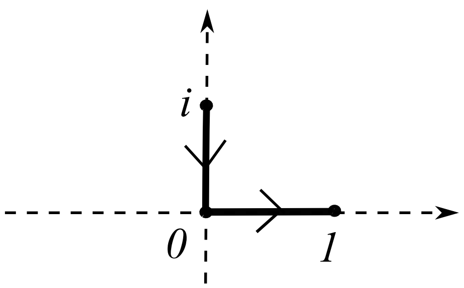
Ainsi,

$$\begin{aligned}
\int_0^{-\pi/2} (z^2+3z)dz &= \int_0^{-\pi/2} \left(4e^{2it}+6e^{it}\right) 2ie^{it}dt, \\
&= 4i\int_0^{-pi/2} (2e^{3it}+3e^{2it})dt, \\
&= 4i\left(\left[\frac{2}{3i}e^{3it}\right]_0^{-\pi/2} + \left[\frac{3}{2i}e^{2it}\right]_0^{-\pi/2}\right), \\
&= 4i\left(\frac{2}{3i}(e^{-3\pi i/2}-1) + \frac{3}{2i}(e^{-i\pi}-1)\right),
\end{aligned}$$

$$= 4i\left(\frac{2}{3i}(i-1) + \frac{3}{2i}(-1-1)\right),$$
$$= \frac{8i}{3} - \frac{28}{3}.$$

Exercice 3.3. Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_\gamma \overline{z}\, dz, \qquad \textbf{avec } \gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \textbf{ est le chemin suivant}$$



Solution

La paramétrisation des chemins est donnée par :

$$\gamma_1(t) = i - it, \quad 0 \le t \le 1, \;\; \gamma_1'(t) = -i,$$

et

$$\gamma_2(t) = t, \quad 0 \le t \le 1, \;\; \gamma_2'(t) = 1.$$

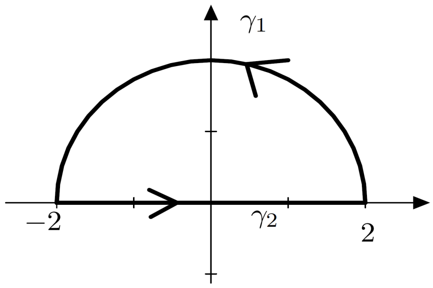
Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \overline{z} dz &= \int_{\gamma_1} \overline{z} dz + \int_{\gamma_2} \overline{z} dz, \\
&= \int_0^1 [-i+it](-i)dt + \int_0^1 [t](1)dt, \\
&= -0.5 + 0.5 = 0.
\end{aligned}$$

Exercice 3.4. Calculer l'intégrale curviligne suivante

$$\int_\gamma (2\overline{z} + 3|z|^2)dz$$

où $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ est le chemin suivant :



Solution

Rappelons que γ_1 est le demi cercle de centre $z_0 = 0$ et de rayon $r = 2$ et γ_2 est le segment reliant -2 à 2. Donc, nous avons les deux paramétrisations (sachant que d'autres paramétrisations sont possible)

$$\gamma_1(t) = 2e^{it}, \quad 0 \leq t \leq \pi \qquad \text{et} \qquad \gamma_2(t) = t, \quad -2 \leq t \leq 2.$$

Alors, en appliquant la définition pour le calcul des intégrales complexes, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\int_\gamma (2\overline{z} + 3|z|^2)dz &= \int_{\gamma_1} (2\overline{z} + 3|z|^2)dz + \int_{\gamma_2} (2\overline{z} + 3|z|^2)dz, \\
&= \int_0^\pi (4e^{-it} + 12) \times 2ie^{it}\, dt + \int_{-2}^2 (2t + 3t^2) \times 1\, dt, \\
&= 4i \int_0^\pi 2 + 6e^{it} dt + 16 = 8\pi i - 32.
\end{aligned}$$

Remarque : Comme une deuxième méthode, on peut paramétriser le chemin γ_2 par

$$\gamma_2(t) = -2(1-t) + 2t, \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

Le calcul découle de la même manière en utilisant la définition d'intégrale complexe.

Exercice 3.5. En utilisant les formules intégrales de Cauchy, calculer les intégrales suivantes

$$\mathbf{1)} \int_{|z-i|=\frac{1}{5}} \frac{\mathbf{2}}{(z-i-\mathbf{3})}\, dz,$$

$$\mathbf{2)} \int_{|z-1-i|=3} \frac{e^z}{(z-i-\mathbf{2})^{\mathbf{2}}}\, dz.$$

Solution

1/ La singularité de f est

$$z_0 = i+3.$$

Nous remarquons que $i+3$ est à l'extérieur du domaine inclus dans $|z-i| = \frac{1}{5}$. Autrement dit, la fonction f est holomorphe sur ce domaine. Le chemin en considération est fermé et le domaine pris est simplement connexe.

Cette intégrale vaut zéro d'après le théorème de Cauchy. Ainsi,

$$\int_{|z-i|=\frac{1}{5}} \frac{2}{(z-i-3)} \quad = \quad 0.$$

2/ La singularité de f est

$$z_0 = i+2.$$

Cette singularité est à l'intérieur de notre domaine. Les conditions de la formule intégrale de Cauchy sont satisfaites (chemin fermé, domaine S.C, e^z est holomorphe). Ainsi, l'intégrale se calcule comme suit

$$\begin{aligned} I &= \int_{|z-1-i|=3} \frac{e^z}{(z-i-2)^2}\, dz, \\ &= 2\pi i g'(i+2) = 2\pi i e^{i+2}, \end{aligned}$$

avec

$$g(z) = e^z.$$

Exercice 3.6. Calculer les intégrales suivantes

$$1) \int_{|z|=\frac{1}{4}} \frac{e^z+z}{(z-i)(z+i)}\,dz, \qquad 2) \int_{|z|=3} \frac{e^z+z}{(z-i)(z+i)}\,dz.$$

Solution

1/ Les singularités de f sont

$$i \quad \text{et} \quad -i.$$

Nous remarquons que i et $-i$ sont à l'extérieur du domaine inclus dans $|z| = \frac{1}{4}$. Autrement dit, la fonction f est holomorphe sur ce domaine. Le chemin en considération est fermé et le domaine pris est simplement connexe.

Cette intégrale vaut zéro d'après le théorème de Cauchy. Ainsi,

$$\int_{|z|=\frac{1}{4}} \frac{e^z+z}{(z-i)(z+i)}\,dz = 0.$$

2/ [On peut aussi utiliser le théorème des résidus] Les deux singularités de f

$$i \quad \text{et} \quad -i$$

sont à l'intérieur du domaine. On applique la formule généralisée de Cauchy pour ramener le calcul d'intégrale au calcul de la somme des intégrales autour de chaque singularités. Les conditions de la formule intégrale de Cauchy sont satisfaites (chemin fermé, domaine S.C, fonctions holomorphes). Ainsi, l'intégrale se calcule comme suit

$$\begin{aligned}
\int_{|z|=3} \frac{e^z+z}{(z-i)(z+i)}\,dz &= \int_{\gamma_1} \frac{g(z)}{(z+i)}\,dz + \int_{\gamma_2} \frac{h(z)}{(z-i)}\,dz, \\
&= 2\pi i[g(-i)+h(i)] \\
&= 2\pi i\frac{e^{-i}-i}{-2i} + 2\pi i\frac{e^{i}+i}{2i}.
\end{aligned}$$

Exercice 3.7. En utilisant les formules intégrales de Cauchy, calculer les intégrales suivantes

$$1) \int_{|z|=4} \frac{ze^{iz}}{(z-\pi)^2} dz, \qquad 2) \int_{|z+2|=\frac{3}{2}} \frac{z^2+1}{z(z+1)} dz.$$

Solution

1/ Nous avons $z_0 = \pi$ est bien à l'intérieur du cercle de centre 0 et de rayon 4. De plus, la fonction $g(z) = ze^{iz}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ qui est simplement connexe. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \int_{|z|=4} \frac{ze^{iz}}{(z-\pi)^2} dz &= 2\pi i g'(\pi), \\ &= 2\pi i(-1-\pi i). \end{aligned}$$

2/ Par un raisonnement similaire, nous avons cette fois-ci $z_0 = -1$ est bien à l'intérieur du cercle de centre -2 et de rayon 1.5. De plus, la fonction $g(z) = (z^2+1)/z$ est holomorphe sur le domaine de bord γ qui est simplement connexe. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \int_{|z+2|=\frac{3}{2}} \frac{z^2+1}{z(z+1)} dz &= 2\pi i g(-1), \\ &= -4\pi i. \end{aligned}$$

Exercice 3.8. Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_\gamma 2i\overline{z}\, dz, \qquad \text{avec } \gamma \text{ est le chemin } |z-i| = 2.$$

Solution

La paramétrisation du chemin est donnée par :

$$\gamma(t) = i + 2e^{it}, \qquad \text{avec} \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\int_\gamma 2i\overline{z}dz &= 2i\int_0^{2\pi}[-i+2e^{-it}]2ie^{it}dt,\\ &= -4\int_0^{2\pi}[-ie^{it}+2]dt,\\ &= -4[-e^{it}+2t]_0^{2\pi} = -16\pi.\end{aligned}$$

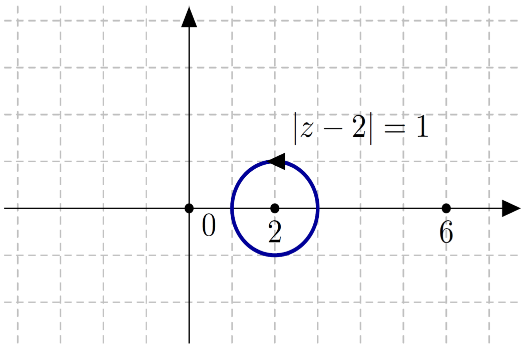
Exercice 3.9. En utilisant les formules intégrales de Cauchy, calculer

$$1)\ \int_{|z-2|=1}\frac{e^z}{z^2-6z}dz,$$
$$2)\ \int_{|z-2|=3}\frac{e^z}{z^2-6z}dz,$$
$$3)\ \int_{|z-2|=5}\frac{e^z}{z^2-6z}dz.$$

Solution

1) Nous calculons l'intégrale suivante

$$\int_{|z-2|=1}\frac{e^z}{z^2-6z}dz.$$



La fonction

$$z \to \frac{e^z}{z^2-6z}$$

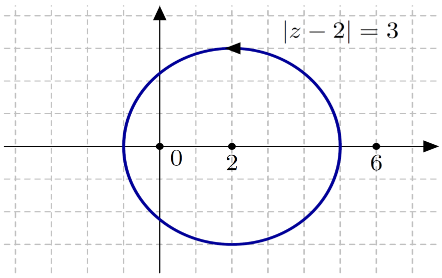
est holomorphe à l'interieur du cercle $|z-2| = 1$, alors d'après le théorème de

Cauchy

$$\int_{|z-2|=1} \frac{e^z}{z^2-6z}dz = 0.$$

2) Nous avons

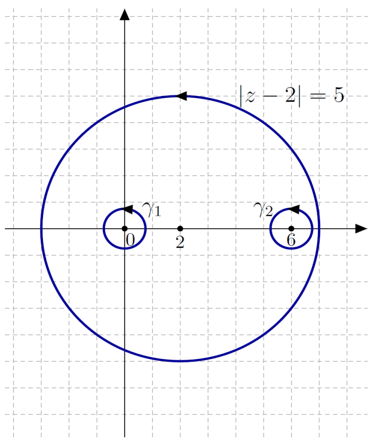
$$\int_{|z-2|=3} \frac{e^z}{z^2-6z}dz = \int_{|z-2|=3} \frac{e^z}{z(z-6)}dz.$$



Posons $f(z) = \frac{e^z}{z-6}$, alors f est holomorphe à l'intérieur du cercle $|z-2| = 3$, ainsi d'après la formule intégrale de Cauchy, on a

$$\int_{|z-2|=3} \frac{e^z}{z^2-6z}dz = 2\pi i f(0) = 2\pi i \frac{1}{-6} = -\frac{\pi i}{3}.$$

3) Soient γ_1 un cercle de centre 0 et de rayon r_1 et γ_2 un cercle de centre 6 et de rayon r_2 (comme dans la figure).



Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned}\int_{|z-2|=5} \frac{e^z}{z^2-6z}dz &= \int_{\gamma_1} \frac{e^z}{z(z-6)}dz + \int_{\gamma_2} \frac{e^z}{z(z-6)}dz,\\ &= \int_{\gamma_1} \frac{g(z)}{z}dz + \int_{\gamma_2} \frac{h(z)}{z-6}dz,\end{aligned}$$

avec

$$g(z) = \frac{e^z}{z-6},$$

et

$$h(z) = \frac{e^z}{z}.$$

Les fonction g et h sont holomorphes à l'intérieur de γ_1 et γ_2, respectivement. Ainsi d'après la formule intégrale de Cauchy on obient

$$\begin{aligned}\int_{|z-2|=5} \frac{e^z}{z^2-6z}dz &= 2\pi i g(0) + 2\pi i h(6),\\ &= 2\pi i(-\frac{1}{6} + \frac{e^6}{6})\\ &= \frac{e^6-1}{3}\pi i.\end{aligned}$$

Exercice 3.10. En utilisant les formules intégrales de Cauchy, calculer les intégrales suivantes

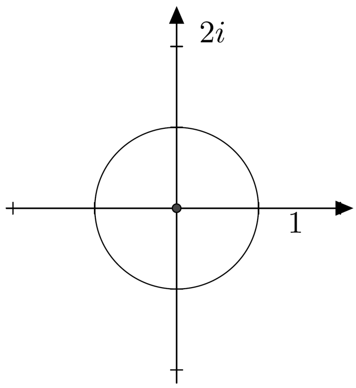
$$\mathbf{1)} \int_{|z|=1} \frac{e^{z^2}}{(z-2i)^2}dz,$$

$$\mathbf{2)} \int_{|z-i|=2} \frac{\cos(\pi z)}{(z+2i)^2(z-2i)^2}dz,$$

$$\mathbf{3)} \int_{|z|=3} \frac{e^z}{z^2(z^2-2z+2)}dz.$$

Solution

1) Nous remarquons que la singularité de la fonction $\frac{e^{z^2}}{(z-2i)^2}$ est $2i$ qui est à l'extérieur du cercle $|z| = 1$.



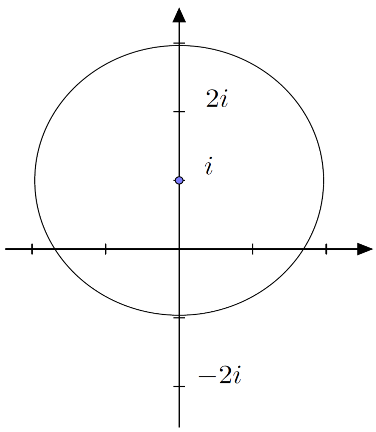
Donc la fonction est holomorphe à l'intérieur du cercle. Ainsi, par le théorème de Cauchy,

$$\int_{|z|=1} \frac{e^{z^2}}{(z-2i)^2} dz = 0.$$

2) Considérons maintenant cette intégrale

$$\int_{|z-i|=2} \frac{\cos(\pi z)}{(z+2i)^2(z-2i)^2} dz.$$

Les deux singularités de la fonctions f sont $-2i$ et $2i$. Le point $-2i$ est à l'extérieur du cercle $|z-i|=2$ et le point $2i$ est à l'intérieur de cercle.



Ainsi,

$$\int_{|z-i|=2} \frac{\cos(\pi z)}{(z+2i)^2(z-2i)^2} dz = \int_{|z-i|=2} \frac{f(z)}{(z-2i)^2} dz,$$

avec

$$f(z) = \frac{\cos(\pi z)}{(z+2i)^2}.$$

En utilisant la formule intégrale de Cauchy, nous avons

$$\int_{|z-i|=2} \frac{\cos(\pi z)}{(z+2i)^2(z-2i)^2} dz = \frac{2\pi i}{1!} f'(2i).$$

La dérivée de f est donnée par

$$f'(z) = \frac{-\pi(z+2i)^2 \sin(\pi z) - 2(z+2i)\cos(\pi z)}{(z+2i)^4}.$$

Ainsi,

$$\int_{|z-i|=2} \frac{\cos(\pi z)}{(z+2i)^2(z-2i)^2} dz = \frac{\pi \sinh(2\pi) + \pi \cosh(2\pi)}{32}$$

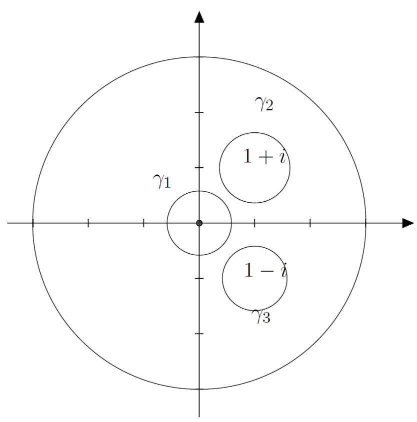
3) Soit l'intégrale suivant

$$\int_{|z|=3} \frac{e^z}{z^2(z^2-2z+2)} dz.$$

La fonction

$$\frac{e^z}{z^2(z^2-2z+2)}$$

possède 3 singularités 0 , $z_1 := 1+i$ et $z_2 := 1-i$. (Notons que le polynôme $z^2-2z+2=0$ possède un $\Delta = 4i^2$). Nous remarquons que ces 3 singularités sont à l'intérieur du cercle $|z|=3$.



Ainsi, nous avons

$$\int_{|z|=3} \frac{e^z}{z^2(z^2-2z+2)} dz = \int_{\gamma_1} \frac{e^z}{z^2(z^2-2z+2)} dz + \int_{\gamma_2} \frac{e^z}{z^2(z^2-2z+2)} dz,$$

$$+\int_{\gamma_3} \frac{e^z}{z^2(z^2-2z+2)}dz$$
$$= \frac{2\pi i}{1!}f'(0) + 2\pi i g(z_1) + 2\pi i h(z_2),$$

avec

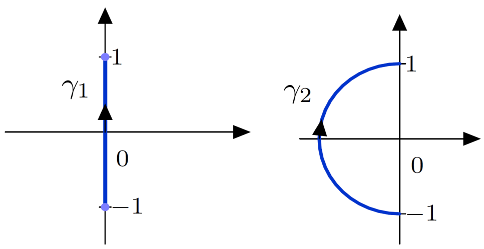
$$f(z) = \frac{e^z}{z^2-2z+2}, \quad g(z) = \frac{e^z}{z^2(z-z_2)}, \quad h(z) = \frac{e^z}{z^2(z-z_1)}.$$

Ainsi,

$$\int_{|z|=3} \frac{e^z}{z^2(z^2-2z+2)}dz = 2\pi i(1) + 2\pi i\left(-\frac{e^{1+i}}{4}\right) + 2\pi i\left(\frac{-e^{1-i}}{4}\right).$$

Exercice 3.11. Calculer l'intégrale suivante

$\int_{\gamma_i} \overline{z}dz,$ **avec**



Solution

La paramétrisation du chemin γ_1 est donnée par

$$\gamma_1(t) = it, \qquad \text{avec} \quad -1 \leq t \leq 1.$$

Alors, nous obtenons

$$\int_{\gamma_1} \overline{z}dz = \int_{-1}^{1} -iti\,dt = 0.$$

D'un autre côté, γ_2 est donné par $\gamma_2(t) = e^{it}$ avec t varie de $-\pi/2$ à $-3\pi/2$. Nous avons,

$$\int_{\gamma_1} \overline{z}dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{3\pi}{2}} e^{-it}ie^{it}\,dt = -i\pi.$$

Exercice 3.12. Calculer les intégrales suivantes

1) $\int_\gamma (z^2 + \overline{z}^2)dz$, **où** γ **est le segment de droite** $[0, 2+i]$

2) $\int_\gamma 4z^3 dz$, **où** γ **est le quart de cerle de centre 0 et de rayon 2.**

3) $\int_{[1,2+i]} \frac{1}{z} dz$.

4) $\int_\gamma \frac{z}{(1+i-z)^2} dz$, **où** γ **est le cercle de rayon 2 et de centre** $1+i$.

5) $\int_\gamma Re(z)dz$, **où** γ **est un cercle de centre 0 et de rayon 1.**

Solution

(1) L'intégrale est donnée par ($\gamma(t) = (2+i)t$ avec $0 \le t \le 1$)

$$\int_{[0,2+i]} (z^2 + \overline{z}^2)dz = \int_{-1}^{1} [(2+i)^2 t^2 + (2-i)^2 t^2](2+i)dt = 2(2+i).$$

(2) Nous avons

$$\int_\gamma 4z^3 dz = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 8e^{3it} 2ie^{it}\, dt = 64i \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{4it}\, dt = 0.$$

(3) La paramétrisation est donnée par

$$\gamma(t) = (1-t) + (2+i)t, \qquad 0 \le t \le 1.$$

Nous obtenons

$$\int_{[1,2+i]} \frac{1}{z} dz = \int_0^1 \frac{1+i}{1+(1+i)t}\, dt = [\ln(1+(1+i)t)]_0^1 = \ln(2+i).$$

(4) La paramétrisation est donnée par

$$\gamma(t) = 1 + i + 2e^{it}, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

On a

$$\int_\gamma \frac{z}{(1+i-z)^2}dz = \int_0^{2\pi} \frac{1+i+2e^{it}}{(-2e^{it})^2}(2ie^{it})\, dt.$$

On obtient

$$\int_\gamma \frac{z}{(1+i-z)^2}dz = \frac{i}{2}\int_0^{2\pi} (1+i+2e^{it})e^{-it}\, dt = 2i\pi.$$

(5) Nous avons

$$\int_\gamma Re(z)dz = \int_\gamma \frac{z+\overline{z}}{2}dz = \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}(ie^{it})\, dt = i\pi.$$

Exercice 3.13. En utilisant les formules intégrales de Cauchy, calculer l'intégrale suivante

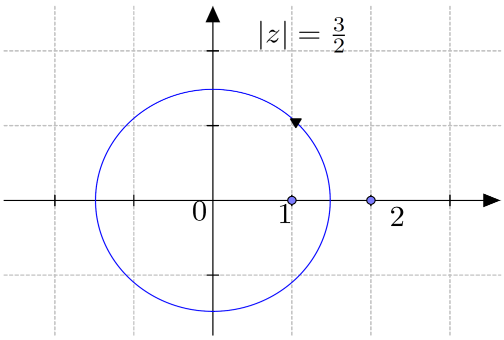
$$\int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{\sin(\pi z^2)+\cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)}\, dz.$$

Solution

Nous remarquons que la fonction

$$\frac{\sin(\pi z^2)+\cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)}$$

possède deux singularités, 1 et 2.



Ainsi, la fonction f est holomorphe à l'intérieur de $|z| = \frac{3}{2}$ (2 n'appartient pas). Donc,

$$\int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{\sin(\pi z^2)+\cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)}\, dz = 2\pi i f(1).$$

avec

$$f(z) = \frac{\sin(\pi z^2)+\cos(\pi z^2)}{(z-2)}.$$

Ceci implique que,

$$\int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{\sin(\pi z^2)+\cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)}\, dz = 2\pi i.$$

<u>Exercice</u> 3.14. En utilisant les formules intégrales de Cauchy, calculer les intégrales suivantes

$$\mathbf{1)}\ \int_{|z|=2} \frac{1}{(z-i)(z^2+2z-3)} dz,$$

$$\mathbf{2)}\ \int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{z^2}{(z-2)(z^2+4)} dz,$$

$$\mathbf{3)}\ \int_{|z|=3} \frac{z+1}{z(z^2-4iz-4)} dz.$$

Solution

1/ Les singularités de f sont

$$z_0 = i, \qquad z_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad z_2 = -3.$$

Tout d'abord, nous avons

$$\begin{aligned} I_1 &:= \int_{|z|=2} \frac{1}{(z-i)(z^2+2z-3)} dz, \\ &= \int_{|z|=2} \frac{1}{(z-i)(z-1)(z+3)} dz. \end{aligned}$$

Ainsi, l'intégrale se calcule comme suit

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\gamma_1} \frac{\frac{1}{(z-1)(z+3)}}{(z-i)}dz + \int_{\gamma_2} \frac{\frac{1}{(z-i)(z+3)}}{(z-1)}dz, \\ &= 2\pi i[g_1(i)+g_2(1)] = 2\pi i\left[\frac{1}{(i-1)(i+3)} + \frac{1}{4(1-i)}\right], \end{aligned}$$

avec

$$g_1(z) = \frac{1}{(z-1)(z+3)} \qquad \text{et} \qquad g_2(z) = \frac{1}{(z-i)(z+3)}.$$

2/ Les singularités de f sont

$$z_0 = 2, \qquad z_1 = 2i \qquad \text{et} \qquad z_2 = -2i.$$

Tout d'abord, nous avons

$$I_2 := \int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{z^2}{(z-2)(z^2+4)}dz \quad = \quad \int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{z^2}{(z-2)(z+2i)(z-2i)}dz.$$

Cette intégrale vaut zéro d'après le théorème de Cauchy. Ainsi,

$$I_2 := \int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{z^2}{(z-2)(z^2+4)}dz \quad = \quad 0.$$

3/ Les singularités de f sont

$$z_0 = 2, \qquad z_1 = 2i \qquad \text{et} \qquad z_2 = -2i.$$

Tout d'abord, nous avons

$$I_2 := \int_{|z|=3} \frac{z+1}{z(z^2-4iz-4)}dz \quad = \quad \int_{|z|=3} \frac{z+1}{z(z-2i)^2}dz.$$

Ainsi, l'intégrale se calcule comme suit

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\gamma_1} \frac{\frac{z+1}{(z-2i)^2}}{z}dz + \int_{\gamma_2} \frac{\frac{z+1}{z}}{(z-2i)^2}dz, \\ &= 2\pi i[g_1(0)+g_2'(2i)] = 2\pi i\left[\frac{-1}{4}+\frac{1}{4}\right] = 0, \end{aligned}$$

avec
$$g_1(z) = \frac{z+1}{(z-2i)^2},$$
et
$$g_2(z) = \frac{z+1}{z}.$$

Exercice 3.15. En utilisant les formules intégrales de Cauchy, calculer les intégrales suivantes :

$$1) \int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^z}{z(z-1)}dz, \qquad 2) \int_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{e^z}{z(z-1)}dz,$$
$$3) \int_{|z+1|=1} \frac{e^{3z}}{z^2+1}dz, \qquad 4) \int_{|z+i|=1} \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}dz,$$
$$5) \int_{|z|=3} \frac{\cos(\pi z)}{(z+1)(z-2)}dz, \qquad 6) \int_{|z-1|=2} \frac{ze^z}{(z-1)^3}dz,$$
$$7) \int_{|z|=1} \frac{1}{z^3(z-4)}dz.$$

Solution

(1) Il y a une singularité en 0 (le point 1 n'est pas dans le domaine de bord le cercle $|z| = \frac{1}{2}$) et donc nous avons
$$\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^z}{z(z-1)}dz = 2\pi i f(0) = -2\pi i,$$
avec (clairement, cette fonction est holomorphe sur le domaine de bord le cercle $|z| = \frac{1}{2}$)
$$f(z) = \frac{e^z}{(z-1)}.$$
(2) De la même manière nous avons
$$\int_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{e^z}{z(z-1)}dz = 2\pi i i f(1) = 2\pi i e,$$
avec
$$f(z) = \frac{e^z}{z}.$$

(3) Les singularités sont

$$z_0 = i \qquad \text{et} \qquad z_1 = -i,$$

et nous avons

$$\int_{|z+1|=1} \frac{e^{3z}}{z^2+1} dz = \int_{|z+1|=1} \frac{e^{3z}}{(z-i)(z+i)} dz.$$

Cette intégrale vaut zéro d'après le théorème de Cauchy. Ainsi,

$$\int_{|z+1|=1} \frac{e^{3z}}{z^2+1} dz = 0.$$

(4) Tout d'abord nous avons

$$\int_{|z+i|=1} \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2} dz = \int_{|z+i|=1} \frac{e^{iz}}{(z-i)^2(z+i)^2} dz.$$

En utilisant les formules intégrales de Cauchy, nous obtenons

$$\int_{|z+i|=1} \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2} dz = 2\pi i f'(-i) = 2\pi i \frac{ie}{8},$$

avec

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z-i)^2}.$$

(5) Les singularités de f sont

$$z_0 = -1 \qquad \text{et} \qquad z_2 = 2.$$

Ainsi, l'intégrale se calcule comme suit

$$\begin{aligned}
\int_{|z|=3} \frac{\cos(\pi z)}{(z+1)(z-2)} dz &= \int_{\gamma_1} \frac{\frac{\cos(\pi z)}{(z-2)}}{z+1} dz + \int_{\gamma_2} \frac{\frac{\cos(\pi z)}{z+1}}{(z-2)} dz, \\
&= 2\pi i [g_1(-1) + g_2(2)] = 2\pi i \left[\frac{-1}{-3} + \frac{1}{3}\right] = \frac{4\pi i}{3}.
\end{aligned}$$

avec

$$g_1(z) = \frac{z+1}{(z-2i)^2} \qquad \text{et} \qquad g_2(z) = \frac{z+1}{z}.$$

(6) En utilisant les formules intégrales de Cauchy, nous avons

$$\int_{|z-1|=2} \frac{ze^z}{(z-1)^3} dz = 2\pi i \frac{f''(1)}{2!} = 3e\pi i,$$

avec

$$f(z) = ze^z.$$

(7) En utilisant les formules intégrales de Cauchy, nous avons

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z^3(z-4)} dz = 2\pi i \frac{f''(0)}{2!} = \frac{-1}{32}\pi i,$$

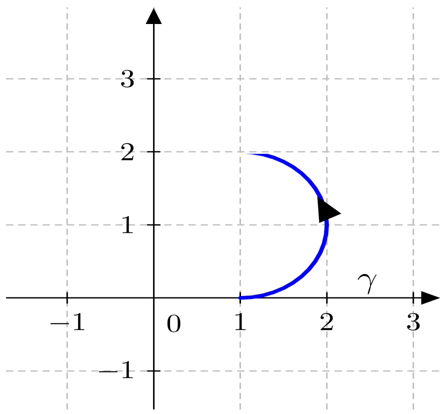
avec

$$f(z) = \frac{1}{(z-4)}.$$

<u>Exercice</u> 3.16. Calculer l'intégrale curviligne suivante

$$\int_\gamma \frac{z}{(z-1-i)^2} dz$$

où γ est le contour suivant :



Solution

Le chemin γ est un demi-cercle de centre $1+i$ et de rayon 1. Ainsi, nous avons

$$\gamma(t) = 1 + i + e^{it}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$\gamma'(t) = ie^{it}.$$

L'intégrale curviligne devient

$$\int_\gamma \frac{z}{(z-1-i)^2}dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+i+e^{it}}{e^{2it}}\right) ie^{it}dt,$$

$$= i\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1+i+e^{it}\right) e^{-it}dt,$$

$$= i\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(e^{-it}+ie^{-it}+1\right) dt,$$

$$= i\left[\frac{e^{-it}}{-i} - e^{-it} + t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}},$$

$$= i\left[\frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{-i} - e^{-i\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{2}\right] - i\left[\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{-i} - e^{i\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2}\right].$$

Exercice 3.17. En utilisant les formules intégrales de Cauchy, calucler les intégrales suivantes

$$1) \int_{|z|=4} \frac{e^z}{z^2(z^2+\pi^2)}dz,$$

$$2) \int_{|z+1|=1} \frac{e^{3z}}{z^2+1}dz,$$

$$3) \int_{|z|=3} \frac{z^2+4}{z^3+2z^2+2z}dz,$$

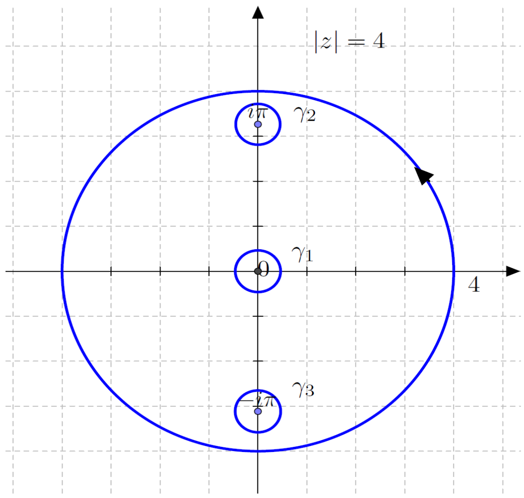
$$4) \int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{\sin(\pi z^2)+\cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)}dz.$$

Solution

1) Nous remarquons que la fonction

$$\frac{e^z}{z^2(z^2+\pi^2)}$$

possède 3 singularités $0, i\pi$ et $-i\pi$.



Ainsi,

$$\int_{|z|=4} \frac{e^z}{z^2(z^2+\pi^2)}dz = \int_{\gamma_1} \frac{e^z}{z^2(z^2+\pi^2)}dz + \int_{\gamma_2} \frac{e^z}{z^2(z^2+\pi^2)}dz + \int_{\gamma_3} \frac{e^z}{z^2(z^2+\pi^2)}dz,$$

$$= \int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z^2}dz + \int_{\gamma_2} \frac{g(z)}{(z-i\pi)}dz + \int_{\gamma_3} \frac{h(z)}{(z+i\pi)}dz.$$

avec

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2+\pi^2}, \quad g(z) = \frac{e^z}{z^2(z+i\pi)} \quad \text{et} \quad h(z) = \frac{e^z}{z^2(z-i\pi)}.$$

Les fonction f, g et h sont holomorphes à l'intérieur de γ_1, γ_2 et γ_3, respectivement. Ainsi, d'après les formules intégrales de Cauchy, on obtient

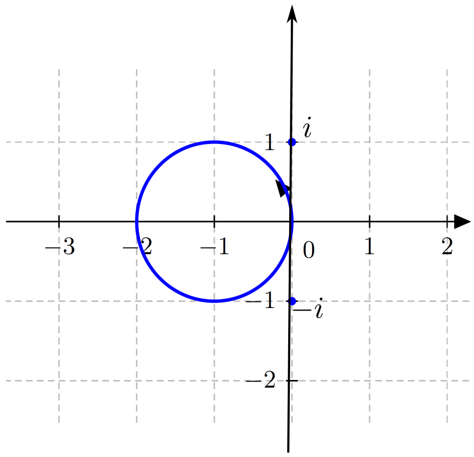
$$\int_{|z|=4} \frac{e^z}{z^2(z^2+\pi^2)}dz = 2\pi i f'(0) + 2\pi i g(i\pi) + 2\pi i h(-i\pi),$$

$$= 2\pi i \left(\frac{1}{\pi^2}\right) + 2\pi i \left(\frac{1}{2\pi^3 i}\right) + 2\pi i \left(\frac{-1}{2\pi^3 i}\right) = \frac{2i}{\pi}.$$

2) Nous remarquons que la fonction

$$\frac{e^{3z}}{z^2+1}$$

est holomorphe à l'intérieur de $|z+1| = 1$.



Ainsi, par le théorème de Cauchy,

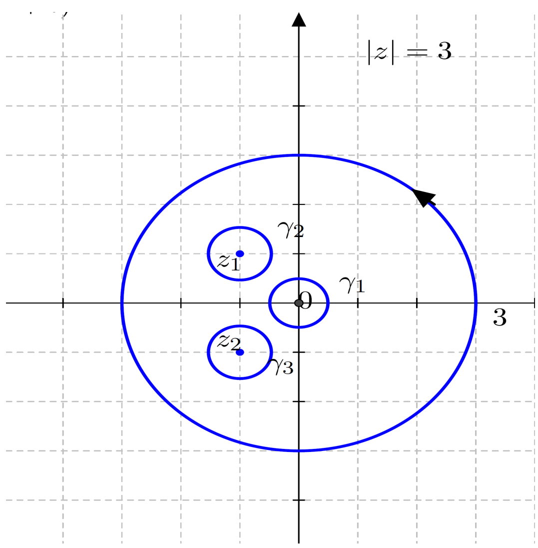
$$\int_{|z+1|=1} \frac{e^{3z}}{z^2+1} dz = 0.$$

3) La fonction

$$\frac{z^2+4}{z^3+2z^2+2z}$$

possède 3 singularité

$$0, \quad z_1 := -1+i \quad \text{et} \quad z_2 := -1-i.$$



Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_{|z|=3}\frac{z^2+4}{z^3+2z^2+2z}dz &= \int_{\gamma_1}\frac{z^2+4}{z^3+2z^2+2z}dz\\ &\quad+\int_{\gamma_2}\frac{z^2+4}{z^3+2z^2+2z}dz\\ &\quad+\int_{\gamma_3}\frac{z^2+4}{z^3+2z^2+2z}dz,\\ &= \int_{\gamma_1}\frac{f(z)}{z}dz+\int_{\gamma_2}\frac{g(z)}{(z-z_1)}dz+\int_{\gamma_3}\frac{h(z)}{(z-z_2)}dz,\end{aligned}$$

avec

$$f(z)=\frac{z^2+4}{z^2++2z+2},\quad g(z)=\frac{z^2+4}{z(z-z_2)},$$

et

$$h(z)=\frac{z^2+4}{z(z-z_1)}.$$

Les fonction f, g et h sont holomorphes à l'intérieur de γ_1, γ_2 et γ_3, respectivement. Ainsi d'après les formules intégrales de Cauchy, on obtient

$$\int_{|z|=3}\frac{z^2+4}{z^3+2z^2+2z}dz=2\pi i(2)+2\pi i\left(\frac{-i+2}{-i-1}\right)+2\pi i\left(\frac{-i+2}{i-1}\right).$$

Donc,

$$\int_{|z|=3}\frac{z^2+4}{z^3+2z^2+2z}dz=2\pi i.$$

4) La fonction

$$\frac{\sin(\pi z^2)+\cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)}$$

possède une singularité à l'intérieur de $|z|=\frac{3}{2}$. Ainsi,

$$\int_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{\sin(\pi z^2)+\cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)}dz=2\pi i f(1),$$

avec

$$f(z)=\frac{\sin(\pi z^2)+\cos(\pi z^2)}{(z-2)}.$$

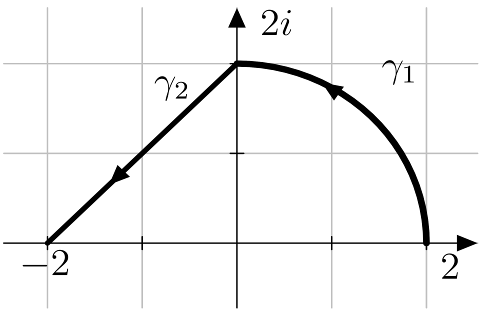
Donc,

$$\int_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{\sin(\pi z^2)+\cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)}dz=2\pi i.$$

Exercice 3.18. Calculer l'intégrale curviligne suivante

$$\int_{\gamma} |z|^2 dz$$

où $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ est le chemin suivant :



Solution

Le chemin γ_1 est un quart de cercle de centre 0 et de rayon 2. Ainsi, nous avons $\gamma_1(t) = 2e^{it}, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Ainsi, $\gamma_1'(t) = 2ie^{it}$. L'intégrale curviligne devient

$$\int_{\gamma_1} |z|^2 dz = \int_{\gamma_1} z\bar{z} dz = \int_0^{\pi/2} (2e^{it})(2e^{-it})(2ie^{it}) dt$$

$$= 8i \int_0^{\pi/2} e^{it} dt = 8i \left[\frac{e^{it}}{i}\right]_0^{\pi/2} = 8(e^{i\frac{\pi}{2}} - 1) = 8(i-1).$$

Le chemin γ_2 est un segment d'origine $2i$ et d'extrémité -2. Ainsi, $\gamma_2(t) = 2i(1-t) - 2t, \quad$ avec $\quad 0 \leq t \leq 1$. Ainsi, $\gamma_2'(t) = 2i - 2$. L'intégrale curviligne devient

$$\int_{\gamma_2} |z|^2 dz = \int_{\gamma_2} z\bar{z} dz = \int_0^1 (-2t + 2i(1-t))(-2t - 2i(1-t))(-2i-2) dt$$

$$= (-2i-2) \int_0^1 \left(4t^2 + 4(1-t)^2)\right) dt = (-2i-2) \int_0^1 \left(8t^2 + 4 - 8t)\right) dt$$

$$= (-2i-2) \left[\frac{8t^3}{3} + 4t - 4t^2\right]_0^1 = (-2i-2)\frac{8}{3}.$$

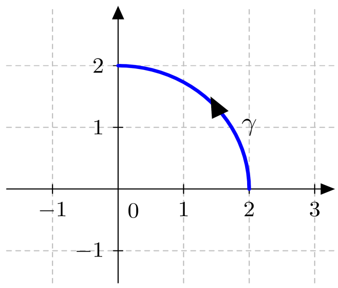
Finalement,

$$\int_\gamma |z|^2 dz = \int_{\gamma_1} |z|^2 dz + \int_{\gamma_2} |z|^2 dz = 8(i-1) + (-2i-2)\frac{8}{3}.$$

Exercice 3.19. I) Calculer l'intégrale suivante

$$\int_\gamma \frac{z^2+4}{z} dz,$$

avec γ donné dans la figure suivante :



Solution

La paramétrisation du chemin (quart de cercle positif de centre 0 et de rayon 2) est donnée par :

$$\gamma(t) = 2e^{it}, \qquad \text{avec} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2},$$

et

$$\gamma'(t) = 2ie^{it}.$$

Pa définition, on a

$$\int_\gamma \frac{z^2+4}{z} dz = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{4e^{2it}+4}{2e^{it}}\right)(2ie^{it})dt..$$

Ce qui donne

$$\int_\gamma \frac{z^2+4}{z} dz = 4i \int_0^{\pi/2} (e^{2it}+1)dt = 4i\left[\frac{e^{2it}}{2i}\Big|_0^{\pi/2} + t\Big|_0^{\pi/2}\right].$$

Donc,

$$\int_\gamma \frac{z^2+4}{z}dz = 4i\left[\frac{e^{i\pi}-e^0}{2i}+\frac{\pi}{2}\right] = -4+2i\pi.$$

Exercice 3.20. En utilisant les formules intégrales de Cauchy, calculer l'intégrale suivante

$$\int_{|z|=2} \frac{\cos \pi z}{z^2(z-1)}dz.$$

Solution

Soient γ_1 un cercle de centre 1 et de rayon r_1 et γ_2 un cercle de centre 0 et de rayon r_2. Ainsi, nous avons

$$\int_{|z|=2} \frac{\cos \pi z}{z^2(z-1)}dz = \int_{\gamma_1} \frac{\frac{\cos \pi z}{z^2}}{z-1}dz + \int_{\gamma_2} \frac{\frac{\cos \pi z}{z-1}}{z^2}dz = 2\pi i h(1) + 2\pi i g'(0).$$

Posons $h(z) = \frac{\cos \pi z}{z^2}$ qui est holomorphe à l'intérieur de γ_1 et $g(z) = \frac{\cos \pi z}{z-1}$ qui est holomorphe à l'intérieur de γ_2. Donc, d'après les formules intégrales de Cauchy, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{|z|=2} \frac{\cos \pi z}{z^2(z-1)}dz &= \int_{\gamma_1} \frac{\frac{\cos \pi z}{z^2}}{z-1}dz + \int_{\gamma_2} \frac{\frac{\cos \pi z}{z-1}}{z^2}dz, \\
&= 2\pi i\, h(1) + 2\pi i\, g'(0).
\end{aligned}$$

Ainsi,

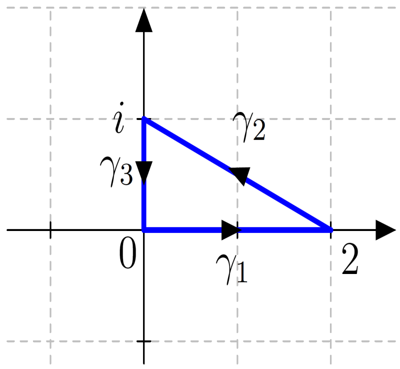
$$\int_{|z|=2} \frac{\cos \pi z}{z^2(z-1)}dz = 2\pi i(-1) + 2\pi i(-1) = -4\pi i.$$

3.2 Exercices supplémentaires

Exercice 42 - Calculer l'intégrale curviligne suivante

$$\int_\gamma \left(\frac{z-\overline{z}}{i}\right) dz,$$

où $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ est le chemin suivant



Exercice 43 - Calculer les intégrales suivantes :

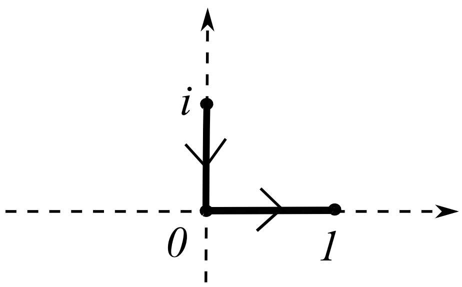
$$\int_{\gamma_1} z - 1\, dz, \qquad \text{avec } \gamma_1 = [1-i, 1+i] \cup [1+i, -1+i],$$

et

$$\int_{\gamma_2} 2i\, dz, \qquad \text{avec } \gamma_2 \text{ est le chemin } |z-i| = 2.$$

Exercice 44 - Calculer l'intégrale complexe suivante :

$$\int_{\gamma} 4\, dz, \qquad \text{avec } \gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \text{ est le chemin suivant}$$

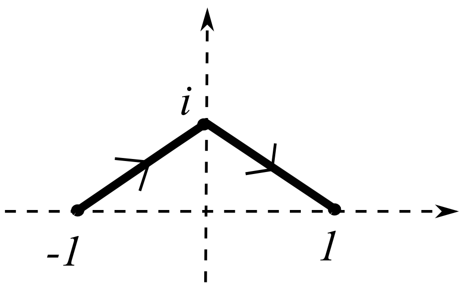


Exercice 45 - 1- Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_{\gamma} 5i\overline{z}\, dz, \qquad \text{avec } \gamma \text{ est le chemin d'équation } |z-i| = \frac{1}{5}.$$

2- Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_{\gamma} z^2 - \overline{z}\, dz, \qquad \text{avec } \gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \text{ est le chemin suivant}$$



Exercice 46 - Calculer les intégrales suivantes :

$$(1) \int_{C(2,1)} \frac{e^z + z^2}{(z-2)^2}\, dz, \qquad (2) \int_{C(-i,\frac{1}{2})} \frac{cos(z)}{(z-i)^2}\, dz,$$

$$(3) \int_{C(i,1)} \frac{e^z + z^2}{(z-2)^2}\, dz, \qquad (4) \int_{C(i,1)} \frac{cos(z)}{(z-i)^2}\, dz.$$

Exercice 47 - Calculer par deux méthodes différentes les intégrales suivantes :

$$(1) \int_{C(0,2)} z^2 - 2z\, dz, \qquad (2) \int_{C(2+i,3)} \frac{1}{z-(2+i)}\, dz,$$

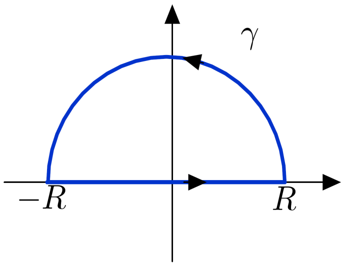
$$(3) \int_{C(5i,2)} (z-5i)^2\, dz, \qquad (4) \int_{C(1+i,2)} \frac{z}{z-(i+1)}\, dz,$$

$$(5) \int_{C(0,3)} 1 - z^3\, dz, \qquad (6) \int_{C(\frac{1}{3}i,1)} \frac{1}{(z-\frac{1}{3}i)^2}\, dz,$$

$$(7) \int_{C(0,1)} z^2 + 4z\, dz, \qquad (8) \int_{C(\frac{1}{2}i,1)} \frac{1}{z-\frac{1}{2}i}\, dz.$$

Exercice 48 - Calculer l'intégrales suivante

$$\int_{\gamma} |z|^2 dz, \qquad \text{où}$$



Exercice 49 - En utilisant les formules intégrales de Cauchy, calculer les intégrales suivantes :

$$1) \int_{|z|=2a} \frac{e^z dz}{z^2+a^2},$$
$$2) \int_{|z+1|=1} \frac{e^{3z}}{z^2+1} dz,$$
$$3) \int_{|z|=4} \frac{e^z}{z^2(z^2+\pi^2)} dz,$$
$$4) \int_{|z|=3} \frac{e^z}{(z-1)^2(z^2-2z)} dz.$$

Exercice 50 - En utilisant les formules intégrales de Cauchy, calculer les intégrales suivantes

$$\int_{|z-\pi|=\frac{1}{2}} \frac{\cos(z)}{z^2(z-\pi)} dz \qquad \text{et} \qquad \int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\cos(z)}{z^2(z-\pi)} dz.$$

Chapitre 4

Séries de Laurent et résidus

4.1 Exercices corrigés

Exercice 4.1. Soit f la fonction suivante

$$f(z) = \frac{1}{z(z-3)}.$$

Développer la fonction f en série de Laurent au voisinage de 0 en précisant les domaines de convergence.

Solution

1) Dans la région $|z| < 3$, on a

$$f(z) = \frac{1}{z}\frac{1}{z-3} = \frac{1}{3z}\frac{1}{\frac{z}{3}-1} = \frac{-1}{3z}\frac{1}{1-\frac{z}{3}}.$$

On obtient donc

$$f(z) = \frac{-1}{3z}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n.$$

2) Dans la région $|z| > 3$, on a

$$f(z) = \frac{1}{z}\frac{1}{z-3} = \frac{1}{z^2}\frac{1}{1-\frac{3}{z}}.$$

Donc,

$$f(z) = \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{z}\right)^n.$$

Exercice 4.2. Soit

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+2)}.$$

1) Trouver les constantes a et b tels que

$$f(z) = \frac{a}{z-1} + \frac{b}{z+2}.$$

2) Développer la fonction $f(z)$ en série de Laurent autour de 0.

Solution

1) On considère la fonction f comme étant

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+2)} = \frac{a}{z-1} + \frac{b}{z+2}.$$

Donc,

$$f(z) = \frac{az + 2a + bz - b}{(z-1)(z+2)} = \frac{(a+b)z + 2a - b}{(z-1)(z+2)}.$$

Ainsi,

$$\begin{cases} a + b = 1, \\ 2a - b = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = 1/3, \\ b = 2/3. \end{cases}$$

Ceci implique que

$$f(z) = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z-1} + \frac{2}{z+2}\right].$$

2) Le développement de la fonction $f(z)$ en série de Laurent autour de 0 se fait comme suit :

• Dans la région $|z| < 1$, nous avons

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{1-z} + \frac{1}{2}\frac{2}{\frac{z}{2}+1}\right] \\ &= \frac{1}{3}\left[-\sum_{n=0}^{+\infty} z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^n\right]. \end{aligned}$$

• Dans la région $1 < |z| < 2$, nous avons

$$f(z) = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z}.\frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{1}{2}\frac{2}{\frac{z}{2}+1}\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{1}{z})^n + \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(\frac{z}{2})^n\right].$$

• Dans la région $2 < |z| < +\infty$, nous avons

$$f(z) = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z}.\frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{2}{z}\frac{1}{1+\frac{2}{z}}\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{1}{z})^n + \frac{2}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(\frac{2}{z})^n\right].$$

Exercice 4.3. Donner le développement en série de Laurent de la fonction suivante en précisant dans quelles parties de $\mathbb{C}$ elles sont valables.

$$\frac{1}{(z+2)(z-1)}, \quad \textbf{autour de} \quad 0, \quad de \quad -2.$$

Solution

Dans un premier temps, on essaye d'écrire la fonction sous une forme convenable. Posons,

$$f(z) = \frac{1}{(z+2)(z-1)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+2}.$$

Par identification, on aboutit à

$$f(z) = \frac{1}{(z+2)(z-1)} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+2}\right].$$

Nous commence par le premier cas (autour de 0) :

1- Si $|z| < 1$, alors

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{z}{2}+1}\right], \\ &= \frac{1}{3}\left[-\sum_{n\geq 0} z^n - \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^n\right], \\ &= -\frac{1}{3}\sum_{n\geq 0} z^n - \frac{1}{6}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^n. \end{aligned}$$

2- Si $1 < |z| < 2$, alors

$$f(z) = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{z}{2}+1}\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}(\frac{1}{z})^n - \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^n\right].$$

3- Si $2 < |z| < +\infty$, alors

$$f(z) = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{2}{z}}\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}(\frac{1}{z})^n - \frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\frac{2}{z}\right)^n\right].$$

Nous passons au deuxième cas (autour de -2) :
1 - Si $0 < |z+2| < 3$, alors

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+2}\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z+2-3} - \frac{1}{z+2}\right], \\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\frac{1}{\frac{z+2}{3}-1} - \frac{1}{z+2}\right] = \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{3}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{z+2}{3}\right)^n - \frac{1}{z+2}\right]. \end{aligned}$$

2- Si $3 < |z+2| < +\infty$, alors

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+2}\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z+2-3} - \frac{1}{z+2}\right], \\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z+2}\frac{1}{\frac{3}{z+2}-1} - \frac{1}{z+2}\right] = \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{z+2}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{3}{z+2}\right)^n - \frac{1}{z+2}\right]. \end{aligned}$$

Exercice 4.4. Déterminer les points singuliers et préciser leurs types puis calculer les résidus des fonctions suivantes :

$$1)\ \frac{e^z}{z^2(z-1)(z-2)}, \quad 2)\ \frac{e^z}{z}, \quad 3)\ \frac{1-\cos(z)}{z}, \quad 4)\ \frac{1}{z^3-z^5}.$$

Solution

1. Soit

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2(z-1)(z-2)}.$$

Nous remarquons que les points singuliers sont 0, 1 et 2. Le point 0 est un pôle double, par contre 1 et 2 sont des pôles simples. Donc, nous avons

$$\begin{aligned}
Res(f,0) &= \frac{1}{1}\lim_{z\to 0}\left[z^2\frac{e^z}{z^2(z-1)(z-2)}\right]',\\
&= \frac{5}{4}.\\
Res(f,1) &= \lim_{z\to 1}\left[(z-1)\frac{e^z}{z^2(z-1)(z-2)}\right],\\
&= -e.\\
Res(f,2) &= \lim_{z\to 2}\left[(z-2)\frac{e^z}{z^2(z-1)(z-2)}\right],\\
&= \frac{e^2}{4}.
\end{aligned}$$

2. Soit $f(z)=\frac{e^z}{z}$. Le point 0 est un pôle simple et donc

$$Res(f,0)=\lim_{z\to 0} z\frac{e^z}{z}=1.$$

3. Nous avons

$$f(z)=\frac{1-\cos z}{z}=\frac{1-(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\dots)}{z}=\frac{z}{2!}-\frac{z^3}{4!}+\dots$$

Par conséquent, 0 est une singularité apparente. Donc, $Res(f,0)=0$.

4. Soit

$$f(z)=\frac{1}{z^3-z^5}=\frac{1}{z^3}\frac{1}{1-z^2}.$$

Le point 0 est un pôle d'ordre 3, par contre -1 et 1 sont des pôles simples. Nous avons

$$\begin{aligned}
Res(f,0) &= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left[z^3\frac{1}{z^3}\frac{1}{1-z^2}\right]'',\\
&= 1.\\
Res(f,1) &= \lim_{z\to 1}\left[(z-1)\frac{1}{z^3}\frac{1}{1-z^2}\right],\\
&= -\frac{1}{2}.\\
Res(f,-1) &= \lim_{z\to -1}\left[(z+1)\frac{1}{z^3}\frac{1}{1-z^2}\right],\\
&= -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Exercice 4.5. Quels sont les points singuliers des fonctions suivantes, préciser leurs types puis calculer les résidus.

$$1)\ \frac{e^{iz}}{z^2+1}, \qquad 2)\ \frac{\ln(1+z)}{z^2}, \qquad 3)\ \frac{1-e^z}{1+e^z} \qquad 4)\ \frac{ze^z}{z^2-1}.$$

Solution

1. Soit $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+1}$. Les points i et $-i$ sont des pôles simples. Nous avons

$$\begin{aligned}
Res(f, i) &= \lim_{z\to i}\left[(z-i)\frac{e^{iz}}{(z+i)(z-i)}\right], \\
&= \frac{e^{-1}}{2i}. \\
Res(f, -i) &= \lim_{z\to -i}\left[(z+i)\frac{e^{iz}}{(z+i)(z-i)}\right], \\
&= \frac{e}{-2i}.
\end{aligned}$$

2. Soit $f(z) = \frac{\ln(1+z)}{z^2}$. Puisque autour de 0, on a

$$\ln(1+z) = z - z^2/2 + z^3/3 + ...,$$

alors, nous avons

$$f(z) = \frac{\ln(1+z)}{z^2} = \frac{z - z^2/2 + z^3/3 + ...}{z^2} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \frac{z}{3} + ...$$

Donc, 0 est un pôle simple et on observe $Res(f, 0) = 1$.
3. Soit

$$f(z) = \frac{1-e^z}{1+e^z}.$$

Si $1 + e^z = 0$, alors

$$z_k = (2k+1)\pi i, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Nous avons

$$Res(f, (2k+1)\pi i) = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)} = \frac{1 - e^{(2k+1)\pi i}}{e^{(2k+1)\pi i}} = -2.$$

4. Soit $f(z) = \frac{ze^z}{z^2-1}$. Les points -1 et 1 sont des pôles simples. Nous avons

$$\begin{aligned} Res(f,1) &= \lim_{z\to 1}\left[(z-1)\frac{ze^z}{z^2-1}\right], \\ &= -\frac{e}{2}. \\ Res(f,-1) &= \lim_{z\to -1}\left[(z+1)\frac{ze^z}{z^2-1}\right], \\ &= -\frac{e^{-1}}{2}. \end{aligned}$$

Exercice 4.6. Soit la fonction

$$f(z) = \frac{-1}{i}\frac{1}{z^2 - \frac{5}{2}z + 1}.$$

1) Déterminer les singularités et préciser leurs types.

2) Par la méthode des résidus, calculer

$$\int_{|z|=1} f(z)dz.$$

Solution

1/ Les singularités de f sont solutions de

$$z^2 - \frac{5}{2}z + 1 = 0.$$

Ses singularités sont données par

$$z_0 = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad z_1 = 2.$$

De plus, f s'écrit sous la forme

$$f(z) = \frac{-1}{i}\frac{1}{(z-\frac{1}{2})(z-2)}.$$

Clairement, les deux singularités sont des pôles simples. En effet, pour $z_0 = \frac{1}{2}$, on a

$$f(z) = \frac{\frac{-1}{i}\frac{1}{(z-2)}}{(z-\frac{1}{2})^1}.$$

Soit

$$\phi(z) = \frac{-1}{i}\frac{1}{(z-2)},$$

et nous avons

$$\phi(\frac{1}{2}) \neq 0.$$

Ainsi, z_0 est un pôle d'ordre 1, autrement dit, z_0 un pôle simple. On applique un raisonnement similaire pour $z_1 = 2$, soit z_1 aussi un pôle simple.

2/ En utilisant la première question, le résidus de f au point 0.5 est donné par

$$Res(f, \frac{1}{2}) = \lim_{z\to\frac{1}{2}} (z-\frac{1}{2})f(z) = \frac{2}{3i} = \frac{-2i}{3}.$$

D'après le théorème des résidus, on déduit le calcul de l'intégrale

$$\int_{|z|=1} f(z)dz = 2\pi i Res(f, \frac{1}{2}).$$

Par conséquent,

$$\int_{|z|=1} f(z)dz = 2\pi i\frac{-2i}{3} = \frac{4\pi}{3}.$$

Exercice 4.7. Calculer les intégrales suivantes

$$\textbf{1)} \int_{|z|=2} \tan z dz, \qquad \textbf{2)} \int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^4+5z^3}dz,$$

$$\textbf{3)} \int_{|z|=1} \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz, \qquad \textbf{4)} \int_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{z^4-1}.$$

Solution

1. Nous avons

$$\int_{|z|=2} \tan(z)dz = \int_{|z|=2} \frac{\sin z}{\cos z}dz.$$

Si $\cos z = 0$ alors $z_k = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Dans notre cas ($|z| = 2$), les singularités sont $\frac{-\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_{|z|=2} \tan(z)dz &= 2\pi i \left(Res(f, \frac{\pi}{2}) + Res(f, -\frac{\pi}{2})\right), \\ &= 2\pi i \left(\frac{\sin(\frac{\pi}{2})}{-\sin(\frac{\pi}{2})} + \frac{\sin(-\frac{\pi}{2})}{-\sin(-\frac{\pi}{2})}\right) = -4\pi i.\end{aligned}$$

2. Nous avons

$$\begin{aligned}\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^4 + 5z^3}dz &= \int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^3(z+5)}dz = 2\pi i Res(f, 0), \\ &= 2\pi i \left(\frac{1}{2} \lim_{z\to 0} \left[z^3 \frac{e^z}{z^3(z+5)}\right]''\right) = \frac{17\pi i}{125}.\end{aligned}$$

3. On sait que

$$\sin\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \ldots \quad \Rightarrow \quad Res(f, 0) = 1.$$

Ainsi,

$$\int_{|z|=1} \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz = 2\pi i.$$

4. Nous avons

$$\int_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{z^4 - 1} = 2\pi i Res(f, i) = 2\pi i \lim_{z\to 0}(z - i)\frac{1}{z^4 - 1} = 2\pi i(\frac{1}{4i^3}) = -\frac{\pi}{2}.$$

4.2 Exercices supplémentaires

Exercice 51 - Soit la fonction

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}.$$

1) Déterminer a et b tels que

$$f(z) = \frac{a}{z-2} + \frac{b}{z-3}.$$

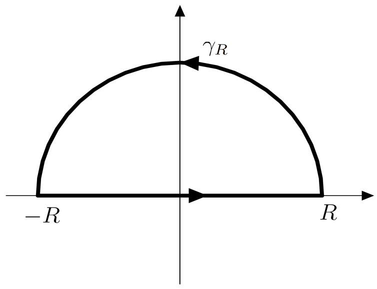
2) Développer la fonction f en série de Laurent autour de 0 dans la région $2 <$

$|z| < 3$.

Exercice 52 - Soit la fonction

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 9}.$$

1) Calculer $\int_\gamma f(z)dz$ avec $\gamma = \gamma_R \cup [-R, R]$, pour R assez grand.



2) Montrer que $\lim\limits_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0$, et en déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 9}.$$

Exercice 53 - Soient $f_1(z) = z^3 \sin(\frac{1}{z})$ et $f_2(z) = \frac{1}{z^3(1-z)}$.

1) Calculer $Res(f_1, 0)$ et $Res(f_2, 0)$.

2) Prenons $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$. Déduire

$$\int_{|z|=\frac{1}{2}} f(z)dz.$$

Exercice 54 - Donner le développement en série de Laurent de la fonction suivante en précisant dans quelles parties de $\mathbb{C}$ elle est valable.

1) $\dfrac{1}{(z+2)(z-1)}$, autour de 0, de 1, de -2.

$$2)\quad \frac{z}{z^2-1}, \qquad \text{autour de} \quad 0, \quad \text{de} \quad 2, \quad \text{de} \quad 1.$$

Exercice 55 - Quels sont les points singuliers des fonctions suivantes ; préciser leurs types.

$$1)\ \frac{e^z}{z^2(z-1)(z-2)}, \qquad 2)\ \frac{e^z}{z}, \qquad 3)\ \frac{1-cos(z)}{z}, \qquad 4)\ \frac{1}{z^3-z^5},$$

$$5)\ \frac{e^{iz}}{z^2+1}, \qquad 6)\ \frac{\ln(1+z)}{z^2}, \qquad 7)\ \frac{1-e^z}{1+e^z}.$$

Exercice 56 - Soient les deux intégrales suivantes

$$I=\int_{\gamma_1}\frac{e^{2z}}{(z-2)^2}dz, \qquad J=\int_{\gamma_2}\frac{\cos z}{z(z-1)^2}dz,$$

où $\gamma_1 := |z| = \frac{5}{2}$ et $\gamma_2 := |z| = 2$.

1) Tracer les chemins γ_1 et γ_2 en représentant les singularités.

2) Calculer les intégrales I et J.

Exercice 57 - Calculer les intégrales suivantes

$$1)\int_{|z|=2}\tan z dz, \qquad 2)\int_{|z|=2}\frac{e^z}{z^4+5z^3}dz, \qquad 3)\int_{|z|=1}\sin(\frac{1}{z})dz,$$

$$4)\int_{|z+3i|=3}\frac{z}{(z^2+4z+13)^2}dz, \qquad 5)\int_{|z-i|=\frac{1}{2}}\frac{dz}{z^4-1}, \qquad 6)\int_{|z|=2}\frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz.$$

Exercice 58 - 1) Calculer les résidus à l'infini des fonctions suivantes

$$1)f(z)=\frac{z^3}{z^4-1}, \qquad 2)f(z)=(z+\frac{2}{z})^4, \qquad 3)f(z)=\frac{e^z}{z}.$$

2) Calculer l'intégrale suivante.

$$\int_{|z|=2}\frac{z^{99}e^{\frac{1}{z}}dz}{z^{100}+1}.$$

Exercice 59 - Donner le développement en série de Laurent de la fonction suivante en précisant dans quelles parties de $\mathbb{C}$ elles sont valables.

$$\frac{z}{z^2-1} \quad \text{autour de } 0, \text{ de } 2, \text{ de } 1.$$

Exercice 60 - 1. Développer en série de Laurent la fonction dans les couronnes indiquées :

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)},$$

a) $2 < |z| < 3$, b) $3 < |z| < +\infty$.

2. Examiner les différents développement en série de laurent de la fonction

$$f(z) = \frac{z^2 - z + 3}{z^2 - 3z + 2}$$

en posant $z_0 = 0$.

Exercice 61 - Calculer les résidus des fonctions suivantes

$$f(z) = z^{2n}(1+z)^{-n}, \quad 2. \quad f(z) = \frac{1-e^z}{1+e^z}, \quad 3. \quad f(z) = e^{2z+1}.$$

Exercice 62 - 1. Trouver les résidus de la fonction

$$f(z) = \frac{1}{z^4+1}$$

en ses points singuliers.
2. Trouver le résidu de la fonction $f(z) = z^3 \sin \frac{1}{z}$ en son point singulier.

Exercice 63 - 1. En utilisant la formule des résidus, calculer l'intégrale

$$\int_{|z-i|=\frac{3}{2}} \frac{\exp\left(\frac{1}{z^2}\right)}{z^2+1} dz.$$

2. En utilisant la formule des résidus, calculer l'intégrale

$$\int_{|z|=2} \frac{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}{z-1} dz.$$

Exercice 64 - Soit f la fonction suivante

$$f(z) = \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}.$$

1) Déterminer les résidus de f en chacun de ses pôles.
2) En déduire les intégrales suivantes

$$\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2} dz \qquad \text{et} \qquad \int_{|z|=4} \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2} dz.$$

Exercice 65 - Soit f la fonction suivante

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z+4)}.$$

Développer la fonction f en série de Laurent au voisinage de 0 en précisant les domaines de convergence.

Chapitre 5

Application des résidus

5.1 Exercices corrigés

Exercice 5.1. Calculer l'intégrale réelle suivante

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos(x)}\,dx.$$

Indication : En utilisant un changement de variable approprié, transformer cette intégrale en une intégrale complexe.

Solution

On fait le changement de variable suivant

$$z = e^{ix}, \qquad 0 \leq x \leq 2\pi.$$

Ce qui implique que

$$\cos(x) = \frac{z+z^{-1}}{2},$$

et

$$dx = \frac{dz}{iz}.$$

De plus, on remarque que

$$|z| = 1.$$

L'intégrale devient donc

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{dx}{2+\cos(x)} &= \int_{|z|=1}\frac{1}{2+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\frac{dz}{iz},\\ &= \frac{2}{i}\int_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+4z+1}.\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{dx}{2+\cos(x)} &= \frac{2}{i}\int_{|z|=1}\frac{dz}{(z+2+\sqrt{3})(z+2-\sqrt{3})}\\ &= \frac{2}{i}2\pi i Res\left(\frac{1}{(z+2+\sqrt{3})(z+2-\sqrt{3})}, -2+\sqrt{3}\right)\\ &= 4\pi \lim_{z\to-2+\sqrt{3}}\frac{1}{(z+2+\sqrt{3})} = 2\pi\frac{1}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Exercice 5.2. Calculer l'intégrale suivante

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{2}+\cos\theta}.$$

Solution

On fait le changement de variable

$$z = e^{i\theta}, \qquad 0\le\theta\le 2\pi.$$

Ce qui implique que

$$\cos(\theta) = \frac{z+z^{-1}}{2},$$

et

$$d\theta = \frac{dz}{iz}.$$

De plus $|z| = 1$. Nous avons

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{2}+\cos(\theta)} &= \int_{|z|=1}\frac{1}{\sqrt{2}+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\frac{dz}{iz},\\ &= \frac{-2}{i}\int_{|z|=1}\frac{dz}{z^2-2\sqrt{2}z+1}.\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2}+\cos(\theta)} &= \frac{-2}{i}\int_{|z|=1} \frac{dz}{(z-1-\sqrt{2})(z+1-\sqrt{2})},\\
&= \frac{-2}{i}2\pi i Res\left(\frac{1}{(z-1-\sqrt{2})(z+1-\sqrt{2})}, \sqrt{2}-1\right),\\
&= -4\pi \lim_{z\to\sqrt{2}-1} \frac{1}{(z-1-\sqrt{2})(z+1-\sqrt{2})} = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Exercice 5.3. Soit

$$f(z) = \frac{-1}{i}\frac{1}{z^2-\frac{5}{2}z+1}.$$

1) Déterminer les singularités et préciser leurs types.

2) En utilisant les résidus, calculer $\int_{|z|=1} f(z)dz$.

3) En déduire la valeur de l'intégrale trigonométrique suivante

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\frac{5}{2}-2\cos(\theta)}.$$

Indication : Poser $\cos(\theta) = \frac{z+z^{-1}}{2}$ et $d\theta = \frac{dz}{iz}$.

Solution

1/ Les singularités de f satisfont

$$z^2 - \frac{5}{2}z + 1 = 0.$$

Après calcul, nous trouvons deux singularités,

$$z_0 = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad z_1 = 2.$$

On peut remarquer facilement que f s'écrit sous la forme

$$f(z) = \frac{-1}{i}\frac{1}{(z-\frac{1}{2})(z-2)}.$$

Les deux singularités sont des pôles simples. En effet, pour $z_0 = \frac{1}{2}$ (on applique un raisonnement similaire pour $z_1 = 2$), on a

$$f(z) = \frac{\frac{-1}{i}\frac{1}{(z-2)}}{(z-\frac{1}{2})^1}.$$

Soit

$$\phi(z) = \frac{-1}{i}\frac{1}{(z-2)}.$$

Nous avons $\phi(\frac{1}{2}) \neq 0$. Ainsi, z_0 est un pôle d'ordre 1, autrement dit, un pôle simple.

2/ En utilisant la première question, le résidus de f au point 0.5 est donné par

$$Res(f, \frac{1}{2}) = \lim_{z\to\frac{1}{2}} (z - \frac{1}{2})f(z).$$

Après calcul, on obtient

$$Res(f, \frac{1}{2}) = \frac{2}{3i} = \frac{-2i}{3}.$$

D'après le théorème des résidus, on déduit le calcul de l'intégrale

$$\int_{|z|=1} f(z)dz = 2\pi i Res(f, \frac{1}{2}).$$

Par conséquent,

$$\int_{|z|=1} f(z)dz = 2\pi i\frac{-2i}{3} = \frac{4\pi}{3}.$$

3/ On pose $\cos(\theta) = \dfrac{z+z^{-1}}{2}$ et $d\theta = \dfrac{dz}{iz}$ (après le changement de variable $z = e^{i\theta}$). Nous obtenons

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\frac{5}{2} - 2\cos(\theta)} &= \int_{|z|=1} \frac{1}{\frac{5}{2} - 2\frac{z+z^{-1}}{2}}\frac{dz}{iz}, \\
&= \int_{|z|=1} \frac{2}{5 - 2z - 2z^{-1}}\frac{dz}{iz}, \\
&= \frac{1}{i}\int_{|z|=1} \frac{1}{\frac{5}{2}z - z^2 - 1}dz, \\
&= \frac{1}{i}\int_{|z|=1} \frac{-1}{z^2 - \frac{5}{2}z + 1}dz.
\end{aligned}$$

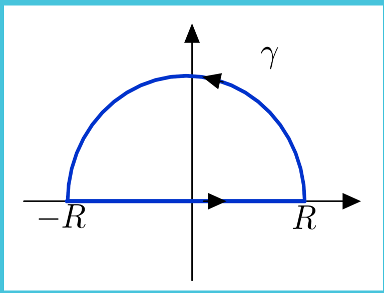
Donc, on se ramène au calcul de l'integrale donnée dans la deuxième question. Par conséquent,

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\frac{5}{2} - 2\cos(\theta)} = \frac{4\pi}{3}.$$

Exercice 5.4. Soit la fonction

$$f(z) = \frac{2z+2}{(z^2-2z+2)^2}.$$

1) Calculer $\int_\gamma f(z)dz$ par la méthode des résidus avec $\gamma = \gamma_R \cup [-R, R]$.



2) Montrer que $\lim\limits_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0$, et en déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x+2}{(x^2-2x+2)^2}dx.$$

Solution

1) Nous remarquons que $z^2 - 2z + 2 = 0$ implique que

$$z_1 = 1 + i \qquad \text{et} \qquad z_2 = 1 - i,$$

qui sont des pôles d'ordre 2 pour la fonction $f(z)$ (voir la figure). Ainsi,

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i Res(f(z), z_1) = 2\pi i \lim_{z\to z_1} \left[(z-z_1)^2 \frac{2z+2}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2}\right]'.$$

Encore, on obtient

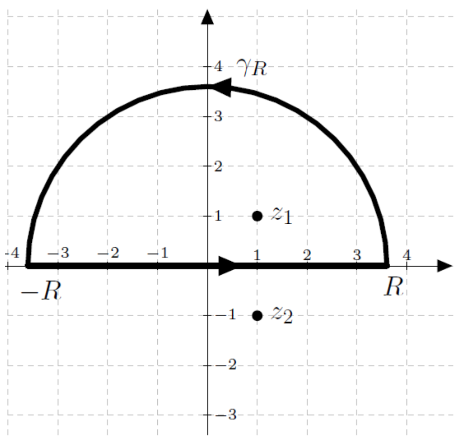
$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \lim_{z\to z_1}\left[\frac{2(z-z_2)^2 - 2(z-z_2)(2z+2)}{(z-z_2)^4}\right],$$

Ce qui donne

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i\left(\frac{2(2i)^2 - 2(2i)(2(1+i)+2)}{(2i)^4}\right).$$

Donc

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi.$$



2) Nous remarquons que

$$\int_\gamma \frac{2z+2}{(z^2-2z+2)^2}dz = \int_{\gamma_R}\frac{2z+2}{(z^2-2z+2)^2}dz + \int_{-R}^{R}\frac{2x+2}{(x^2-2x+2)^2}dz.$$

Par passage à la limite, quand $R\to+\infty$, on a

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R}\frac{2z+2}{(z^2-2z+2)^2}dz = 0.$$

Nous avons aussi

$$\frac{2z+2}{(z^2-2z+2)^2} = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

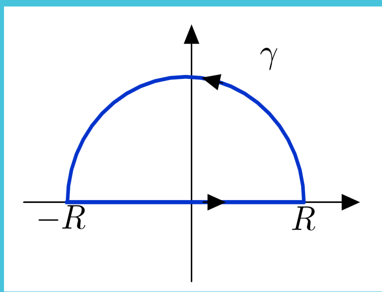
avec $P(z) = 2z + 2$ est un polynôme de degré 1, $Q(z) = (z^2 - 2z + 2)^2$ est de degré 4 et $4 \geq 1 + 2$. Par conséquent,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x+2}{(x^2-2x+2)^2} dz = 2\pi.$$

Exercice 5.5. Soit la fonction

$$f(z) = \frac{z+1}{(z^2+1)^2}.$$

1) Calculer $\int_\gamma f(z)dz$ par la méthode des résidus avec $\gamma = \gamma_R \cup [-R, R]$.



2) Calculer l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+1}{(x^2+1)^2} dx.$$

Solution

1) Remarquons que i est un pôle d'ordre 2 de f donc

$$\int_\gamma \frac{z+1}{(z^2+1)^2} = 2\pi i \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z\to i} \left[(z-i)^2 \frac{z+1}{(z^2+1)^2}\right]',$$
$$= 2\pi i \lim_{z\to i} \left[\frac{z+1}{(z+i)^2}\right]',$$
$$= \quad 2\pi i \lim_{z\to i} \frac{(z+i) - 2(z+1)}{(z+i)^3},$$
$$= 2\pi i \frac{-2}{-8i} = \frac{\pi}{2}.$$

2) Nous remarquons que

$$\int_{\gamma} \frac{z+1}{(z^2+1)^2}dz = \int_{\gamma_R} \frac{z+1}{(z^2+1)^2}dz + \int_{-R}^{R} \frac{x+1}{(x^2+1)^2}dx.$$

Par passage à la limite, quand $R \to +\infty$, on a

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} \frac{z+1}{(z^2+1)^2}dz = 0.$$

Nous avons aussi

$$\frac{z+1}{(z^2+1)^2} = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

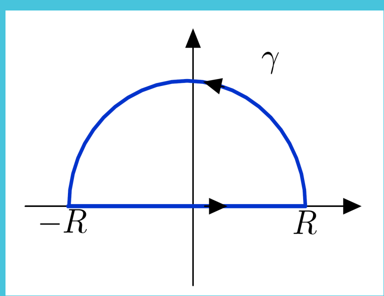
avec $P(z) = z+1$ est un polynôme de degré 1 et $Q(z) = (z^2+1)^2$ est de degré 4 avec $4 \geq 1+2$. Ainsi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+1}{(x^2+1)^2}dx = \frac{\pi}{2}.$$

<u>Exercice</u> 5.6. Soit la fonction

$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)^2}.$$

1) Calculer l'intégrale $I = \int_\gamma f(z)dz$ avec γ le contour suivant



2) Sachant que $\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0$, en déduire, $\lim_{R\to+\infty} I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx$.

Solution

Soit
$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)^2}.$$

1) En utilisant la méthode des résidus, on a

$$\int_\gamma \frac{z^2}{(z^2+1)^2} = 2\pi i Res(f,i) = 2\pi i \left(\lim_{z\to i} \left[(z-i)^2 \frac{z^2}{(z-i)^2(z+i)^2} \right]' \right),$$
$$= 2\pi i \left(\lim_{z\to i} \left[\frac{z^2}{(z+i)^2} \right]' \right),$$
$$= 2\pi i \left(\lim_{z\to i} \left[\frac{2z(z+i)^2 - 2(z+i)z^2}{(z+i)^4} \right] \right),$$
$$= 2\pi i \left(\frac{1}{4i} \right) = \frac{\pi}{2}.$$

2) Nous remarquons que

$$\int_\gamma \frac{z^2}{(z^2+1)^2} dz = \int_{\gamma_R} \frac{z^2}{(z^2+1)^2} dz + \int_{-R}^{R} \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx.$$

En passant à la limite, on obtient

$$\lim_{R\to+\infty} \int_\gamma \frac{z^2}{(z^2+1)^2} dz = \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} \frac{z^2}{(z^2+1)^2} dz + \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx,$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 5.7. Calculer les intégrales suivantes

$$1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)}, \qquad 2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3},$$
$$3) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}.$$

Solution

1. Soit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)}.$$

Nous avons

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+9)} = 2\pi i \left[Res(f,i) + Res(f,3i) \right].$$

Après calcul, on obtient

$$Res(f,i) = \frac{1}{16i}, \quad Res(f,3i) = -\frac{1}{48}.$$

Par conséquent,

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+9)} = 2\pi i \left(\frac{1}{16i} - \frac{1}{48i} \right) = \frac{\pi}{12}.$$

D'autre part,

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+9)} = \int_{\gamma_R} \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+9)} + \int_{-R}^{R} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)}.$$

Si $R \to +\infty$, alors $\int_{\gamma_R} \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+9)} \to 0$ car le degré de $(z^2+1)(z^2+9)$ est $4 \geq 0+2$. Nous obtenons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)} = \frac{\pi}{12}.$$

2. Soit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}.$$

D'un autre côté, nous avons

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z^2+1)^3} = 2\pi i Res(f,i).$$

Nous calculons

$$Res(f,i) = \frac{1}{2} \lim_{z \to i} \left[(z-i)^3 \frac{1}{(z^2+1)^3} \right]'' = \frac{3}{16i}.$$

Par conséquent,

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z^2+1)^3} = 2\pi i \left(\frac{3}{16i}\right) = \frac{3\pi}{8}.$$

On a aussi

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z^2+1)^3} = \int_{\gamma_R} \frac{dz}{(z^2+1)^3} + \int_{-R}^{R} \frac{dx}{(x^2+1)^3}.$$

Si $R \to +\infty$, alors $\int_{\gamma_R} \frac{dz}{(z^2+1)^3} \to 0$ car le degré de $(z^2+1)^3$ est $6 \geq 0+2$. Nous obtenons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{3\pi}{8}.$$

3. Soit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}.$$

On calcule

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^4+1}.$$

Si $z^4+1=0$, alors $z_k = e^{\frac{(2k+1)\pi i}{4}}$, $k=0,1,2,3$. On obtient donc $z_0 = e^{\frac{\pi i}{4}}$, $e^{\frac{3\pi i}{4}}$, $e^{\frac{5\pi i}{4}}$ et $e^{\frac{7\pi i}{4}}$. Clairement, les singularités à l'intérieur de γ sont z_0 et z_1. On a

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^4+1} = 2\pi i \left[Res(f, e^{\frac{\pi i}{4}}) + Res(f, e^{\frac{3\pi i}{4}})\right].$$

Après calcul, nous obtenons

$$Res(f, e^{\frac{\pi i}{4}}) = \frac{1}{4e^{\frac{3\pi i}{4}}}, \qquad Res(f, e^{\frac{3\pi i}{4}}) = \frac{1}{4e^{\frac{9\pi i}{4}}}.$$

Donc,

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^4+1} = 2\pi i \left[\frac{1}{4e^{\frac{3\pi i}{4}}} + \frac{1}{4e^{\frac{9\pi i}{4}}}\right] = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

D'autre part

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^4+1} = \int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^4+1} + \int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^4+1}.$$

Si $R \to +\infty$, alors $\int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^4+1} \to 0$ car le degré de z^4+1 est $4 \geq 0+2$. Nous obtenons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

Exercice 5.8. Calculer les intégrales suivantes

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx x.$$

Solution

Soit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z^2+1} dz &= 2\pi i Res(f,i), \\ &= 2\pi i \lim_{z \to i} (z-i) \frac{e^{iz}}{z^2+1}, \\ &= 2\pi i \frac{e^{-1}}{2i} = \pi e^{-1}. \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z^2+1} dz &= \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{x^2+1} dx + \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1} dz, \\ &= \pi e^{-1}. \end{aligned}$$

Si $R \to +\infty$, alors

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1} = 0, \quad \text{car le pôlynome} \quad z^2+1 \quad \text{est de degré 2 qui est} \ \geq 0+1.$$

Donc,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+1} dx = \pi e^{-1}.$$

Ce qui implique que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx = \pi e^{-1}.$$

5.2 Exercices supplémentaires

Exercice 66 - Calculer l'intégrale réelle suivante

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\alpha+\cos(x)}\, dx, \qquad \text{avec} \quad \alpha > 1.$$

Indication : En utilisant un changement de variable approprié, transformer cette intégrale en une intégrale complexe.

Exercice 67 - Calculer l'intégrale réelle suivante

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin(x)}{\alpha+\sin(x)}\, dx, \qquad \text{avec} \quad \alpha > 1.$$

Indication : En utilisant un changement de variable approprié, transformer cette intégrale en une intégrale complexe.

Bibliographie

[1] E. AMAR ET E. MATHERON, Analyse complexe, Cassini, 2004.

[2] G. ANDRÉ, Initiation à l'analyse complexe - Cours et exercices corrigés, Ellipses, 2014.

[3] S. BENSID ET M.B ZAHAF, Fonction d'une variable complexe, Université de Tlemcen, 2020.

[4] H. CARTAN , Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes, Hermann, 6ième édition, 1985.

[5] B. CHABAT, Introduction à l'analyse complexe. Tome 1, Fonctions d'une variable, Editions Mir Moscou, 1990.

[6] P. DOLBEAULT, Analyse complexe, Dunod, 1997.

[7] B. PALKA, An Introduction to Complex Function Theory, Springer-Verlag New York, 1991.

[8] W. RUDIN, Analyse réelle et complexe, Masson, Paris, 1975.

[9] P. TAUVEL, Analyse complexe pour la Licence 3 : Cours et exercices corrigés, Collection : Sciences Sup, Dunod, 2006.

[10] A. YGER, Analyse complexe et distributions, Ellipses, 2001.

[11] A. YGER, Analyse Complexe un Regard Analytique et Géométrique, Ellipses, 2014.