République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abou Bakr Belkaid – Tlemcen -

Faculté de Technologie

Département d'Hydraulique

# POLYCOPIÉ

# MÉCANIQUE DES FLUIDES

# COURS ET EXERCICES CORRIGÉES

**Dr BENTALHA Chakib**

**Pr HABI Mohammed**

# Avant propos

La mécanique des fluides est une science de la mécanique appliquée qui concerne le comportement des liquides et des gaz au repos ou en mouvement. Cette branche reste l'un des fondements le plus importants dans la formation en hydraulique. L'application les principes de la mécanique des fluides sont nombreuses dans la conception les ouvrages hydrauliques , les réseaux hydraulique et le traitement des eaux.

Ce polycopié est un support pédagogique permet d'introduire l'étudiant dans le domaine de la mécanique des fluides. Ce document a été divisé en chapitre couvrant des domaines bien établis de théorie et d'étude. Chaque chapitre débute par la formulation de définitions, de principes et de théorèmes accompagnés d'exemples et de descriptions. Suit une série des exercices résolus.

Le chapitre I traite les propriétés des fluides à savoir la masse volumique, le poids volumique et la viscosité…etc. Elles sont utilisées ultérieurement.

Le chapitre II est consacré à l'étude des fluides au repos. La loi fondamentale en statique des fluides et les forces exercées par les fluides sur des objets solides sont traités. Cette partie donne les fondements nécessaires à l'étude des barrages.

Dans le chapitre III l'écoulement des fluides parfait est étudié. Les équations qui régissent ce type d'écoulement comme l'équation de continuité et l'équation de Bernoulli sont démontrés. Elles sont la base de plusieurs d'applications en hydraulique en particulier dans le dimensionnement des réseaux d'alimentation en eau potable et l'évacuation des eaux usées, ainsi dans la plupart des instruments de mesures de pressions et de débits qu'on peut rencontrer dans beaucoup de processus industriels de fabrication chimique surtout.

Enfin le chapitre IV est consacré à l'étude l'écoulement des fluides réels. La notion du régime d'écoulement et les calculs les pertes de charge due par les forces de frottement sont expliqués. Elles sont indispensable pour le dimensionnement des diverses installations hydrauliques.

Pour la rédaction de ce polycopié, j'ai utilisé de nombreux documents citée dans la liste bibliographié. J'espère que ce polycopié constituera une invitation à la lecture de ces livres.

# Table des matières

**Chapitre I : Propriétés des fluides** ........ 1
Introduction ........ 1
I.1 La masse volumique ........ 1
I.2 le poids volumique ........ 1
I.3 Module de compressibilité ........ 2
I.4 Viscosité ........ 2
I.5 pression de vapeur saturée ........ 5
I.6 Tension superficielle ........ 5
I.7 Le systèmes d'unités SI ........ 6
Exercices ........ 7
**Chapitre II : Statiques des fluides** ........ 13
Introduction ........ 13
II.1Notion de Pression ........ 13
II.2 Equation Fondamentale de l'Hydrostatique (EFH) ........ 14
II.3 Pression absolue et relative (manométrique) ........ 15
II.3 Egalité des pressions sur un même plan horizontal ........ 16
II.4 Mesure de la pression ........ 17
II.5 Forces hydrostatiques sur les parois ........ 19
II.5.1 Surfaces planes ........ 19
II.5.2 Surfaces courbes ........ 22
II.6 Poussé d'Archimède ........ 24
Exercices ........ 26
**Chapitre III : Dynamique des fluides parfait**
Introduction ........ 45
III.1 Ecoulement permanent, ligne de courant, tube de courant ........ 45
III.2 Fluide incompressible et Compressible ........ 45
III.3 Equation de continuité ........ 46
III.4 Equation de Bernoulli ........ 47
III.5 Applications du théorème de Bernoulli ........ 49
III.6 Théorème d'Euler ........ 51
Exercices ........ 52

**Chapitre III : Dynamique des fluides réel**


Introduction ........................................................................68

IV.1 Fluide réel ........................................................................68

IV.2 Régimes d'écoulement - nombre de Reynolds ........................................68

IV.3 Equation de Bernoulli pour les fluides réels ......................................69

IV.4 Perte de charge ....................................................................71

IV.4.1 Notion de Rugosité des Conduites..................................................72

IV.4.2 Perte de charge linéaire ..........................................................72

IV.4.3 Pertes de charge singulières ......................................................76

IV.5 Equation de bernoulli avec transfert d'énergie ....................................79

Exercices ........................................................................... 81

## Introduction

Les fluides sont des substances capables de s'écouler et de prendre la forme du récipient qui les contient : ils continuent à se déformer, même sous sollicitations constantes. Un solide a une forme propre. Il peut être considéré comme indéformable. On peut répartir les fluides en liquides et en gaz.

Les liquides occupent des volumes bien définis et présentent des surfaces libres. Ils sont quasi incompressibles. Les gaz se dilatent jusqu'à occuper tout le volume offert. Ils sont très compressibles.

### I.1 La masse volumique

La masse volumique d'une substance est la quantité de matière contenue dans une unité de volume de cette substance c.-à-d. : c'est le rapport entre la masse (M) et le volume occupé(V). Elle peut être exprimée de différentes manières :

$$\rho = \frac{M}{V}$$

**Ordres de grandeur des masses volumiques (à 20 °C)**

| | |
|---|---|
| Eau | 998 kg/m$^3$ |
| Kérosène | 814 kg/m$^3$ |
| Mercure | 13 550 kg/m$^3$ |
| Air | 1,2 kg/m$^3$ |

**La densité** d'une substance est égale à la masse volumique de la substance divisée par la masse volumique du corps de référence à la même température. Pour les liquides et les solides, l'eau est utilisée comme référence, pour les gaz, la mesure s'effectue par rapport à l'air. Elle est notée **(d)** et n'a pas d'unité (grandeur physique sans dimension).

### I.2 Poids volumique

Le poids volumique d'un fluide représente le rapport entre le poids et le volume de ce fluide :

$$\omega = \frac{Mg}{V} = \rho g$$

Où :

ω: Poids volumique en (N/m$^3$).

M : masse en (kg),

g : accélération de la pesanteur en (m/s$^2$), V : volume en ($m^3$).

**Exemple 1 :**

Calculer la masse volumique, le poids volumique et la densité de 6 $m^3$ d'huile pèsent 47 kN.

**Solution :**

$$P = 47000N = Mg \Rightarrow M = \frac{P}{g} = \frac{47000}{9.81} = 4791.03kg$$

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{4791.03}{6} = 798.5\,kg/m^3$$

$$\varpi = \rho g = 7833.33\ N/m^3$$

$$d = \frac{\rho}{\rho_{eau}} = \frac{798.5}{1000} = 0.798$$

**I.3 Module de compressibilité**

La compressibilité d'un corps représente la variation de volume du corps en réponse à une variation de pression. On définit le module de compressibilité à température constante ($E$) à partir de la variation relative de volume et de la variation de pression :

$$E = -\frac{\Delta P}{\frac{\Delta V}{V}}\ (Pa)$$

L'inverse du module de compressibilté $\chi = 1/E$, s'appelle le coefficient de compressibilité

On sait par expérience que les liquides sont peu compressibles ; les valeurs de $\chi$ sont par conséquent très faibles de l'ordre de $10^{-10}$ à $10^{-11}$ $Pa^{-1}$.

**Exemple 2 :**

A 34,5 bars, le volume est de 28,32 $dm^3$, à 241,3 bars, de 28,05 $dm^3$. Calculer le coefficient de compressibilité de ce liquide.

**Solution :**

$$\chi = -\frac{\frac{\Delta V}{V}}{\Delta p} = -\frac{\frac{28.32 - 28.05}{28.32}}{(34.5 - 241.3)10^5} = 4.6\ 10^{-10}\ Pa^{-1}$$

**I. 4 Viscosité**

C'est une grandeur qui caractérise les frottements internes du fluide, autrement dit sa capacité à s'écouler. Ces frottements (contrainte de cisaillement) apparaissent lorsqu'une tranche de fluide doit se déplacer par rapport à une autre tranche. Les fluides de grande viscosité résistent à l'écoulement et les fluides de faible viscosité s'écoulent facilement.

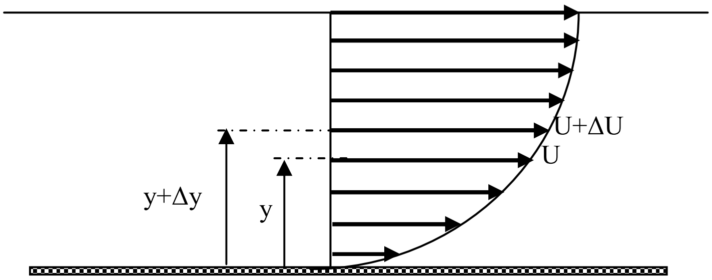



**Figure I.1 : Profil de vitesse**

Sous l'effet des forces d'interaction entre les particules de fluide et des forces d'interaction entre les particules de fluide et celles de la paroi, chaque particule de fluide ne s'écoule pas à la même vitesse. **On dit qu'il existe un *profil de vitesse (figure I.1).*** Considérons deux couches de fluide adjacentes distantes de Δy, la force de frottement F qui s'exerce à la surface de séparation de ces deux couches s'oppose au glissement d'une couche sur l'autre. Elle est proportionnelle à la différence de vitesse des couches soit ΔU, à leur surface S et inversement proportionnelle à Δy :

Le facteur de proportionnalité μ est le coefficient de viscosité dynamique du fluide.

$$F = \mu\, S \frac{\Delta U}{\Delta y} \Rightarrow \tau = \frac{F}{S} = \mu\, \frac{\Delta U}{\Delta y}$$

où :

F : force de frottement entre les couches en (N),

T : contrainte de cisaillement (N/m$^2$),

μ : Viscosité dynamique en (kg/m.s),

S : surface de contact entre deux couches en (m$^2$),

$\Delta U$ : Écart de vitesse entre deux couches en (m/s),

$\Delta y$ : Distance entre deux couches en (m).

Lorsque Δy tend vers zéro on a :

$$F = \mu\, S \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta y} = \mu\, S \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{dy}} \Rightarrow \tau = \frac{F}{S} = \mu\, \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{dy}}$$

**Remarque :**

Dans le système international (SI), l'unité de la viscosité dynamique est le Pascal seconde (Pa·s) ou Poiseuille (Pl) : 1 Pa·s = 1 Pl = 1 kg/m·s

**Viscosité cinématique**

Elle représente le rapport entre la viscosité dynamique et la masse volumique d'un fluide :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

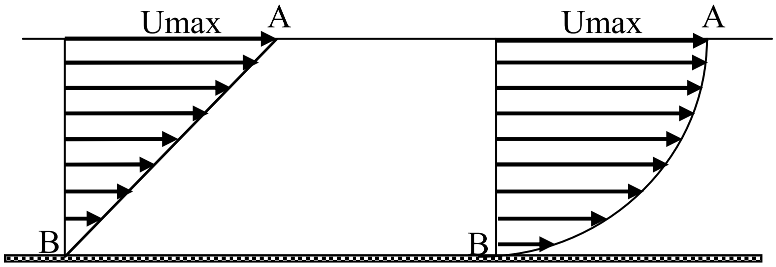
L'unité de la viscosité cinématique est le (m$^2$/s).

On utilise souvent le Stokes (St) comme unité de mesure de la viscosité cinématique :

1 St= $10^{-4}$ $m^2/s$

**Exemple 3:**

Un fluide newtonien ($\mu$ = 0,048 Pa.s) s'écoule le long d'une paroi. A 75 mm de la paroi, la particule fluide a une vitesse égale à 1,125 m/s. Calculer l'intensité de la contrainte de cisaillement, au niveau de la paroi, à 25 mm, à 50 mm et à 75 mm de celle-ci, en admettant une distribution de vitesse linéaire et une distribution de vitesse parabolique. La parabole de la figure a son sommet en A.



vitesse linéaire vitesse parabolique

**Solution :**

**1. Vitesse linéaire**

U=Ay+B

Pour y=0.0, on a U=0 alors B=0

Pour y=0.075m, on a U=1.125, alors U=1,125=A × 0.075 donc A=15

On obtient finalement U=15 × y

Le gradient de vitesse : dU/dy=15 $S^{-1}$ et $\tau$=$\mu$ dU/dy=0.048×15=0.72 Pa pour toute les valeurs de y compris entre0 à 75 mm.

**2. Vitesse parabolique**

U=A$y^2$+By+C

Pour y=0.0, on a U=0 alors C=0

Pour y=0.075, on a U=1.125, alors U=1.125=A × $(0.075)^2$+B ×0.075 (1)

Ainsi pour y=0.075 U=Umax c.-à-d. dU/dy=2×A×y+B=0.0

→ dU/dy=2 A × 0.075+B=0.0→B=-0,15A

En remplaçant la valeur de B dans l'équation (1) de la vitesse, on obtient A=-200

**U=-200 $y^2$+30 y et dU/dy=-400 y+30**

| y (m) | U (m/s) | dU/dy ($s^{-1}$) | $\tau$=4,8 $10^{-2}$ dU/dy (Pa) |
|---|---|---|---|
| 0.0 | 0 | 30 | 1,44 |
| 0.025 | 0,625 | 20 | 0,96 |
| 0.05 | 1,0 | 10 | 0,48 |
| 0.075 | 1,125 | 0 | 0 |

## I.5 Pression de vapeur saturée

La pression de vapeur saturante est la pression à laquelle un fluide passe de l'état gazeux à l'état liquide (ou de l'état liquide à gazeux) pour une température donnée.

Si la température du fluide augmente, la pression à laquelle le fluide passe de l'état liquide à gazeux(pression de vapeur saturante) augmente. C'est ainsi qu'un liquide comme l'eau peut se transformer en vapeur à pression ambiante par apport de chaleur, mais il est possible de faire cette transformation sans varier la température en abaissant la pression ambiante au-dessous de la pression de vapeur saturante.

Lorsque l'on aspire un liquide dans un conduit on crée une dépression, si cette baisse de pression fait descendre la pression du liquide au-dessous de sa pression de vapeur saturante, le liquide se met en ébullition (Production de vapeur), en hydraulique , on appelle ce phénomène la cavitation. Dans le cas de l'eau, la pression de vapeur (Pv) croît avec une augmentation de la température (T) :

| T (°C) | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Pv (kPa) | 1,2 | 2,28 | 4,13 | 7,17 | 12 | 19,4 | 30,38 | 46,23 | 68,55 | 99,23 |

## I.6 Tension superficielle

Une molécule liquide au repos est soumise aux forces d'attractions que les molécules voisines exercent sur elle. Une molécule à la surface libre d'un liquide ou à la surface de séparation de deux liquides non miscibles n'est plus soumise à l'action de forces symétriques, puisqu'elle n'est plus entourée symétriquement par d'autres molécules de même nature. Ainsi la résultante des forces moléculaires n'est plus nulle. La surface de séparation se comporte comme une membrane tendue.

La force d'attraction tangentielle à la surface nécessaire pour arracher des particules agissant le long d'un segment de longueur unitaire est appelée tension superficielle.

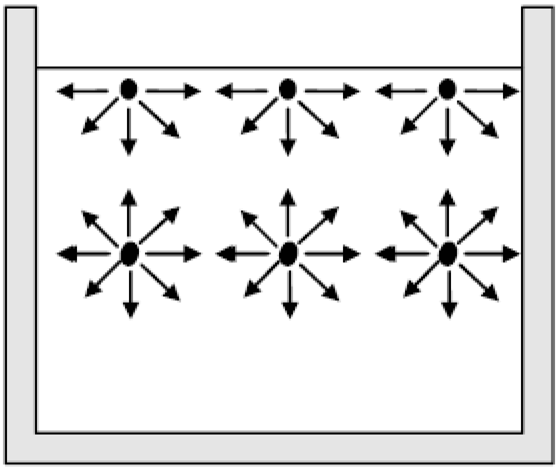


**Figure I.2 : Résultante des forces de cohésion**

### I.7 Le Système d'Unités SI

En mécanique des fluides, le système d'unités SI ('' ***Système International*** '') comporte 3 unités primaires à partir desquelles toutes les autres quantités peuvent être décrites :

| **Grandeur de base** | **Nom de l'unité** | **Symbole** |
|---|---|---|
| Longueur | Mètre | m |
| Masse | Kilogramme | kg |
| Temps | Seconde | s |

Le tableau suivant résume les unités **SI** des différentes caractéristiques utilisées en mécanique des fluides:

| **Caractéristiques** | **Unités** |
|---|---|
| Vitesse | m/s |
| Accélération | $m/s^2$ |
| Force | $kg.m/s^2$ où N (Newton) |
| Energie | $kg.m^2/s^2$ où J (Joule) |
| Puissance | $kg.m^2/s^3$ où W (Watt) |
| Pression | $Kg/m/s^2$, $N/m^2$ où Pa (Pascal) |
| Poids spécifiques | $Kg/m^2/s^2$, $N/m^3$ |
| viscosité | Kg/m/s, $N.s/\ m^2$ où Pa.s |

## Exercices

**Exercice N°1 :**

Si le poids volumique d'un liquide est 8,1 kN/m$^3$, quelle est sa densité. La masse volumique de l'eau est 1000 kg/m$^3$.

**Solution :**

La masse volumique du liquide égale à :

$$\rho = \frac{\omega}{g} = \frac{8100}{9,81} = 825,68\, kg/m^3$$

Alors la densité vaut :

$$d = \frac{825,26}{1000} = 0,825$$

**Exercice N°2 :**

Calculer le poids volumique et la masse volumique de 1 litre du liquide  pèse 7 N.

**Solution :**

On calcule le poids volumique comme suit :

$$\omega = \frac{Mg}{V} = \frac{P}{V} = \frac{7}{0.001} = 7000\ \ N/m^3$$

Alors la masse volumique égale :

$$\rho = \frac{\omega}{g} = \frac{7000}{9,81} = 713,55\ \ kg/m^3$$

**Exercice N°3 :**

Calculer la masse du 500cm$^3$ du liquide si le poids volumique est 12,4 k N/m$^3$ .

**Solution :**

On obtient la masse du liquide comme suit :

$$\omega = \frac{Mg}{V} \Rightarrow M = \frac{\omega\, V}{g} = \frac{12,4\ 10^3 500\ 10^{-6}}{9,81} = 0,632\, kg$$

**Exercice N°4 :**

Un réservoir contenant exactement 5 m$^3$d'huile de pétrole pèse 5122 kg. Sachant que la masse du réservoir vides est de 962 kg, calculer la masse volumique et la densité de l'huile. La masse volumique de l'eau est 1000 kg/m$^3$.

**Solution :**

La masse de l'huile égalé à :

$$M = 5122 - 962 = 4160kg$$

Alors :

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{4160}{5} = 832\, kg/m^3$$

$$d = \frac{832}{1000} = 0{,}832$$

**Exercice N°5 :**

On applique une pression de $2 \times 10^6$ N/m$^2$ sur 2000 cm$^3$ de l'eau, déterminer la variation de volume. On donne $E = 2{,}2\ 10^9\ Pa$

**Solution :**

Le module de compressibilité de l'eau est :

$$E = -\frac{\Delta P}{\frac{\Delta V}{V}}$$

Alors :

$$\Delta V = -V\frac{\Delta P}{E} = \frac{2\ 10^6}{2{,}2\ 10^9}\ 2000 = -1{,}82\ cm^3$$

**Exercice N°6 :**

Quelle pression doit-on appliquer à l'eau pour réduire son volume de 1,25%. On donne $E = 2{,}2\ 10^9\ Pa$

**Solution :**

Le module de compressibilité de l'eau est :

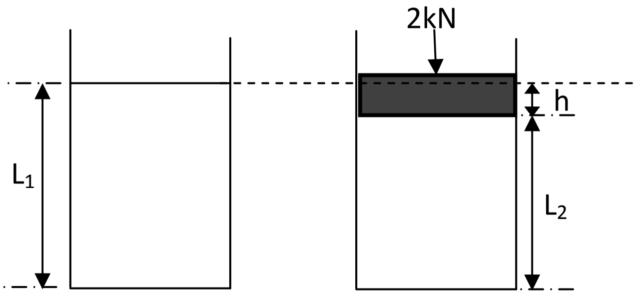
$$E = -\frac{\Delta P}{\frac{\Delta V}{V}}$$

Alors :

$$\Delta P = -E\frac{\Delta V}{V} = 0.0125\ 2{,}2\ 10^9 = 0{,}0275\ 10^9\ Pa = 2{,}75\ MPa$$

**Exercice N°7 :**

Un réservoir cylindrique contient une colonne de $L_1$=500 mm de l'eau. Le module de compressibilité de l'eau est $E = 2{,}2\ 10^9\ Pa$ .Si le piston applique une pression de 11,3 MPa sur la surface libre de l'eau, déterminer le déplacement h.




**Solution :**

La diminution du volume due par le piston est :

$$\Delta V = -V\frac{\Delta P}{E} \Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = -\frac{\Delta P}{E} \Rightarrow \frac{SL_1 - SL_2}{SL_1} = -\frac{\Delta P}{E}$$

Où :

$S\,L_1$ : Le volume initial de l'eau ;

$SL_2$ : Le volume final de l'eau ;

S : Section horizontale du réservoir.

Alors :

$$\frac{L_1 - L_2}{L_1} = \frac{h}{L_1} = -\frac{\Delta P}{E} \Rightarrow h = -\frac{\Delta P}{E}\,L_1 = -\frac{11{,}3\;10^6}{2{,}2\;10^9}\;0{,}5$$

$$h = -2{,}56\;mm$$

**Exercice N°8 :**

Deux grandes surfaces planes sont à 2,4 cm l'une de l'autre et l'espace entre elles est rempli d'un liquide de viscosité8,1 Pa.s. Quelle est la force nécessaire pour tirer une plaque très fines de 0,5 $m^2$ de surface à la vitesse constante 60 cm/s, si :

1. La plaque est situé au milieu ;
2. La plaque est située à 0,8 cm d'une des surfaces.

Faites l'hypothèse que le profil de vitesse est linéaire.

**Solution :**

1. **La plaque située au milieu**

Désignons par :

$Fr_1$ : la force de frottement sur la face supérieur de la plaque

$Fr_2$ : la force de frottement sur la face inférieur de la plaque

$$Fr_1 = Fr_2 = \mu\,S\frac{\Delta U}{\Delta y} = 0{,}81\;0{,}5\frac{0{,}6 - 0}{0{,}012} = 20{,}25\;N$$

La force de frottement totale = $Fr_1$+ $Fr_2$=40,5 N

La force nécessaire pour tirer la plaque doit être au minimum égale à 40,5 N.

2. **La plaque est située à 0,8 cm d'une des surfaces.**

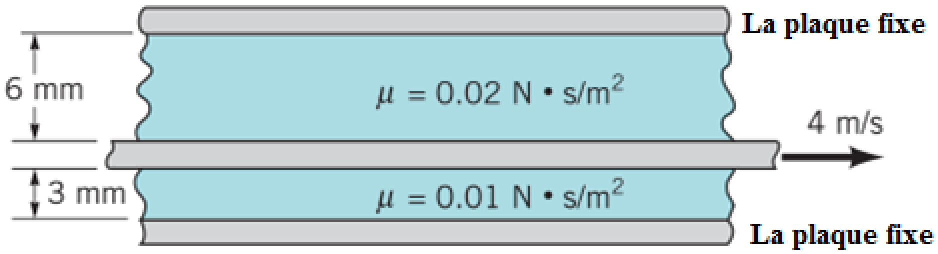
$$Fr_1 = \mu\, S \frac{\Delta U}{\Delta y} = 0{,}81\ 0{,}5 \frac{0{,}6 - 0}{0{,}016} = 15{,}18\ N$$

$$Fr_2 = \mu\, S \frac{\Delta U}{\Delta y} = 0{,}81\ 0{,}5 \frac{0{,}6 - 0}{0{,}008} = 30{,}37\ N$$

La force nécessaire pour tirer la plaque doit être au minimum égale à 45,55 N.

**Exercice N°9 :**

Une grande plaque mobile est située entre deux grandes plaques fixes. Deux liquides newtoniens de viscosité $\mu_1$= 0,02 Pa.s et $\mu_2$ = 0,01 Pa.s sont contenus entre les plaques. Déterminez l'intensité des contraintes sur chacune des parois quand la plaque centrale mobile se déplace à une vitesse de 4 m/s parallèlement aux autres plaques. Faites l'hypothèse que le profil de vitesse entre les plaques est linéaire.




**Solution :**

Désignons par :

$\tau_1$ : la contrainte de cisaillement sur la face supérieur de la plaque

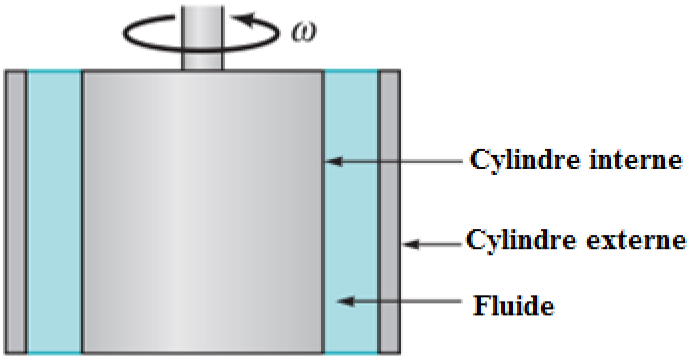
$\tau_2$ : la contrainte de cisaillement sur la face inférieur de la plaque

$$\tau_1 = \mu \frac{\Delta U}{\Delta y} = 0{,}02\ \frac{4 - 0}{0{,}006} = 13{,}33\ \ N/m^2$$

$$\tau_2 = \mu \frac{\Delta U}{\Delta y} = 0{,}01\ \frac{4 - 0}{0{,}003} = 13{,}33\ \ N/m^2$$

**Exercice N°10 :**

Un viscosimètre (couette) est composée de deux cylindres coaxiaux de rayon 12,2 cm et 12,8 cm respectivement. Les deux cylindres ont 30 cm de long. Un couple de 0,88 N.m est nécessaire pour tourner le cylindre interne à une vitesse de rotation de 2π rad /s. déterminer la viscosité dynamique du liquide qui rempli l'espace entre les deux cylindres.




**Solution :**

Le couple est transmis du cylindre externe à travers les couches du liquide.

Couple appliquée= couple résistant

$$C = \tau \times surface \times bras\ de\ levier = \mu\, S \frac{\Delta U}{\Delta R}\, R = \mu\, 2\pi R\, L\, \frac{U_1 - U_2}{\Delta R}\, R$$

Où :

$U_1 = \omega\, R\ (vitesse\ linéaire\ du\ cylindre\ intérieur)$

$U_2 = 0\ (cylindre\ éxterieur\ est\ fixe)$

$\Delta R = l'espace\ entre\ les\ cylindres$

Donc le couple appliquée correspond à :

$$C = \frac{\mu\, 2\pi\, R^3 L\omega}{\Delta R}$$

Alors :

$$\mu = \frac{C\, \Delta R}{2\pi\, R^3 L\omega} = \frac{0{,}881\ (0{,}128 - 0{,}122)}{2\ 3{,}14\ 0{,}122^3\ 0{,}3\ 2\ 3{,}14} = 0{,}246\ Pa.s$$

**Exercice N°11:**

Soit un tube cylindrique de 3 km de long, de 10cm de diamètre, parcouru par un liquide de viscosité dynamique μ=8,5 poise.

On suppose que la distribution des vitesses dans la section droite du tube est donnée par l'équation parabolique :

$$U = -0{,}3y^2 + 12y$$

U étant la vitesse à la distance y de la paroi, calculer :

1. La contrainte de cisaillement au niveau de la paroi ;
2. La force totale de frottement s'exerçant sur le tube.

**Solution :**

1. La contrainte de cisaillement au niveau de la paroi (y=0) ;

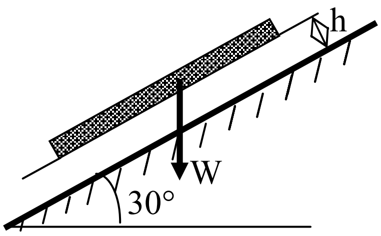
$$\tau = \mu \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{dy}} = \mu(-0{,}6y + 12) = 12\mu = 10{,}2\ Pa$$

2. La force totale de frottement s'exerçant sur le tube.

$$F = \tau\ S = \tau\ 2\pi\ R\ L = 10{,}2\ 2\ 3{,}14\ 0{,}05\ 3000 = 9608{,}4\ N$$

**Exercice N°12:**

Une plaque carrée de 0,64 m$^2$ de surface pèse 300 N glisse sur une surface inclinée lubrifiée par un film d'huile d'une épaisseur h=1,5 mm comme montré à la figure ci-dessous. Si la vitesse de la plaque est 0,3 m/s, déterminer la viscosité dynamique de l'huile.




**Solution :**

On applique la 2$^{\text{iéme}}$ loi de Newton suivant la direction du mouvement:

$\sum F = W \sin 30° - F_r = m\,\vec{a}$

L'accélération est nulle puisque la vitesse de la plaque est constante, alors :

$$W \sin 30° - \mu\ S \frac{\Delta U}{\Delta y} = 0 \Rightarrow 150 - \mu\ 0{,}64 \frac{0{,}3 - 0}{1{,}5\ 10^{-3}} = 0$$

Donc :

$$\mu = 1{,}17\ Pa.S$$

## Introduction

Statique des fluides étudie les conditions d'équilibre du fluide au repos, c'est-à-dire lorsqu'il n'y a pas d'écoulement. En abordant l'étude de la répartition de la pression, notamment en fonction de la profondeur, ainsi que des forces pressantes qui en résultent, cette partie donne les fondements nécessaires à l'étude des barrages [étude la stabilité des barrages]

### *II.1Notion de Pression*

La pression est définie comme la force exercée par un fluide par unité de surface:

$$P = \frac{F}{S}$$

Dans le système international les pressions sont évaluées en $N/m^2$ ou Pascal (Pa). Il existe cependant de nombreuses autres unités de mesure de la pression :

- Le bar : 1 bar=100 000 Pa ;
- L'atmosphère normale (symbole atm) : 1 atm=101 325 Pa ;
- Le mètre de colonne d'eau (mCE) :1 mCE=9810 Pa
- Le millimètre de mercure (mmHg) : 1 mmHg= 133 Pa

Dans un fluide en équilibre la pression est indépendante de la direction, pour montrer cela, on prend un élément du liquide à une profondeur quelconque d'un réservoir plein de liquide ouvert à l'atmosphère

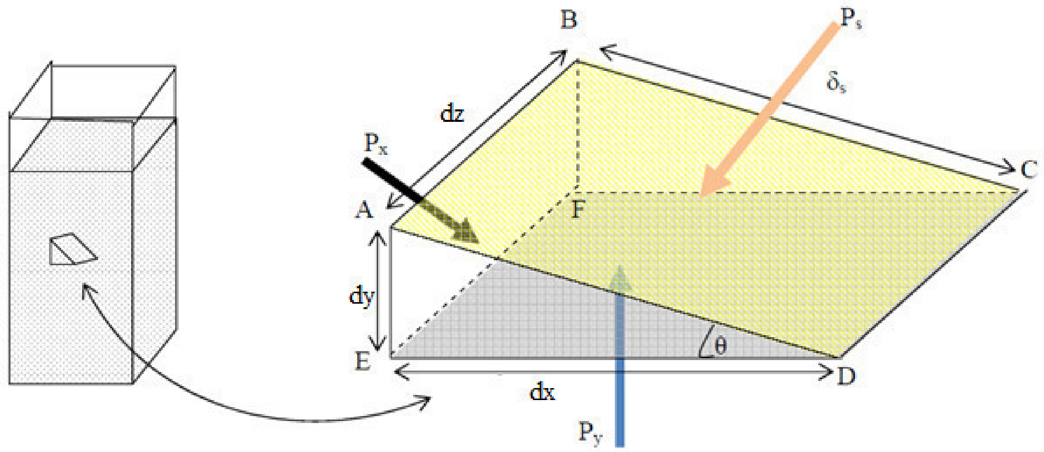



**Figure II.1 : Pression en un point d'un liquide en équilibre**

Considérons un élément d'un fluide ABCDEF ( prisme triangulaire ) et soient Px , Py et Ps les pressions dans les 3 directions x , y et s .

Etablissons la relation entre Px , Py et Ps :

Selon la direction x :

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow P_x dydz - P_s ds\, dz \sin\theta = P_x dydz - P_s ds\, dz \frac{dy}{ds} = 0$$

Alors : $\mathbf{P_x = P_s}$

Selon la direction y :

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow P_y dxdz - P_s ds\, dz \cos\theta = P_y dxdz - P_s ds\, dz \frac{dx}{ds} = 0$$

Alors $\mathbf{P_y = P_s}$ et finalement : $\mathbf{P_x = P_y = P_s}$

***Enoncée de la loi de pascal*** :

*La pression d'un fluide en un point est la même dans toutes les directions*

**II.2 Equation Fondamentale de l'Hydrostatique (EFH)**

Soit un parallélépipède fluide représenté dans un repère Ox,O y ,Oz. Les arrêtes du parallélépipède sont : dx, dy, dz.

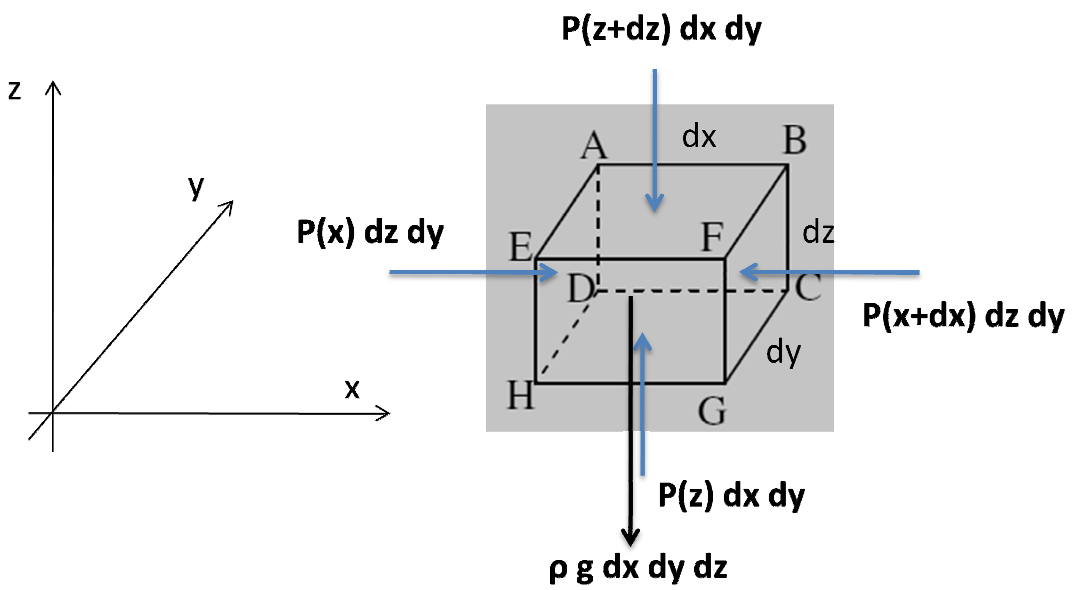



**Figure II.2 : Système des forces sur un parallélépipède fluide**

La condition d'équilibre suivant Oz s'écrit :

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow P(z)dxdy - P(z+dz)dxdy - \rho g\, dxdydz = 0$$

Alors,

$$P(z+dz)dxdy - P(z)dxdy = -\rho g\, dxdydz$$

Dévisée par dx dy dz on obtient:

$$\frac{P(z+dz)-P(z)}{dz}=-\rho g$$

Pour dz $\rightarrow$ 0

$$\frac{dP}{dz}=\lim_{dz\to 0}\frac{P(z+dz)-P(z)}{dz}=-\rho g$$

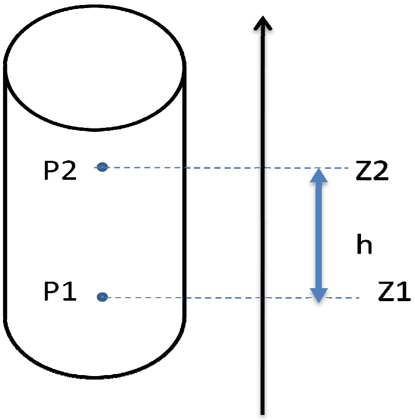
Finalement

$$\frac{dP}{dz}=-\rho g$$

L'équation précédente est souvent appelée équation fondamentale de l'hydrostatique.

Pour un fluide incompressible (masse volumique $\rho$ constante), l'intégration de l'équation précédente entre$Z_1$ et $Z_2$ s'écrit:

$$\int_{P_1}^{P_2} dP=\int_{Z_1}^{Z_2} -\rho g\, dz$$




Nous trouvons:

$$P_2-P_1=-\rho g\,(Z_2-Z_1)$$

Soit,

$$P_1=P_2+\rho g\,(Z_2-Z_1)=P_2+\rho g\,h$$

On conclure que :

La pression augmente donc linéairement en fonction de la profondeur

## II.3 Pression absolue et relative (manométrique)

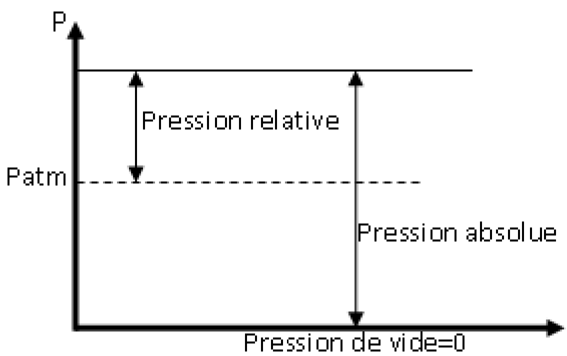
La pression absolue est définie par rapport à la pression dans le vide qui correspond à la pression nulle. La pression absolue minimale possible est donc zéro. il est courant de mesurer la pression de liquide relativement à la pression atmosphérique (pression de l'air). On parle alors de pression relative. De cette façon, la pression à la surface libre d'un liquide est égale à zéro. On sait que:

$$P_1=P_2+\rho g\,h$$

Si $P_2$=Patm alors:

$$P_1=P_{atm}+\rho g\,h \Rightarrow pression\ absolue$$

$$P_1=\rho g\,h \Rightarrow pression\ relative$$




On conclure que :

**pression absolue= pression relative+pression atmosphérique**

**II.4 Egalité des pressions sur un même plan horizontal**

Si l'on considère la direction horizontale (figure II.2), on aura :

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow P(x)dzdy - P(x+dx)dzdy = 0$$

Dévisée par dx dy dz on obtient:

$$\frac{P(x+dx) - P(x)}{dx} = 0$$

Pour dx $\rightarrow$ 0

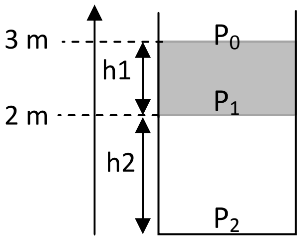
$$\frac{dP}{dx} = \lim_{dx\to 0} \frac{P(x+dx) - P(x)}{dx} = 0 \Rightarrow P = constante$$

Sur un même plan horizontal , toutes les pressions sont égales (Pressions Isobares)

**Exemple 1 :**

Un récipient contient de l'eau jusqu'à 2m et par-dessus de l'huile jusqu'à 3 m. La densité de l'huile $d_h$=0,83. Calculez la pression absolue et relative au fond du récipient

**<u>Solution :</u>**




L'application de l'EFH entre 1 et 0 et entre 2 et 1 donne :

$P_1=P_0+\rho_{huile}\ g\ h_1$

$P_2=P_1+\ \rho_{eau}\ g\ h_2=\ P_0+d\ \rho_{eau}\ g\ h_1+\ \rho_{eau}\ g\ h_2$

- La pression absolue : $P_0=10^5$ Pa

$P_2=10^5+0,83\ 10^3\ 9.81\ (1) + 10^3\ 9.81\ (2)$=1277623 Pa=1.28 bar

- La pression relative : $P_0=0$

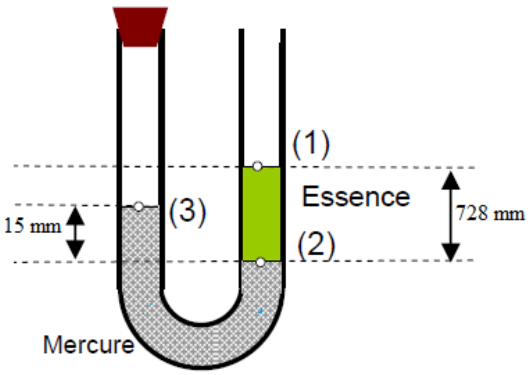
$P_2=0+0,83\ 10^3\ 9.81\ (1) + 10^3\ 9.81\ (2)$=277623 Pa=0.28 bar

**Exemple 2 :**

Soit un tube en U fermé à une extrémité qui contient deux liquides non miscibles. Calculer la pression $P_3$ du gaz emprisonne dans la branche fermé. On donne :

$\rho_{Hg}$=13600 Kg/m$^3$ et $\rho_{essence}$=700 Kg/m$^3$, Patm=$10^5$ Pa

**<u>Solution :</u>**




Appliquons la loi fondamentale de l'hydrostatique (EFH) ente 1 et 2, puis 2 et 3 :

$$P_2 = P_1 + \rho_{ess}g\ (0,728) \qquad (1)$$

$$P_2 = P_3 + \rho_{Hg}g\ (0,015) \qquad (2)$$

Alors :

$$P_3 = P_2 - \rho_{Hg}g\ (0,015)$$

$P_3 = P_1 + \rho_{ess} g\ (0{,}728) - \rho_{Hg} g\ (0{,}015)$

$P_3 = 10^5 + 700\ 9{,}81\ 0{,}728 - 13600\ 9{,}81\ 0{,}015$

$P_3 = \mathbf{1{,}3 10^5}\ \boldsymbol{Pa}$

## II.4 Mesure de la pression

On utilise des manomètres dont le plus simple est le tube piézométrique ordinaire (généralement vertical) dont l'extrémité inférieure est placé au point où l'on veut mesurer la pression.

### 1. Le piézomètre :

Le piézomètre est l'instrument de mesure de la pression le plus simple, c'est un tube transparent vertical ou inclinée, raccordé au point ou on veut déterminer la pression, celle-ci n'est autre que la hauteur d'eau qui monte dans ce tube.

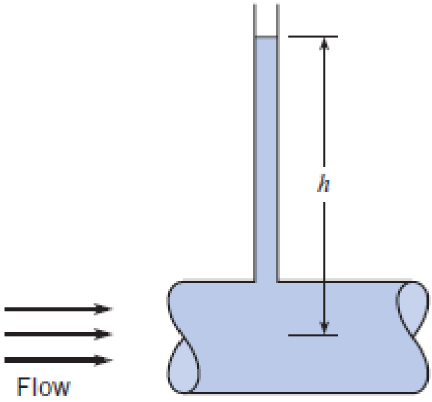



**Figure II.3 : Piézomètre**

### 2. Manomètre en U

Il consiste en un tube en U dont une extrémité est raccordée au point de mesure et l'autre à l'aire libre, le tube contient soit du mercure ou autre liquide plus dense que le fluide dont la pression est à mesurer pour la mesure des pression manométriques.

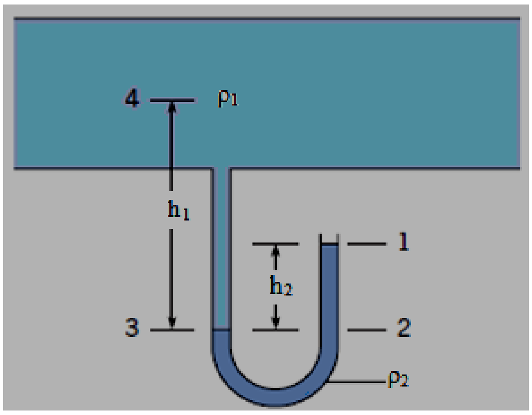



**Figure II.4 : Manomètre en U**

On a : $P_2=P_3$ (la ligne isobare)

Appliquons l'équation fondamentale de l'hydrostatique entre 3 et 4 et entre 2 et 1 :

$P_3 = P_4 + \rho_1 g h_1$

$P_2 = P_1 + \rho_2 g h_2 = P_{atm} + \rho_2 g h_2$

Puisque l'on mesure une pression manométrique, on soustrait donc $P_{atm}$ : $P_2 = \rho_2 g h_2$

et Comme : $P_2 = P_3 \Rightarrow P_4 = \rho_2 g h_2 - \rho_1 g h_1$

### 3. Manomètre différentiel :

C'est un tube raccordé entre deux point où en veut déterminer la différence de pression ou hauteur piézométrique, il peut être à un seul liquide avec valve d'entrer d'air, ou à deux liquides.

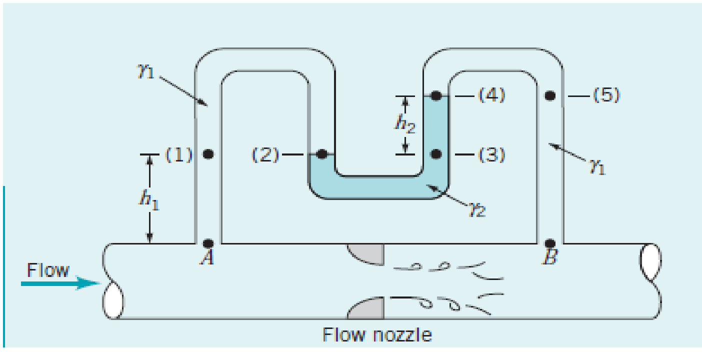



**Figure II.5 : Manomètre différentiel**

### 4. Manomètre type bourdon

Pour des applications où les variations de pression sont brusques et élevées. Le Bourdon est simplement un tube métallique évidé dont une extrémité est fermée et l'autre est reliée au fluide sous pression. Sous l'effet de la pression, le tube tend à se redresser provoquant le mouvement d'une aiguille sur un cadran gradué. Les unités que l'on retrouve sur un cadran de Bourdon peuvent être très variées et il importe de bien vérifier si les pressions mesurées sont absolues, relatives et en quelles unités elles se trouvent.

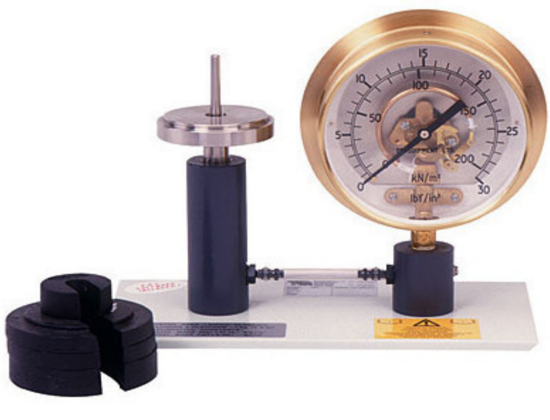


**Figure II.6 : Manomètre type bourdon**

## II.5 Forces hydrostatiques sur les parois

Cette force est définie comme étant la force de pression exercée par un fluide au repos sur une surface de contacte, cette force est toujours normale à la surface. Le calcul des forces hydrostatiques sur une surface quelconque plongée dans l'eau, consiste à déterminer l'intensité de la force et son point d'application.

On traitera dans ce qui suit le cas des surfaces planes ensuite les surfaces courbées.

### II.5.1 Surfaces planes

Soit une plaque de forme quelconque immergée et inclinée d'un angle α.

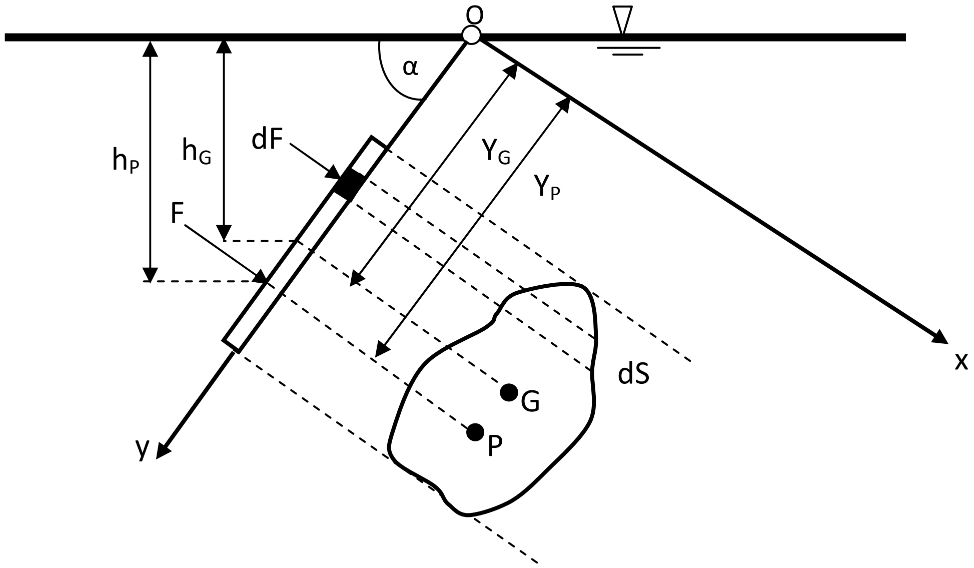



**Figure II.7 : Force exercée par un fluide au repos sur une paroi solide fixe**

Soit un élément de surface de la plaque « dS », la pression qui s'exerce sur cet élément est : $P = \rho\, g\, h$

La force de poussée exercée sur l'élément sera :

$$dF = P\, dS = \rho g h\, dS$$

Donc la force de poussée totale sur la plaque sera :

$$F = \int dF = \int \rho g h\, dS$$

Or, $h = y \sin\alpha$ d'ou:

$$F = \rho g\, \sin\alpha \int y\, dS$$

Le terme $\int y\, dS$ représente le moment statique de la surface par rapport à l'axe Ox :

$$\int y\, dS = y_G S$$

Avec $y_G$ ordonnée du centre de gravité

L'expression de F devient :

$$F = \rho g \ \sin\alpha \, y_G S$$

et comme : $h_G = y_G \sin\alpha$

Donc l'expression finale de F devient :

$$\boldsymbol{F = \rho g \ h_G S}$$

$h_G$ est la profondeur du centre de gravité de la surface

S est l'aire de la surface

Le point d'application de la force résultante F est appelé : le centre de poussée. La position de ce point est définie par la position du barycentre des surfaces élémentaires (ds) pondérées par la pression sur chaque surface, ce qui revient à calculer le moment équivalent des forces de pression, c'est-à-dire :

$$y_P F = \int y \, dF = \rho g \ \sin\alpha \int y^2 \, dS$$

D'où :

$$y_P = \frac{\rho g \ \sin\alpha \int y^2 \, dS}{\rho g \ \sin\alpha \, y_G S} = \frac{\int y^2 \, dS}{y_G S}$$

Le terme $I_x = \int y^2 \, dS$ représente le moment d'inertie de la surface A par rapport à l'axe Ox.

Le théorème de Huygens nous permet d'écrire que:

$$I_x = I_{xG} + y_G^2 S$$

Où :

$I_{xG}$ représente le moment d'inertie de la surface A par rapport à l'axe qui passe par le centre de gravité

Dans ce cas, la formule de $y_p$ devient :

$$y_P = y_G + \frac{I_{xG}}{y_G S}$$

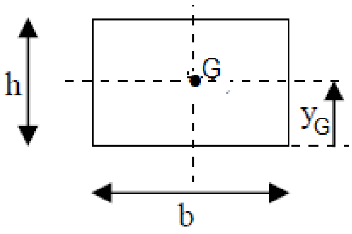
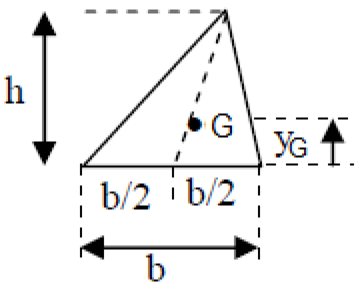
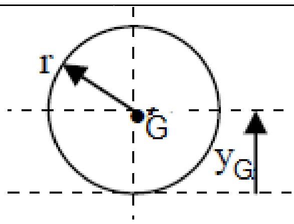
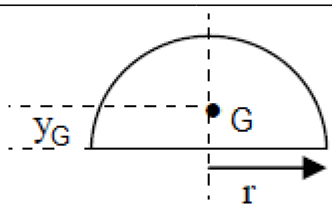
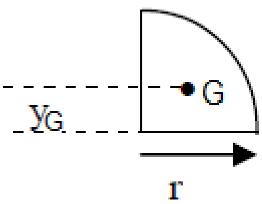
Cette formule montre que le point d'application de la résultante F se trouve toujours ***plus bas*** que le centre de gravité d'une distance égale à :

$$\frac{I_{xG}}{y_G S}$$

La profondeur du centre de poussée par rapport à la surface libre est donnée par :

$$h_p = y_P \sin\alpha$$

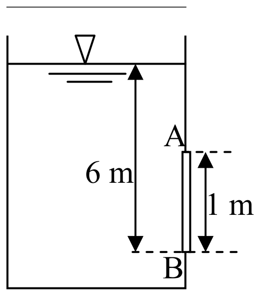
Le tableau suivant fournit le centre de gravité, la surface et l'inertie pour quelques formes de surface plane.

| Type de surface | Forme géométrique | Centre de gravité | surface | Moment d'inertie $I_{xG}$ |
|---|---|---|---|---|
| Rectangle |  | $\frac{h}{2}$ | $bh$ | $\frac{bh^3}{12}$ |
| Triangle |  | $\frac{h}{3}$ | $\frac{bh}{2}$ | $\frac{bh^3}{36}$ |
| Cercle |  | $r$ | $\pi r^2$ | $\frac{\pi r^4}{4}$ |
| Demi cercle |  | $\frac{4r}{3\pi}$ | $\frac{\pi r^2}{2}$ | $\left(\frac{\pi}{8}-\frac{8}{9\pi}\right)r^4$ |
| Quart de cercle |  | $\frac{4r}{3\pi}$ | $\frac{\pi r^2}{4}$ | $\left(\frac{\pi}{16}-\frac{4}{9\pi}\right)r^4$ |

**Exemple :**

Déterminer la poussée hydrostatique sur la paroi circulaire AB et son centre de poussée.

On donne ρ=1000kg/m$^3$ et g=9.81 m/s$^2$




**Solution :**

1. La force hydrostatique

$F = \rho g\, h_G S$

$F = 1000 \times 9.81 \times (6 - 0{,}5)\pi\, 0{,}5^2$

$\boldsymbol{F = 42{,}354\ kN}$

2. Le centre de poussée

$$h_P = y_P = y_G + \frac{I_{xG}}{y_G S}$$

$$y_G = h_G = 5{,}5\ m\ et\ I_{xG} = \frac{\pi D^2}{64} = 0{,}049\ m^4$$

$h_P = 5{,}511\ m$

**II.5.2 Surfaces courbes**

Soit une paroi courbe AB retenant un fluide de masse volumique ρ .

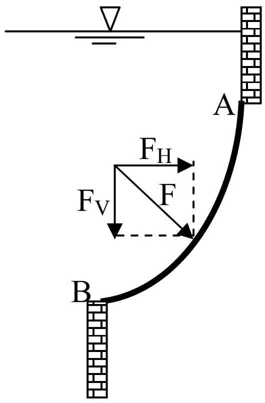



**Figure II.8 : Surface solide courbe**

La surface élémentaire **dS** est situé à une profondeur de **h** , la pression qui s'y exerce est : $P = \rho\, gh$

Donc la force élémentaire sera :$dF = \rho gh\ dS \Rightarrow F = \int \rho gh\ dS$

La dernière intégrale n'est pas possible dans tous les cas, car la force F change de direction sur la paroi, dans ce cas on évalue séparément les composants horizontale ($F_H$) et verticale ($F_V$) de la force F.

- La composante horizontale ($F_H$) s'écrit:

$$F_H = \int dF\ \sin\theta = \int \rho gh\ \sin\theta\ dS$$

On remarque que dS sin(θ) est la projection de la surface S sur un plan vertical.

Donc :

$$F_H = \rho g h_G S_x$$

Où :

$S_x$ est la projection de la surface S sur un plan vertical ;

$h_G$ est la profondeur du centre de gravite de la surface $S_x$.

- La composante verticale ($F_V$) est égale à :

$$F_V = \int dF \ \cos\theta = \int \rho g h \ \cos\theta \, dS$$

On remarque aussi que dS cos(θ) est la projection de la surface S sur un plan horizontal, d'où :$\int h \ \cos\theta \, dS = W$ est le volume du fluide compris entre la surface courbée et la surface libre.

Donc :

$$F_V = \rho g W$$

Cette formule montre que la composante verticale $F_v$ est le Poids du fluide compris entre la surface courbée et la surface libre.

Le calcul des 2 composantes $F_H$ et $F_V$ permet ensuite de déterminer la résultante F par l'expression suivante :

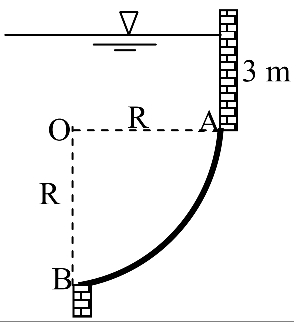
$$F = \sqrt{F_H^2 + F_V^2}$$

Le centre de poussée est obtenu par l'intersection entre la surface courbée et la ligne d'action de la force résultante en tenant compte que l'angle d'inclinaison de la force résultante F par rapport à l'horizontale est obtenu par la formule suivante :

$$\theta = arctg\,\frac{F_V}{F_H}$$

**Exemple :**

Une vanne radiale est localisée à la base d'un mur vertical. La largeur de la vanne est L = 5m et son rayon R = 4m. Déterminer la force résultante exercée sur cette vanne



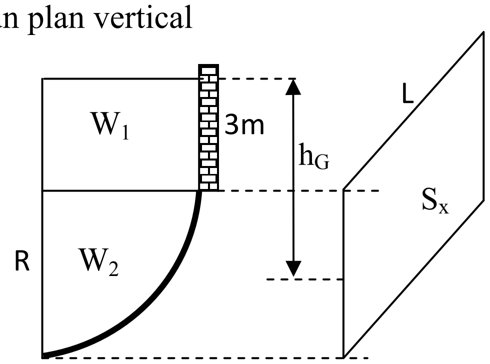
**Solution**

1. La force horizontale:

$F_H = \rho\ g\ h_G\ S_x = \rho\ g\ h_G\ R\ L$

Où $S_x$ la projection de la surface courbée AB sur un plan vertical

donc :




$F_H = 1000\ 9{,}81\ 5\ 20$

$= 981\ kN$

Le point d'application de $F_H$ :

$$h_P = y_P = y_G + \frac{I_{xG}}{y_G S}$$

$$y_G = h_G = 5\ m\ et\ I_{xG} = \frac{LR^3}{12} = 26{,}66\ m^4$$

$$h_P = 5{,}267\ m$$

2. La force vertical

$$F = \rho g\ W = \rho g\ (W_1 + W_2)$$

$$W_1 = 3\ R\ L\ et\ \ W_2 = \frac{\pi R^2}{4}\ L$$

$$F = 1000\ 9{,}81\ (12{,}56+12)\ 5$$

$$= 1204{,}67\ kN$$

Le point d'application de $F_V$ est le centre de gravité du volume W :

$$x_G = \frac{x_{G1}S_1 + x_{G2}S_2}{S_1 + S_2} = \frac{\frac{R}{2}RL + \frac{4R}{3\pi}\frac{\pi R^2}{4}}{RL + \frac{\pi R^2}{4}} = 1{,}85\ m$$

**II.6 Poussé d'Archimède**

Soit une surface fermée formant un corps solide de masse volumique $\rho_s$ et de volume $W$ immergé dans un fluide de masse volumique ρ

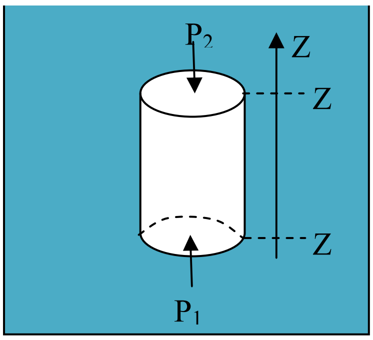



**Figure II.9 : Corps solide immergée dans un fluide**

Les forces verticales qui agissent sur l'élément du volume sont dues aux pressions hydrostatiques. La résultante de ces forces est :

$$F_R = (P_1 - P_2)\,S = \rho g(Z_2 - Z_1)S = \rho g W$$

Par conséquent, un corps immergé dans un fluide est soumis à l'action de la poussée verticale opposée en direction et égale au poids du fluide déplacé par le corps :

$$F_A = \rho g W$$

La force $F_A$ s'appelle la force d'Archimède

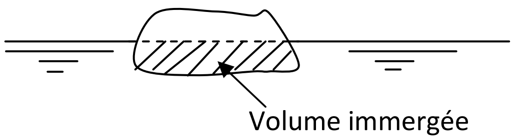
***Théorème d'Archimède :***

Tout corps plongé dans un fluide reçoit de la part de ce fluide une force (poussée) verticale, vers le haut dont l'intensité est égale au poids du volume de fluide déplacé (ce volume est donc égal au volume immergé du corps).

Il résulte de ce théorème que si le poids d'un corps placé dans une masse fluide est inférieur au poids de son volume du fluide, le corps flotte.

**Exemple :**

Quelle est la fraction de volume d'un morceau de métal solide de densité 7,25 qui flotte à la surface d'un récipient de mercure de densité 13,6




**Solution :**

Le morceau de métal en équilibre quand le poids de ce morceau égale la force d'Archimède:

$$F_A = Poids \Rightarrow \rho_{Hg} g\, V_{immerg\acute{e}} = \rho_{m\acute{e}tal} g\, V_{total}$$

donc :

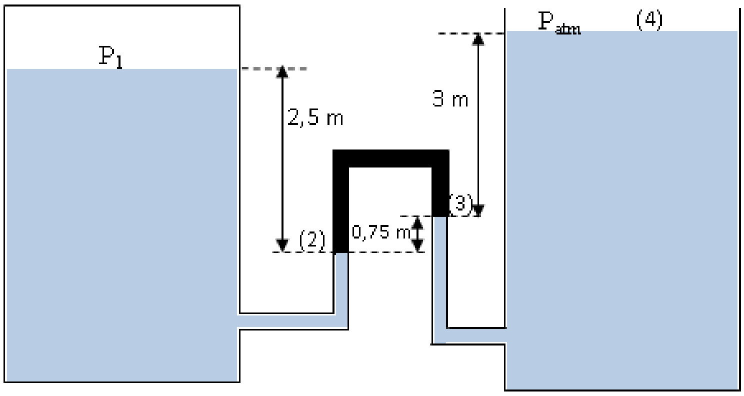
$$\frac{V_{immerg\acute{e}}}{V_{total}} = \frac{\rho_{m\acute{e}tal}}{\rho_{Hg}} = \frac{7{,}25}{13{,}6} = 0{,}533$$

La fraction de volume immergée dans le mercure est 53,3%

## Exercices

**Exercice N°1 :**

Deux réservoirs d'eau sont relié entre eux par un manométre contenant du mercure ($d_{Hg}$=13,6). Calculer la pression $P_1$ du réservoir gauche.




**Solution :**

Appliquons la loi fondamentale de l'hydrostatique (EFH) ente 1 et 2, 2 et 3 puis 3 et 4 :

$P_2 = P_1 + \rho g\ (2{,}5)$ (1)

$P_2 = P_3 + \rho_{Hg} g\ (0{,}75)$ (2)

$P_3 = P_4 + \rho g\ (3)$ (3)

Si l'on calcule la pression $P_1$ à partir de la pression atmosphérique c'est à dire cette pression est manométrique, on soustrait donc $P_4$ et on trouve :

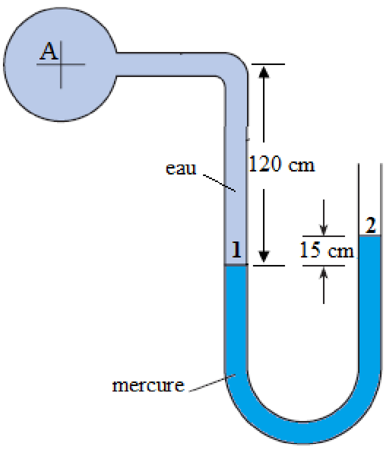
$P_3 = \mathbf{29430\ Pa}$

$P_2 = \mathbf{129492\ Pa}$

$P_1 = P_2 - \rho g\ (2{,}5) = 104967\ Pa = \mathbf{1{,}05\ bar}$

**Exercice N°2 :**

Calculer la pression manométrique en A en kPa due à la dénivellation du mercure, de densité 13,6 dans le manomètre en U représenté sur la figure ci-dessous:



**Solution :**

Appliquons la loi fondamentale de l'hydrostatique (EFH) ente A et 1, puis 1 et 2 :

$P_1 = P_A + \rho g\ (1{,}2)$ (1)

$P_1 = P_2 + \rho_{Hg} g\ (0{,}15) = P_{atm} + \rho_{Hg} g\ (0{,}15)$ (2)

Puisque l'on calcule la pression manométrique, on soustrait donc Patm et on trouve :

$P_1 = \rho_{Hg} g\ (0{,}15) = 13600\ 9{,}81\ 0{,}15 = \mathbf{20012{,}4\ Pa}$

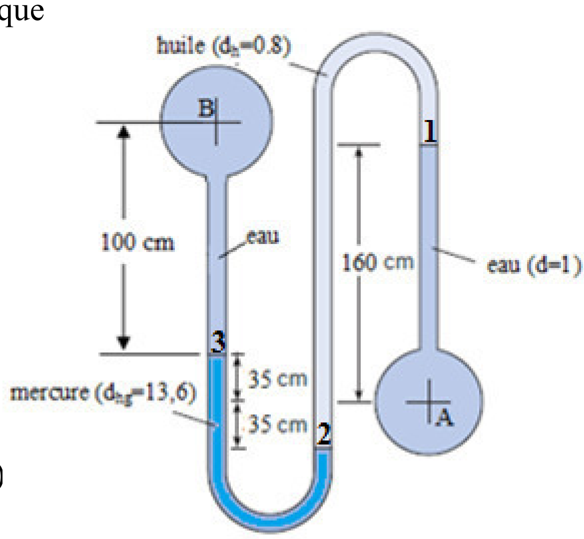
$P_A = P_1 - \rho g\ (1{,}2) = 8240{,}4\ Pa = \mathbf{8{,}24\ kPa}$

**Exercices N°3 :**

Trouver la différence de pression entre A et B dans le montage de la figure ci-dessous.

**Solution :**

Appliquons la loi fondamentale de l'hydrostatique (EFH) ente A et 1, 1 et 2, 2et 3 puis 3 et B :




$P_A = P_1 + \rho g\ (1{,}6)$ (1)

$P_2 = P_1 + \rho_h g\ (1{,}6 + 0{,}35)$ (2)

$P_2 = P_3 + \rho_{Hg} g\ (0{,}35 + 0{,}35)$ (3)

$P_3 = P_B + \rho g\ (1)$ (4)

Remplaçons (4) dans (3) :

$P_2 = P_B + \rho g\ (1) + \rho_{Hg} g\ (0{,}35 + 0{,}35)$ (5)

Remplaçons (5) dans (2) :

$P_B = P_1 + \rho_h g\ (1{,}6 + 0{,}35) - \rho g\ (1) - \rho_{Hg} g\ (0{,}35 + 0{,}35)$ (6)

$(1) - (6) \Rightarrow P_A - P_B = \rho g\ (1{,}6) + \rho g\ (1) + \rho_{Hg} g\ (0{,}35 + 0{,}35) - \rho_h g\ (1{,}6 + 0{,}35)$

$$P_A - P_B \approx \mathbf{103{,}6\ kPa}$$

**Exercice N°4 :**

Un réservoir fermé et sous pression contient de l'huile. Le manomètre affiche 60 kPa. Si la densité de l'huile $d_h$=0.86 et la densité du mercure $d_{Hg}$=13,6 calculer la dénivellation du mercure $h_3$.

**Solution :**

Posons :

$h_1 = 36\ cm\ \ et\ \ h_2 = 6\ cm$

Appliquons la loi fondamentale de l'hydrostatique (EFH) entre 1et 2 puis entre 2 et 3 :

$P_2 = P_1 + \rho_h g\ (h_1 + h_2)$

$P_2 = P_3 + \rho_{Hg} g\ (h_3) \Rightarrow h_3 = \dfrac{P_2 - P_3}{\rho_{Hg} g}$

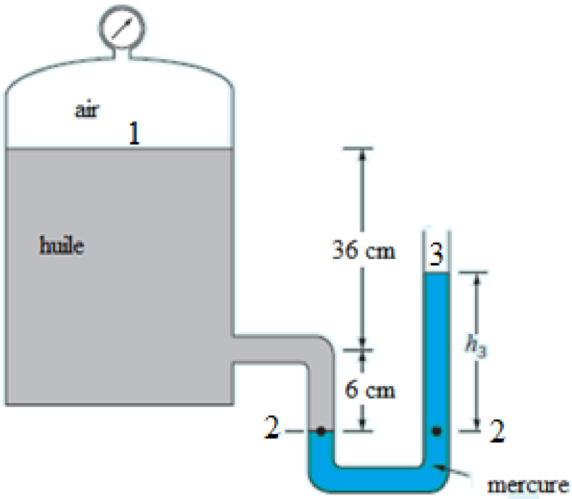
$P_3 = P_{atm} = 0$

Donc :

$$h_3 = \frac{P_2}{\rho_{Hg} g} = \frac{P_1 + \rho_h g\ (h_1 + h_2)}{\rho_{Hg} g}$$

$$h_3 = \frac{60\ \ 10^3 + 860\ 9{,}81\ (0{,}36 + 0{,}06)}{13600\ 9{,}81}$$

$h_3 = \mathbf{0{,}476\ m}$

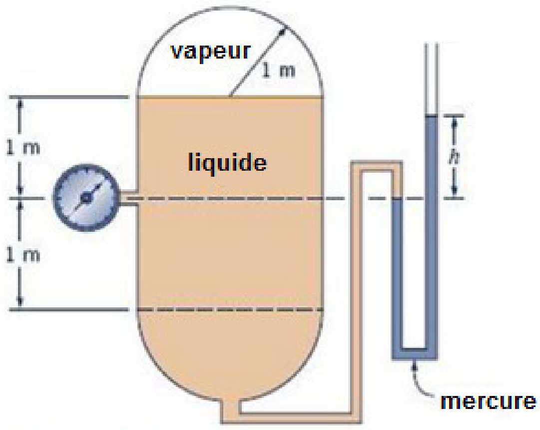



**Exercice N°5 :**

Un réservoir cylindrique contient un liquide volatile et sa vapeur. Si la densité du liquide est 0,8 et la pression absolue de la vapeur est 120 kPa :

1. Calculer la pression relative affiché par le manométre ;
2. Calculer la dénivellation du mercure h.

On donne : $P_{atm} \approx\ 10^5\ Pa$




**Solution :**

**1. La pression affiché par le manométre**

$P_{(mano)} = \rho_l g\ (1) + P_{vapeur} - P_{atm}$

$P_{(mano)} = 800\ 9{,}81\ (1) + 120\ 10^3 - 10^5$

$P_{(mano)} = \mathbf{27{,}84\ kPa}$

**2. la dénivellation du mercure h**

$$P_{(mano)} = \rho_{Hg} g\ h \Rightarrow h = \frac{P_{(mano)}}{\rho_{Hg} g} = \frac{27{,}84\ 10^3}{13600\ 9{,}81}$$

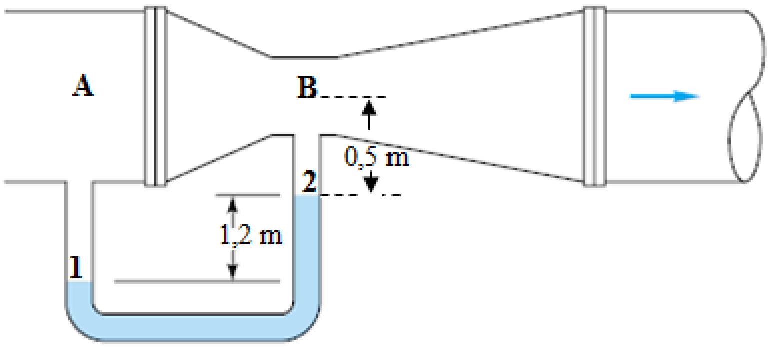
$h = \mathbf{0{,}2\ m}$

**Exercice N°6 :**

De l'eau circule dans un tube de venturi et la dénivellation du mercure dans le manomètre différentiel est 1,2 m. Calculer la différence de pression entre A et B.

**Solution :**

Appliquons (EFH) entre A et 1, 1 et 2 puis entre 2 et B :




$P_1 = P_A + \rho g\ (1{,}2 + 0{,}5)$ (1)

$P_1 = P_2 + \rho_{Hg}\, g\ (1{,}2)$ (2)

$P_2 = P_B + \rho g\ (0{,}5) \Rightarrow P_B = P_2 - \rho g\ (0{,}5)$ (3)

$(1) - (2) \Rightarrow P_A = P_2 + \rho_{Hg}\, g\ (1{,}2) - \rho g\ (1{,}2 + 0{,}5)$ (4)

$(4) - (3) \Rightarrow P_A - P_B = \rho_{Hg}\, g\ (1{,}2) - \rho g\ (1{,}2 + 0{,}5) + \rho g\ (0{,}5)$

$P_A - P_B = \mathbf{148{,}32\ kPa}$

**Exercice N°7 :**

On considère un réservoir circulaire (diamètre $d$ = 1 $m$). Un piston repose sur la surface libre de l'huile (densité $d$ = 0, 86) qui remplit le réservoir et le tube (pas de frottement et étanchéité parfaite entre le piston et le réservoir). Le manomètre donne la pression à l'extrémité du tube 70 kPa. Calculer la masse du piston

**Solution :**

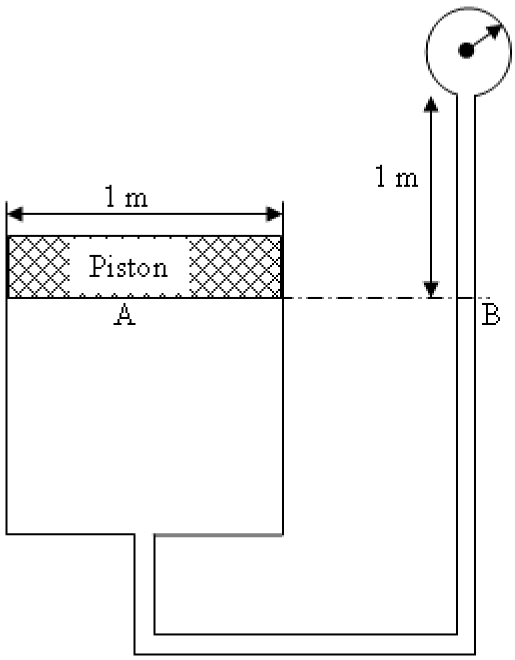
Pression en A= Pression en B

$$\frac{poids\ de\ piston}{surface\ de\ réservoir} = Pc + \rho_{huile} g h$$

$$M = \frac{\pi d^2}{4g}(Pc + \rho_{huile} g h)$$

$$M = \frac{3{,}14 \times 1^2}{4 \times 9{,}81}(70\ 10^3 + 860 \times\ 9{,}81 \times 1)$$

$$M = \mathbf{6276{,}52\ kg}$$



**Exercice N°8 :**

L'indicateur de pression au point B (figure ci-dessous) est pour mesurer la pression au point A dans un écoulement de l'eau. Si la pression en B est de 87 kPa, déterminer la pression au point A, en kPa. Données : densité de l'huile $d_h$=0,87 et la densité du mercure $d_{Hg}$=13,6

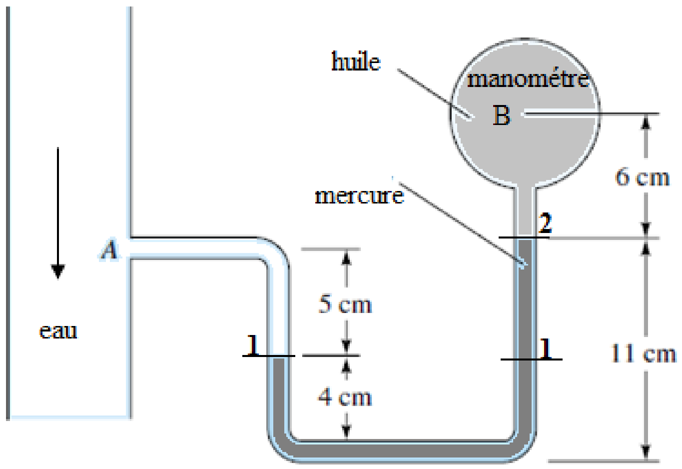



**Figure 5**

***Solution :***

$P_1 = P_A + \rho g\ (0{,}05) \qquad (1)$

$P_1 = P_2 + \rho_{Hg} g\ (0{,}07) \qquad (2)$

$P_2 = P_B + \rho_h g\ (0{,}06) \qquad (3)$

***Remplaçons (3) en (2)***

$P_1 = P_B + \rho_h g\ (0{,}06) + \rho_{Hg} g\ (0{,}07) \qquad (4)$

***Remplaçons (1) en (4)***

$P_A + \rho g\ (0{,}05) = P_B + \rho_h g\ (0{,}06) + \rho_{Hg} g\ (0{,}07)$

***Donc***

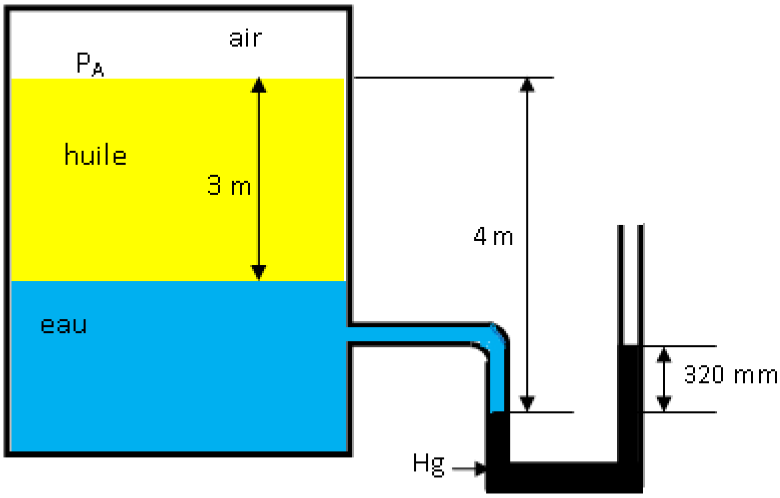
$P_A = P_B + \rho_h g\ (0{,}06) + \rho_{Hg} g\ (0{,}07) - \rho g\ (0{,}05)$

$P_A = P_B + \rho g \left(d_h\ (0{,}06) + d_{Hg}\ (0{,}07) - \ (0{,}05)\right)$

$P_A = 87\ 10^3 + 10^3\ 9{,}81\ (0{,}87\ (0{,}06) + 13{,}6\ (0{,}07) - \ (0{,}05)) = \mathbf{96{,}36\ kPa}$

**Exercice 9:**

Le réservoir fermé contient deux liquides non miscibles et est relié par un manomètre comme représenté la figure 1. La densité de l'huile est 0,82. Déterminer la pression manométrique de l'air $\mathbf{P_A}$.




**Solution** :

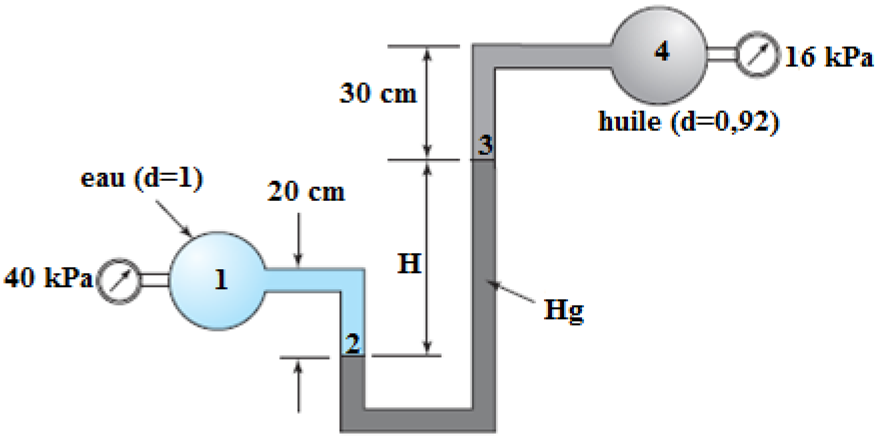
$$P_A + \rho g \times (1) + \rho_h g \ \times (3) = \rho_{Hg} g \times (0{,}32)$$

$$P_A = \rho_{Hg} g (0{,}32) - \rho g(1) - \rho_h g\ (3) = \rho g \left(d_{Hg} \ \times 0{,}32 - 1 - 0{,}82 \times 3\right)$$

$$P_A = 9810(13{,}6 \ \times 0{,}32 - 1 - 0{,}82 \times 3) = 8750{,}52\ Pa = \boldsymbol{8{,}75\ KPa}$$

**Exercice N°10 :**

Déterminer la dénivellation du mercure H dans le montage de la figure ci-dessous.




**Solution :**

Appliquons (EFH) entre 1et 2, entre 2 et 3 puis entre 3 et 4 :

$$P_2 = P_1 + \rho g\ (0{,}2) = 40 10^3 + 1000\ 9{,}81\ (0{,}2) = 41{,}96\ kPa$$

$$P_2 = P_3 + \rho_{Hg} g\,(H) \Rightarrow H = \frac{P_2 - P_3}{\rho_{Hg} g}$$

$$P_3 = P_4 + \rho_h g\,(0{,}3) = 16\;10^3 + 920\;9{,}81\;0{,}3 = 18{,}71\;kPa$$

Alors :

$$H = \frac{(41{,}96 - 18{,}71)\;10^3}{13600\;9{,}81} = \mathbf{0,174\;m}$$

**Exercice N°11 :**

Considérons le manomètre incliné décrit à la figure ci-dessous permettant de mesurer la différence de pression entre A et B. Celui-ci est composé de trois fluides différents :

- Eau : $\rho_{eau}$=1000 Kg/m$^3$
- Mercure : $\rho_{Hg}$=13600 Kg/m$^3$
- Huile : $\rho_{huile}$=900Kg/m$^3$

Déterminez la différence de pression entre A et B.

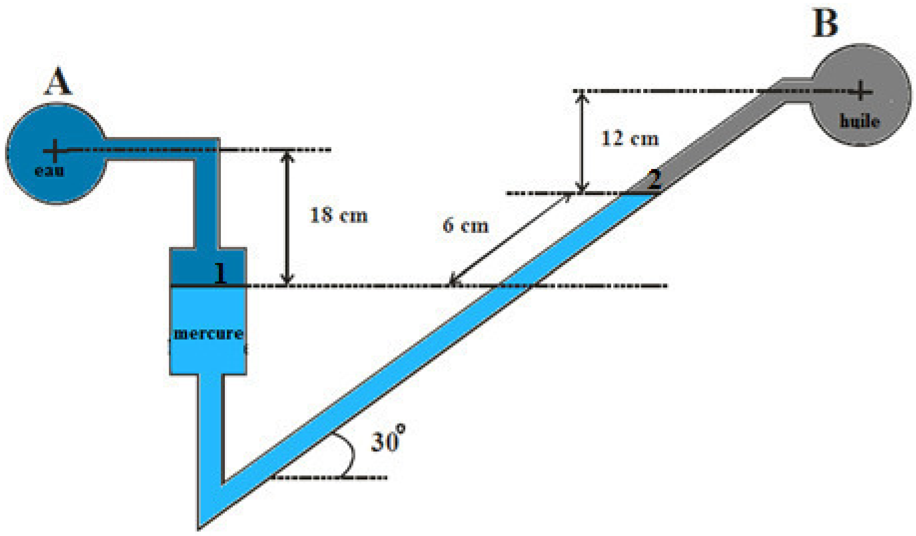
**Solution :**

Appliquons (EFH) entre A et 1, entre 1 et 2 puis entre 2 et B :

$$P_1 = P_A + \rho g\,(0{,}18) \qquad (1)$$

$$P_1 = P_2 + \rho_{Hg} g\;\sin 30°\,(0{,}06) \qquad (2)$$

$$P_2 = P_B + \rho_h g\,(0{,}12) \qquad (3)$$




Remplaçons (3) et (1) dans (2), on trouve :

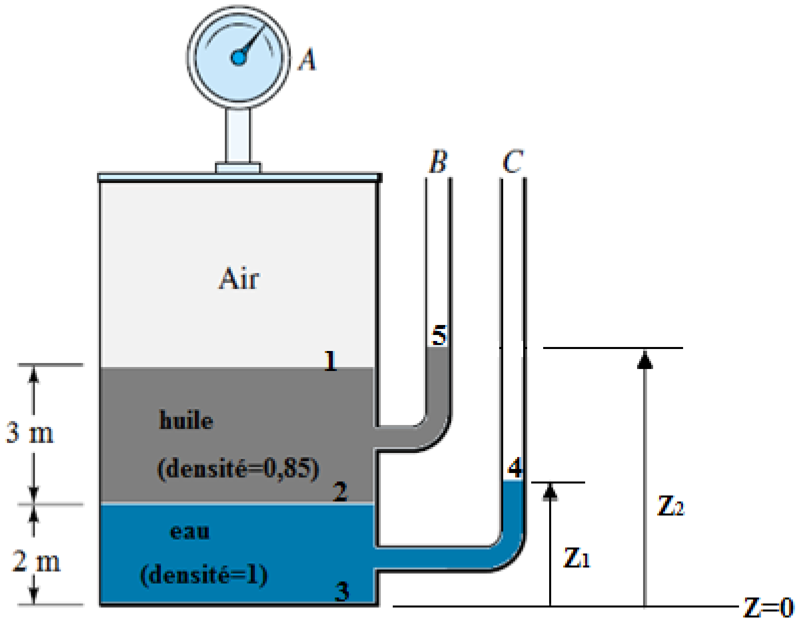
$$P_A + \rho g\,(0{,}18) = P_B + \rho_h g\,(0{,}12) + \rho_{Hg} g\;\sin 30°\,(0{,}06)$$

Alors :

$P_A - P_B = \rho_h g\ (0{,}12) + \rho_{Hg} g\ \sin 30°\ (0{,}06) - \rho g\ (0{,}18) = \mathbf{3296{,}16\ Pa}$

**Exercice N°12 :**

Le réservoir fermé de la figure ci-dessous possède deux piézomètres B et C. Si la pression au manomètre A est 2 kPa, déterminer l'élévation des niveaux de liquide dans les tubes piézométriques ouverts B et C.




**Solution :**

1. **L'élévation du niveau de liquide dans le tube piézométrique ouvert B**

Appliquons (EFH) entre 2 et 1puis entre 2 et 5 :

$P_2 = P_1 + \rho_h\ g\ (3)$ (1)

$P_2 = P_5 + \rho_h g\ (Z_2 - 2)$ (2)

On a :

$P_1 = 2000\ Pa\ \ et\ P_5 = P_{atm} = 0$

On remplace (2) en (1) et on déduit la valeur de $Z_2$ :

$$Z_2 = \frac{P_1 + \rho_h\ g\ (3)}{\rho_h g} + 2 = 5{,}24\ m$$

2. **L'élévation du niveau de liquide dans le tube piézométrique ouvert C**

Appliquons (EFH) entre 3 et 1puis entre 3 et 4 :

$P_3 = P_1 + \rho g\ (2) + \rho_h\ g\ (3)$

$P_3 = P_4 + \rho g\ Z_1$

On a :

$P_1 = 2000\ Pa\ \ et\ P_4 = P_{atm} = 0$

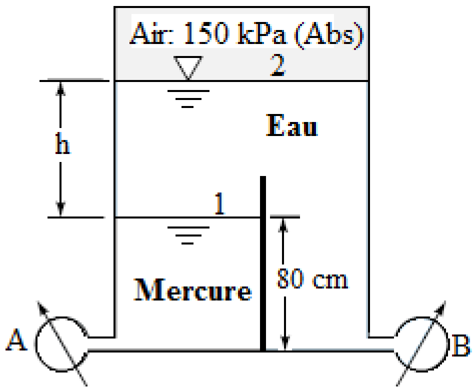
Alors:

$$Z_1 = \frac{P_1 + \rho g\ (2) + \rho_h\ g\ (3)}{\rho g} = \frac{2000 + 1000\ 9{,}81\ 2 + 850\ 9{,}81\ 3}{1000\ 9{,}81} = \mathbf{4{,}75\ m}$$

**Exercice N°13 :**

Soit le système de la figure ci-dessous, si on lit sur le manomètre A une pression absolue $P_A$=300 kPa.

1. Quelle est la hauteur de l'eau h?
2. Que sera la pression affichée au manomètre B (en pression absolue)




**<u>Solution :</u>**

1. **La hauteur de l'eau h**

Appliquons (EFH) entre A et 1puis entre 1 et 2 :

$$P_A = P_1 + \rho_{Hg} g\ (0{,}8)$$

$$P_1 = P_2 + \rho g\ h$$

Alors :

$$P_A = P_2 + \rho g\ h\ \ + \rho_{Hg} g\ (0{,}8) \Rightarrow h = \frac{P_A - P_2 - \rho_{Hg} g\ (0{,}8)}{\rho g} = \mathbf{4{,}41m}$$

2. **La pression B**

Appliquons (EFH) entre B et 2 :

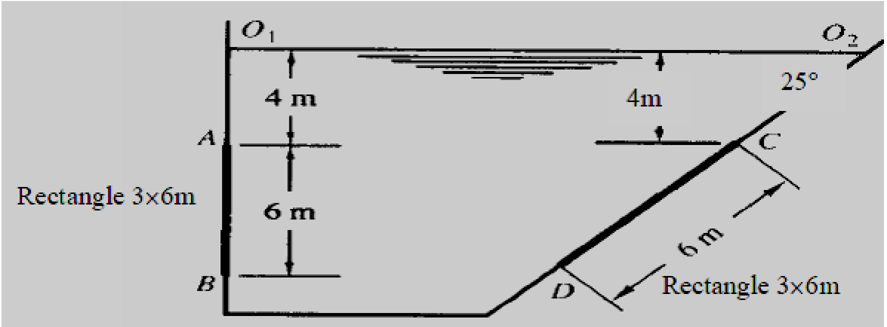
$$P_B = P_2 + \rho g\ (4{,}41 + 0{,}8) = \mathbf{201{,}11\ kPa}$$

**Exercice N°14 :**

Un réservoir est équipé par deux vannes rectangulaires (3m ×6m) en AB et CD.

1. Calculer la force de pression sur AB et CD
2. Déterminer le centre de poussée sur AB et CD
3. La vanne CD est remplacée par une vanne circulaire, quel serait le diamètre de la vanne pour garder la même force calculée en 1)

4. Déterminer le nouveau centre de poussée sur CD.




**Solution :**

1. La surface AB

$F = \rho g h_G S$

$h_G$=4+3=7 m et S =18 m$^2$

donc

F = 1000 9,81 7 18= = **1,236 MN**

$$y_p = h_p = h_G + \frac{I_{xG}}{h_G S} = 7 + \frac{\frac{3\ 6^3}{12}}{7\ 18} = \mathbf{7{,}43m\ suivant\ l'axe\ O_1}$$

2. La surface CD

$F = \rho g h_G S$

$h_G$=4+3 sin25°=5,26 m et S =18 m$^2$

donc

F = 1000 9,81 5,26 18 = **928,81 kN**

$$y_p = y_G + \frac{I_{xG}}{y_G S}$$

$$y_G = \frac{h_G}{\sin 25°} = 12{,}46\ m$$

*alors*:

$$y_p = 12{,}46 + \frac{54}{12{,}46\ 18} = \mathbf{12{,}7m\ suivant\ l'axeO_2}$$

3. La surface CD est circulaire

$F = \rho g h_G S$

Où:

$h_G$=4+R sin25° et S=π R$^2$

alors

$$F = \rho g(4 + 0{,}422\, R)\pi\, R^2 \Rightarrow 4R^2 + 0{,}422\, R^3 = \frac{F}{\rho g \pi} = \frac{928{,}81\ 10^3}{10^3\ 9{,}81\ 3{,}14} = 30{,}15$$

on trouve finalement

$$R^3 + 9{,}47\, R^2 - 71{,}44 = 0$$

La racine de cette équation de 3$^{\text{iéme}}$ dégrée est R=2,45m

donc le diamètre de la porte CD est :

D=4,9 m

$$y_p = y_G + \frac{I_{xG}}{y_G S} = \frac{h_G}{\sin 25°} + \frac{\frac{\pi R^4}{4}}{11{,}92\ \pi R^2} = 11{,}92 + \frac{2{,}45^2}{4\ 11{,}92}$$

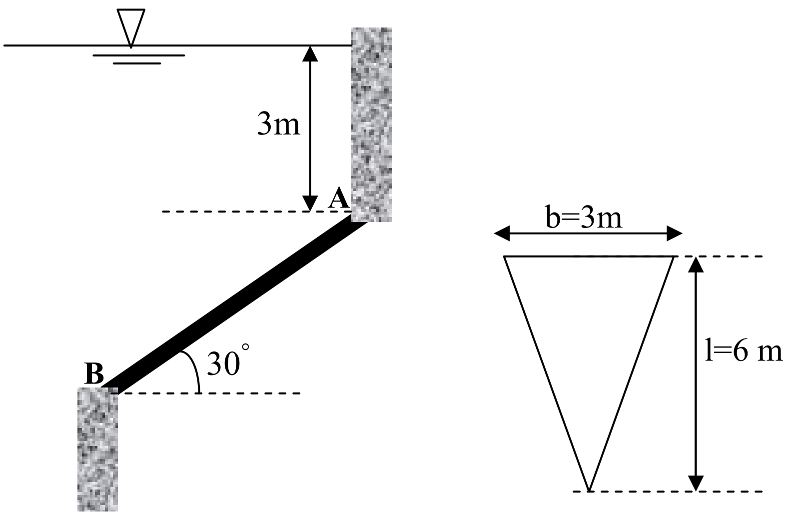
Donc

$$y_p = \mathbf{12,05\ m\ suivant\ l'axe\ O_2}$$

**Exercice N°15 :**

Le schéma montre une vanne AB triangulaire retenant un niveau d'eau et immergée à une profondeur de 3 m. Calculer la force de pression **F** exercée sur cette vanne ainsi que son centre de poussée :

1. Si le sommet de triangle est en B
2. Si le sommet de triangle est en A




**Solution :**

1. Le sommet de triangle est en B

$$F = \rho\ g\ h_G\ S = 10^3 9{,}81\ \left(\frac{1}{3} 6\ \sin 30° + 3\right) \frac{18}{2} = \mathbf{353,16\ kN}$$

$$y_p = y_G + \frac{I_{xG}}{y_G S}$$

$$y_G = \frac{h_G}{\sin 30°} = 8\,m\ et\ I_{xG} = \frac{3\ 6^3}{36} = 18\,m^4$$

Donc

$$y_p = 8 + \frac{18}{8 \times 9} = \mathbf{8,25\ m}$$

**2.** Le sommet de triangle est en A

$$F = \rho\ g\ h_G\ S = 10^3 9{,}81\left(\frac{2}{3}6\ \sin 30° + 3\right)\frac{18}{2} = \mathbf{441,45\ kN}$$

$$y_p = y_G + \frac{I_{xG}}{y_G S}$$

$$y_G = \frac{h_G}{\sin 30°} = 10\,m\ et\ I_{xG} = \frac{3\ 6^3}{36} = 18\,m^4$$

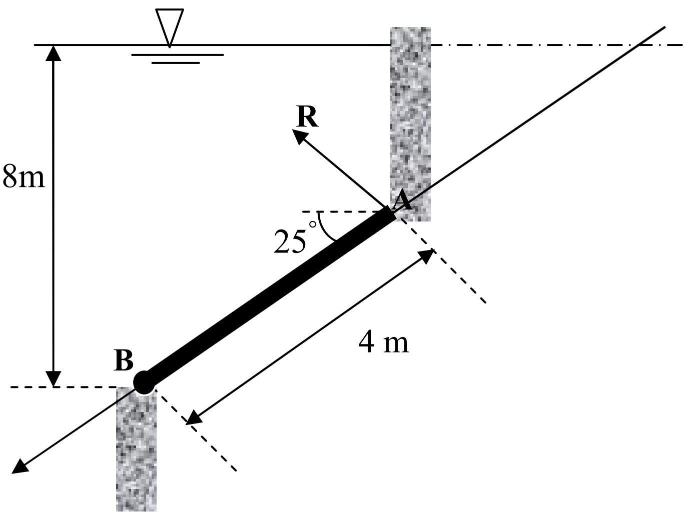
Donc

$$y_p = 10 + \frac{18}{10 \times 9} = \mathbf{8,2\ m}$$

**Exercice N°16 :**

La porte AB articulée en B de largeur b= 3m et de longueur L= 4 m permet la vidange d'un réservoir de grande dimension.

1. Calculer la force hydrostatique agissant sur la porte et son point d'application ;
2. Calculer la force R nécessaire pour ouvrir la porte ;
3. Si le poids de la porte AB est 200 kN, quelle serait la force R nécessaire pour ouvrir la porte.



**Solution :**

1. La force hydrostatique et son point d'application

$F = \rho\, g\, h_G\, S$

$h_G = 8 - 2\sin 25° = \mathbf{7{,}15\ m}$

$F = 10^3 9{,}81\ 7{,}15\ 4 \times 3 = \mathbf{841{,}7\ kN}$

$$y_p = y_G + \frac{I_{xG}}{y_G S}$$

Avec

$$y_G = \frac{h_G}{\sin 25°} = \mathbf{16{,}91\ m}\ et\ I_{xG} = \frac{3\ 4^3}{12} = \mathbf{16\ m^4}$$

$$y_p = 16{,}91 + \frac{16}{16{,}91\ 12} = \mathbf{16{,}988\ m}$$

2. La force R nécessaire pour ouvrir la porte

La force R en appui sur A pour ouvrir la porte peut être déduite par l'égalité des moments des forces par rapport à B :

$$R\ L = F\ \overline{PB} \Rightarrow R = \frac{F\ \overline{PB}}{L}$$

Où

$$PB = \frac{8}{\sin 25°} - y_p = \mathbf{1{,}94\ m}$$

Donc:

$$R = \frac{841{,}7\ 10^3\ 1{,}94}{4} = \mathbf{408{,}22\ kN}$$

3. La force R nécessaire pour ouvrir la porte si le poids de la porte est W=200 kN

La force R en appui sur A pour ouvrir la porte peut être déduite par l'égalité des moments des forces par rapport à B :

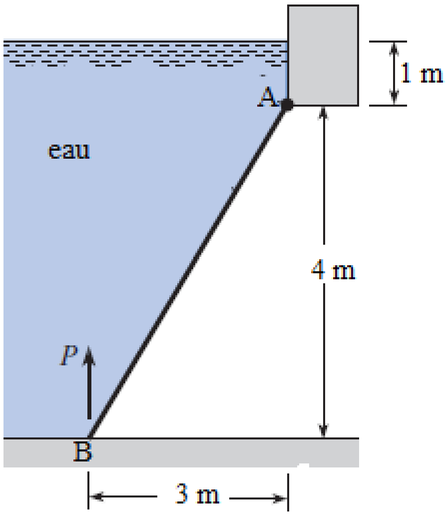
$$R\ L = F\ \overline{PB} + W 0{,}5\ L\ \cos 25° \Rightarrow R = \frac{F\ PB + W 0{,}5\ L\ \cos 25°}{L}$$

$$R = \frac{841{,}7 10^3 1{,}94 + 200\ 10^3\ 0{,}5\ 4 \cos 25°}{4} = \mathbf{498{,}85\ kN}$$

**Exercice N°17 :**

La porte rectangulaire AB de la figure ci-dessous est de 2 m de largeur. Cette porte à la possibilité de pivoter autour de l'axe A.

1. Calculer la force de pression de l'eau sur la porte et son point d'application
2. Déterminer la force P nécessaire pour ouvrir la porte




**Solution:**

**1. La force $F_{AB}$ et son point d'application**

$$F_{AB} = \rho\, g\, h_G\, S$$

$$L_{AB} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5\, m \; et \;\; S = L_{AB} 2 = \mathbf{10\, m^2}$$

$$h_G = 1 + \frac{4}{2} = \mathbf{3\, m}$$

$$F_{AB} = 10^3\, 9{,}81\, 3\, 10 = \mathbf{294{,}3\, kN}$$

$$y_p = y_G + \frac{I_{xG}}{y_G S}$$

Avec

$$\tan\alpha = \frac{4}{3} \Rightarrow \alpha = 53{,}13° \Rightarrow \sin\alpha = 0{,}8$$

$$y_G = \frac{h_G}{\sin\alpha} = \frac{3}{0{,}8} = 3{,}75\, m$$

$$y_p = 3{,}75 + \frac{\frac{2\, 5^3}{12}}{3{,}75\, 10} = \mathbf{4{,}305\, m}$$

**2. La force P**

La porte en équilibre :

$$\sum M(F)/A = 0$$

$$F\overline{AP} = P\, 3$$

$$\overline{AP} = y_p - \frac{1}{\sin\alpha} = 3{,}055$$

$$P = \frac{F\ \overline{AP}}{3} = \frac{294{,}3\ 10^3 3{,}055}{3} = 299{,}7\ kN$$

**Exercices 18:**

La figure ci-dessous représente un réservoir délimitant deux milieux liquides de masses volumiques différentes et dont les niveaux sont décalés de 0,5 m. On considère une porte AB de section carré inclinée d'un angle de α par rapport à l'horizontale ayant une côté de L=2m.

On donne $\rho_2$=850 Kg/m$^3$, $\rho_1$= 1000 Kg/m$^3$, α = 75°. On prend g=10 m/s$^2$. $I_{xg} = \frac{L^4}{12}$

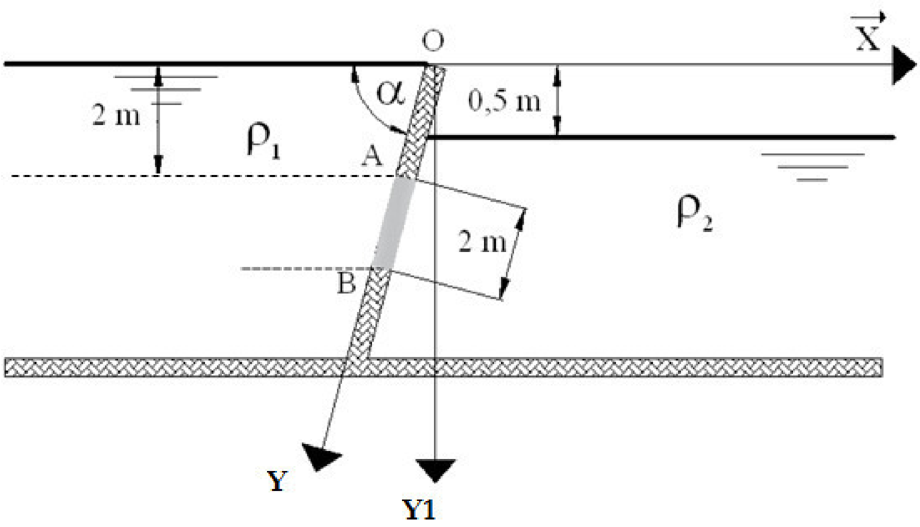
1) Calculer la force de pression $F_1$ exercée par le liquide 1 sur la surface carrée.

2) Préciser la position du centre de poussée de la force $F_1$ sur l'axe Y et sur l'axe $Y_1$.

3) Calculer la force de pression $F_2$ exercée par le liquide 2 sur la surface carrée.

4) Préciser la position du centre de poussée de la force $F_2$ sur l'axe Y et sur l'axe $Y_1$.

5) Sachant que l'articulation est au point A, déterminer l'effort F qu'il faut appliquer en B pour équilibrer la porte. Indiquer le sens de l'effort F.




**Solutions :**

1. **La force $F_1$**

   $F_1 = \rho_1\ g\ h_{G1}\ S$

   $= 10^4\ (2+1 \sin(75°))\ 4$

   $=$ **118637,03 N**

2. **Centre de poussée de la force $F_1$**

   - **L'axe Y**

$$y_{p1} = y_{G1} + \frac{I_{xg}}{y_{G1} S}$$

$$y_{G1} = \frac{h_{G1}}{\sin 75°} = \mathbf{3,07m}$$

$$I_{xg} = \frac{L^4}{12} = \mathbf{1,33\ m^4}$$

$$y_{p1} = 3{,}07 + \frac{1{,}33}{3.07 \times 4} = \mathbf{3,178\ m}$$

- **L'axe $Y_1$**

$$h_{p1} = y_{p1}\ \sin 75° = \mathbf{3,07m}$$

3. **La force $F_2$**

$F_2 = \rho_2\ g\ h_{G2}\ S$

$= 850\ 10\ (2+1\ \sin(75°)-0.5)\ 4$

$=$ **83841,478 N**

4. **Centre de poussée de la force $F_2$**

- **L'axe Y**

$$y_{p2} = y_{G2} + \frac{I_{xg}}{y_{G2} S}$$

$$y_{G2} = \frac{h_{G2}}{\sin 75°} = \mathbf{2,55\ m}$$

$$I_{xg} = \frac{L^4}{12} = 1.33\ m^4$$

$$y_{p2} = 2{,}55 + \frac{1{,}33}{2{,}55 \times 4} = \mathbf{2,68\ m}$$

- **L'axe $Y_1$**

$$h_{p2} = y_{p2}\ \sin 75° = \mathbf{2,59\ m}$$

**Effort F**

$M(F_1)/A = F_1(y_{p1}\text{-}OA) = 118637.03\ (3.178\text{-}2/\sin 75°) =$ **131384,3 N.m**

$M(F2)/A = F_2\ (y_{p2}\text{-}1.5/\sin 75°) =$ **94496,54 N.m**

Puisque $M(F_1)/A > M(F2)/A$ alors le sens de l'effort F est dans le sens de la force $F_2$

$$\sum M(F)/A = 0 \Rightarrow F \times AB + F_2\left(y_{p2} - 1.5/\sin 75°\right) = F_1\left(y_{p1} - 2/\sin 75°\right)$$

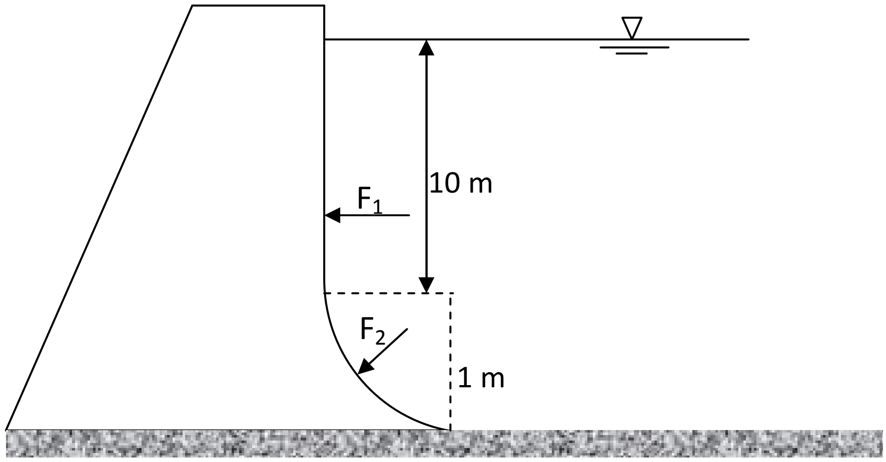
$$F = \frac{F_1\left(y_{p1} - 2/\sin 75°\right) - F_2\left(y_{p2} - 1.5/\sin 75°\right)}{2} = \mathbf{18443,88\ N}$$

**Exercice N°19 :**

Un barrage de béton est constitué d'une surface verticale de 10m de hauteur terminée par un arc de cercle dont le rayon de courbure est de 1m.

1. Calculez la composante horizontale (Rh) de la force hydrostatique s'exerçant sur le barrage par unité de mètre;

2. Calculez la composante verticale (Rv) par unité de mètre;
3. Calculez la grandeur de la force résultante ainsi que l'angle que fait cette force par rapport à l'horizontale.




**Solution :**

**1. La composante Rh**

La composante horizontale (Rh) de la force hydrostatique s'exerçant sur le barrage est égale à la somme de la force $F_1$ et la composante horizontale de la force $F_2$ ($F_{2h}$) :

$$R_h = F_1 + F_{2h}$$

$F_1 = \rho\ g\ h_G\ S = 10^3 9{,}81\ 5\ 10 \times 1 = \mathbf{490{,}5\ kN/m}$

$F_{2h} = \rho\ g\ h_G\ S_z = 10^3 9{,}81\ 10{,}5\ 1 \times 1 = \mathbf{103{,}005\ kN/m}$

$R_h = F_1 + F_{2h} = \mathbf{593{,}505\ kN/m}$

**2. La composante Rv**

La composante verticale (Rv) de la force hydrostatique s'exerçant sur le barrage est égale au poids du liquide au dessus de la courbe :

$$R_V = F_{2V} = \rho\ g\ W = 10^3 9{,}81 \left(10 \times 1 + \frac{\pi 1^2}{4}\right) \times 1 = \mathbf{105{,}8 kN/m}$$

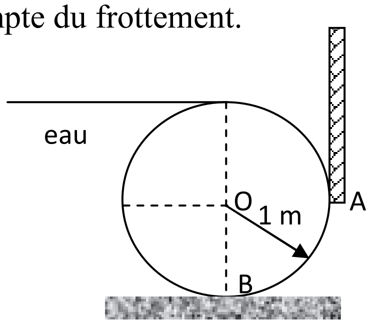
**3.** La grandeur de la force résultante ainsi que l'angle que fait cette force par rapport à l'horizontale.

$$R = \sqrt{R_h^2 + R_V^2} = \sqrt{(593{,}505)^2 + (105{,}8)^2} = \mathbf{602{,}86\ kN/m}$$

$$\tan\alpha = \frac{R_V}{R_h} = \frac{105{,}8}{593{,}505} = 0{,}178 \Rightarrow \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{10{,}1}°$$

**Exercice N°20 :**

Le cylindre de 2m de diamètre de la figure ci-dessous pèse 40 kN et a une longueur de 2m. Déterminer les réactions en A et B, en ne tenant pas compte du frottement.




**Solution :**

1. La réaction en A est due à la composante horizontale de la force exercée par l'eau sur le cylindre soit :

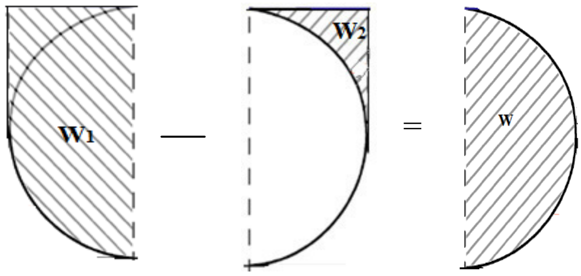
$F_H = \rho\ g\ h_G\ S = 1000 \times 9{,}81 \times 1 \times 2 \times 2 = \mathbf{39240\ N}$

Dirigée vers la droite, ainsi la réaction en A doit être **39240 N** vers la gauche

$R_A = \mathbf{39240\ N}$

2. La réaction en B est la somme algébrique du poids du cylindre (P) et la résultante verticale de la force exercée par l'eau (Fv). La dernière force correspond au poids de l'eau s'appuyant sur la paroi :

$$F_V = \rho g W = \rho g \frac{\pi R^2}{2} L = 10^3\, 9{,}81\ \frac{3{,}14\ 1^2}{2}\ 2 = \mathbf{30803{,}4\ N}$$

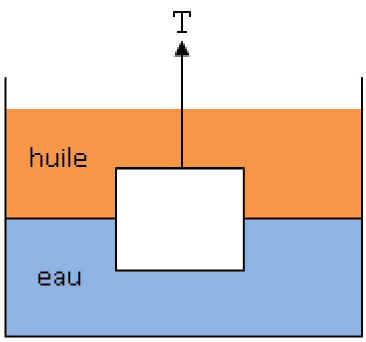
W= 


Donc

$R_B = P - F_V = 40000 - 30803{,}4 = \mathbf{9196{,}6\ N}$

**Exercice N°21 :**

Un cube métallique de 15 cm de côté est suspendu par une corde. Le cube est immergé à moitié dans l'huile (densité 0.8) et moitié dans l'eau. Si la masse volumique du métal est de 2640 kg/m$^3$. Trouvez la force de tension dans la corde.



**Solution :**

La force de tension dans la corde égale à la différence entre le

poids du cube et la poussée d'Archimède :

$T = P - F_A$

Ainsi :

$P = Mg = \rho Wg = 2640\ 0{,}15^3 9{,}81 = \mathbf{87{,}4\ N}$

$F_A = F_{A1} + F_{A2}$

Où

$F_{A1}$ et $F_{A1}$ sont les poussées d'Archimède égale au poids de volume de l'eau et de l'huile déplacée :

$F_A = 1000\ 9{,}81 \dfrac{0{,}15^3}{2} + 800\ 9{,}81 \dfrac{0{,}15^3}{2} = \mathbf{29{,}79\ N}$

$T = 87{,}4 - 29{,}79 = \mathbf{57{,}61\ N}$

**Exercice N°22:**

Un compartiment rectangulaire ouvert, de 10 m par 4 m de base et de 5 m de profondeur, a une masse de 54 tonnes et flotte dans l'eau douce.

1. De combien s'enfonce-t-il
2. Si l'eau à 5 m de profondeur, quel poids de pierres faut il placer dans le compartiment pour le faire reposer le fond

**Solution :**

1. Poids de compartiment = poids de l'eau déplacée (poussée d'Archimède)

$$54 \times 1000 \times 9{,}81 = 1000 \times 9{,}81 \times (10 \times 4 \times h)$$

$$h = 1{,}35\ m\ submergés\ dans\ l'eau$$

2. Poids de compartiment et de la pierre = poids de l'eau déplacée

$$54 \times 1000 \times 9{,}81 + P_s = 1000 \times 9{,}81 \times (10 \times 4 \times 5)$$

$$P_s = 1432{,}26\ kN\ de\ pierres$$

## Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étudier les fluides **en mouvement**. Contrairement aux solides, les éléments d'un fluide en mouvement peuvent se déplacer à des vitesses différentes. L'écoulement des fluides est un phénomène complexe.

On s'intéresse aux équations fondamentales qui régissent la dynamique des fluides incompressibles parfaits, en particulier :

- l'équation de continuité (conservation de la masse) ;
- le théorème de Bernoulli (conservation de l'énergie).
- le théorème d'Euler (conservation de la quantité de mouvement) à partir duquel on établit les équations donnant la force dynamique exercée par les fluides en mouvement (exemple les jets d'eau).

## III.1 Ecoulement permanent, ligne de courant, tube de courant

- L'écoulement d'un fluide est dit permanent si la vitesse des particules fluides est constante dans le temps. Notons cependant que cela ne veut pas dire que le champ des vectrices vitesses est uniforme dans l'espace.
- la **ligne de courant** (L.C.) est une courbe partout tangente aux vecteurs des vitesses des points de cette ligne. Pour un écoulement permanent, une ligne de courant est une courbe invariante dans le repère R, elle correspond aux trajectoires des particules qui la constituent.
- on définit **un tube de courant** (T.C.) par l'ensemble des L.C. s'appuyant sur un contour fermé.

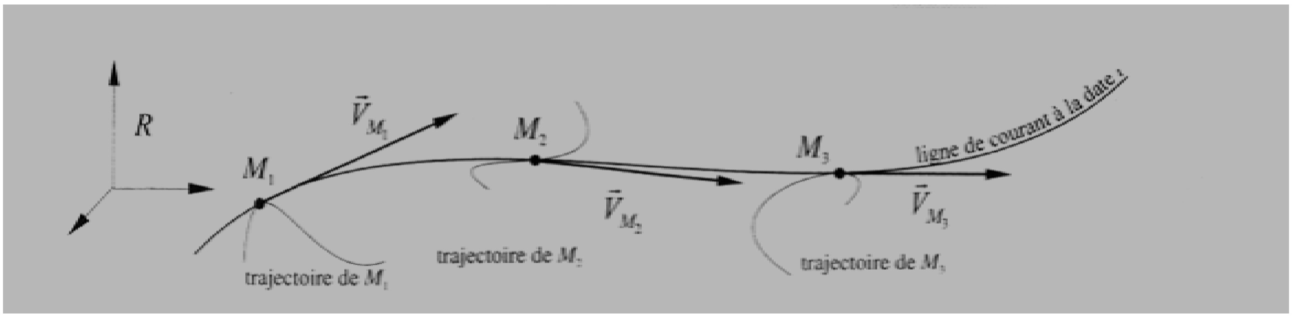



**Figure III.1 : Ecoulement non permanent**

## III.2 Fluide incompressible et Compressible

Un fluide est dit incompressible lorsque le volume occupé par une masse donné ne varie pas en fonction de la pression extérieure (ρ est constante). Les liquides peuvent être considérés comme des fluides incompressibles (eau, huile, etc.). Un fluide est dit compressible lorsque le volume occupé par une masse donnée varie en fonction de la pression extérieure. Les gaz sont des fluides compressibles. Par exemple, l'air, l'hydrogène, le méthane à l'état gazeux, sont considérés comme des fluides compressibles.

**III.3 Equation de continuité**

Considérons un tube de courant (ou un tuyau) parcouru, en régime permanent, par un liquide.

L'expression du principe de conservation de la masse se traduit par l'égalité de la masse de fluide entrant par $S_1$ entre les instants t et t + dt avec la masse de fluide sortant par $S_2$ pendant cette même durée, c'est à dire:

$$dm_1 = dm_2 \Rightarrow \rho_1 S_1 dl_1 = \rho_2 S_2 dl_2$$

Où :

$\rho_1$ la masse volumique du fluide à l'entrée.

$\rho_2$ la masse volumique du fluide à la sortie.

Divisons les deux termes par dt non nul:

$$\rho_1 S_1 \frac{dl_1}{dt} = \rho_2 S_2 \frac{dl_2}{dt} \quad \text{avec} \quad \frac{dl_1}{dt} = V_1 \quad \text{et} \quad \frac{dl_2}{dt} = V_2$$

L'expression générale du principe de conservation de la masse est:

$\rho_1$ **$S_1$ $V_1$** = $\rho_2$ **$S_2$ $V_2$,** puisque le fluide est incompressible : $\rho_1 = \rho_2 = \rho$.

On peut simplifier et aboutir à l'équation de continuité suivante :

$$S_1 . V_1 = S_2 . V_2$$

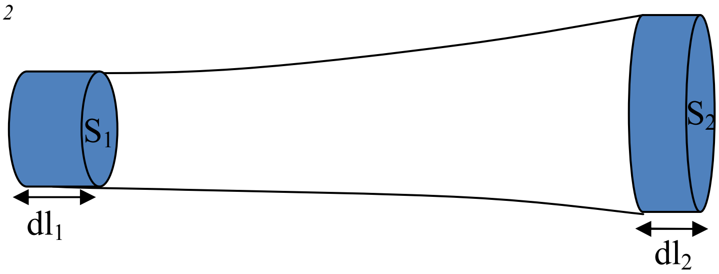



**Figure III.2 : Tube de courant**

**III.3.1 Débit massique.**

On appelle débit massique la quantité Qm = ρS1 V1 = dm/dt représentant la masse de fluide traversant la section S1 de la veine fluide par unité de temps. Unité le kg/s

**III.3.2. Débit volumique.**

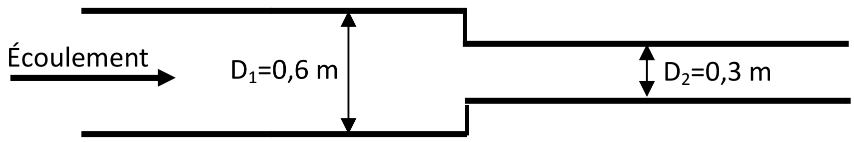
On appelle débit volumique Qv le volume de fluide traversant une section S par unité de temps soit: Qv=dV/dt=Sdl/dt=S.V (souvant on note débit volumique par Q)

**Exemple**

Dans un systéme de distribution d'eau potable, la vitesse maximale ne doit pas excéder 3,0 m/s. si cette condition est respectée dans la premiére conduite de diamétre $D_1$ =0,6 m, le sera-t-elle dans la seconde conduite de diamétre $D_2$ =0,3m.

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2 = \frac{1}{4}\ donc\ V_2 = 4V_1 = 12\,m/s$$

*Cette vitesse est supérieur à la limite permise*




### III.4 Equation de Bernoulli

Considérons une masse de fluide représentée dans la figure ci-dessous. Le volume de cette masse est $dA\ ds$

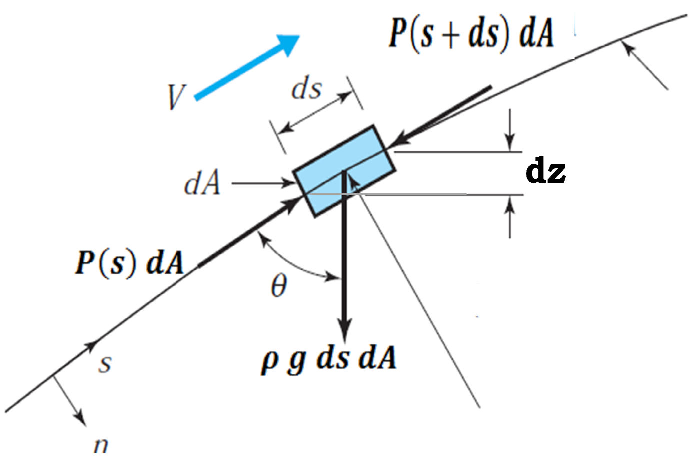



**Figure III.3 : Systéme de force sur un élément de fluide**

La relation fondamentale de la dynamique (où la 2ième loi de newton) suivant la direction s s'écrit :

$$\sum \overrightarrow{F_s} = dm\,\overrightarrow{a_s} \Rightarrow P(s)dA - P(s+ds)dA - \rho g ds dA\ \cos\theta = \rho ds dA \frac{dV}{dt}$$

On a :

$$\cos\theta = \frac{dZ}{ds}$$

Alors :

$$P(s)dA - P(s+ds)dA - \rho g ds dA\ \frac{dZ}{ds} = \rho ds dA \frac{dV}{dt}$$

Devisée cette équation par $ds\ dA$:

$$\frac{P(s)-P(s+ds)}{ds}-\rho g\frac{dZ}{ds}=\rho\frac{dV}{dt}\Rightarrow-\frac{dP}{ds}-\rho g\frac{dZ}{ds}=\rho\frac{dV}{dt}$$

Multipliée cette équation par ds :

$$-dP-\rho g dZ=\rho ds\frac{dV}{dt}$$

On pose :

$$V=\frac{ds}{dt}$$

On trouve :

$$dP+\rho V dV+\rho g dZ=0\Rightarrow dP+\rho d\frac{V^2}{2}+\rho g dZ=0$$

Devisée la dernière équation par ρg, on trouve :

$$\frac{dP}{\rho g}+d\frac{V^2}{2g}+dZ=0$$

Donc :

$$d\left(\frac{P}{\rho g}+\frac{V^2}{2g}+Z\right)=0\Rightarrow\frac{P}{\rho g}+\frac{V^2}{2g}+Z=cte=H\ \ (unité=m)$$

C'est l'équation de Bernoulli pour un fluide parfait incompressible soumis à la seule action de la gravité en mouvement permanent. La constante H a une dimension d'une hauteur, elle représente la charge totale de l'écoulement (ou l'énergie de l'écoulement). La hauteur H est composée de :

$$\frac{P}{\rho g}=hauteur\ due\ à\ la\ pression;$$

$$\frac{V^2}{2g}=hauteur\ dynamique;$$

$$Z=côte;$$

Entre deux points d'une même ligne de courant, la relation de Bernoulli s'écrit :

$$\frac{P_1}{\rho g}+\frac{V_1^2}{2g}+Z_1=\frac{P_2}{\rho g}+\frac{V_2^2}{2g}+Z_2$$

L'équation de Bernoulli peut s'écrit sous une autre formes :

$$P_1+\rho\frac{V_1^2}{2}+\rho g Z_1=P_2+\rho\frac{V_2^2}{2}+\rho g Z_2\ (unité: Pa)$$

$$\frac{P_1}{\rho}+\frac{V_1^2}{2}+gZ_1=\frac{P_2}{\rho}+\frac{V_2^2}{2}+gZ_2\ (unité: J/kg)$$

### III.5 Applications du théorème de Bernoulli

#### III.5.1 Vidange d'un réservoir (théorème de Torricelli)

Une des applications les plus simples du théorème de Bernoulli est celle conduisant à la vitesse de vidange d'un réservoir à surface libre par un orifice de section très petite devant celle du réservoir.

Appliquons l'équation de Bernoulli entre 1 et 2:

$$\frac{P_1}{\rho g}+\frac{V_1^2}{2g}+Z_1=\frac{P_2}{\rho g}+\frac{V_2^2}{2g}+Z_2$$

On a :

$P_1=P_2=P_{atm}$

$Z_1-Z_2=h$

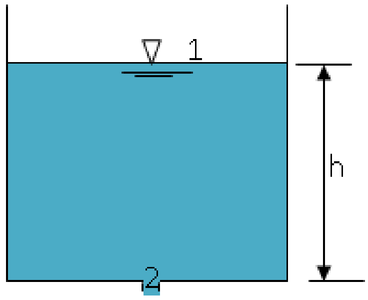


Figure III.4: Vidange d'un réservoir

Le réservoir étant grand, la vitesse de descente du niveau de la surface libre peut être considérée comme négligeable devant celle du fluide s'écoulant dans le jet :

$V_1 \ll V_2$

D'où la **formule de Torricelli** reliant la vitesse de sortie à la hauteur h de liquide au dessus de l'orifice :

$$V_2=\sqrt{2gh}$$

#### III.5.2 Tube de Venturi

Le tube de venturi a pour but de mesurer le débit à partir de la détermination de la différence de pression. Ce dispositif consiste à faire passer un écoulement par une contraction pour qu'il y'aura une diminution de pression.

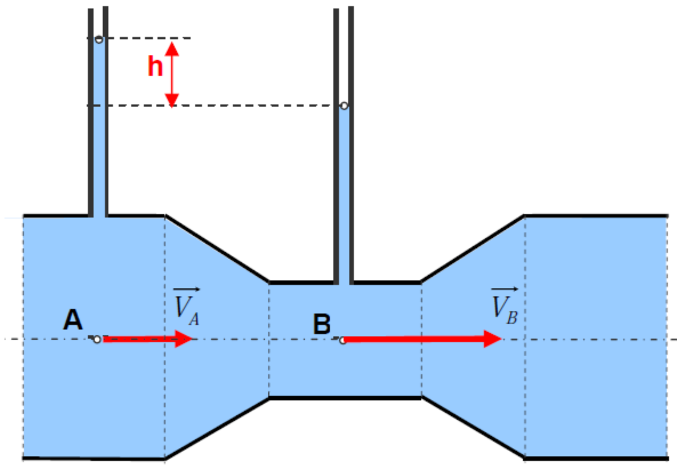



**Figure III.5 : Tube de Venturi**

L'équation de Bernoulli entre A et B est:

$$\frac{P_A}{\rho g}+\frac{V_A^2}{2g}+Z_A=\frac{P_B}{\rho g}+\frac{V_B^2}{2g}+Z_B$$

On a :

$Z_A=Z_B$ (même niveau)

$V_A\ S_A=V_B\ S_B$ (équation de continuité)

L'équation hydrostatique entre A et B : $P_A-P_B=\rho gh$

En combinant ces équations, on obtient une équation de la vitesse à la section d'étranglement :

$$V_B=\sqrt{\frac{2gh}{\left[1-\left(\frac{S_B}{S_A}\right)^2\right]}}$$

Et le débit serait :

$$Q=V_BS_B$$

Ce débit est considéré comme un débit théorique, car le fluide est supposé parfait. Le débit réel est obtenu en multipliant le débit théorique par un coefficient correcteur qui prend en considération la perte d'énergie dans le venturi, ce coefficient est appelé coefficient de débit $C_d$.

$$Q=C_dV_BS_B$$

### III.5.3 Tube de Pitot

Un tube de Pitot, souvent simplement appelé 'Pitot' est l'appareil le plus couramment utilisé pour faire des mesures de vitesse dans divers écoulements. L'appareil est nommé en l'honneur de son inventeur, Henri de Pitot qui testa l'appareil dans la Seine pour la première fois en août 1732.

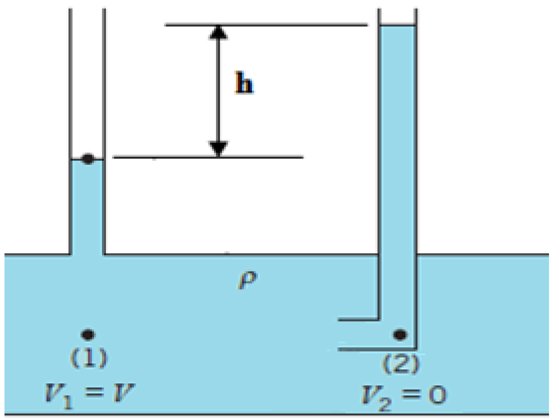



**Figure III.6 : Tube de Pitot**

Le principe est basé sur la mesure de la pression statique et de la pression dynamique en un point d'un écoulement.

L'équation de Bernoulli entre 1 et 2 s'écrit:

$$\frac{P_1}{\rho g}+\frac{V_1^2}{2g}+Z_1=\frac{P_2}{\rho g}+\frac{V_2^2}{2g}+Z_2$$

On a :

$Z_1=Z_2$ (même niveau)

$V_2=0$ ( point 2 est un point d'arrêt c-à-d est un obstacle)

L'équation hydrostatique donne : $P_1-P_2=\rho g h$

D'où l'expression de la vitesse du fluide dans la canalisation :$V_1=\sqrt{2gh}$

**III.6 Théorème d'Euler**

La connaissance des forces exercées par les fluides en mouvement est d'une importance considérable dans l'analyse et la conception d'objets tel que les pompes, les turbines, les avions …etc. L'équation d'énergie n'est pas suffisante pour résoudre la plupart des ces problèmes. Le théorème d'Euler résulte de l'application du théorème de quantité de mouvement à l'écoulement d'un fluide :

$$\sum F_{ex}=\frac{d(dm)\vec{V}}{dt}=dm\frac{d\vec{V}}{dt}$$

Où $dm$ est la masse du fluide contenu dans l'enveloppe limitée par $S_1$ et $S_2$, on sait que le débit massique égale à:

$$Q_m=\frac{dm}{dt}$$

Donc, le théorème d'Euler s'écrit

$$\sum F_{ex}=Q_m d\vec{V}=Q_m\left(\vec{V_2}-\vec{V_1}\right)=\rho Q\left(\vec{V_2}-\vec{V_1}\right)$$

Où

$\vec{V_1}\ est\ la\ vitesse\ du\ fluide\ qui\ entre\ en\ S_1$

$\vec{V_2}\ est\ la\ vitesse\ du\ fluide\ qui\ sort\ en\ S_2$

**Enoncé :**

La résultante (ΣFext) des actions mécaniques extérieures exercées sur un fluide isolée (contenu dans l'enveloppe limitée par $S_1$ et $S_2$) est égale à la variation de la quantité du mouvement qui entre en $S_1$ à une vitesse $V_1$ et sort par $S_2$ à une vitesse $V_2$:

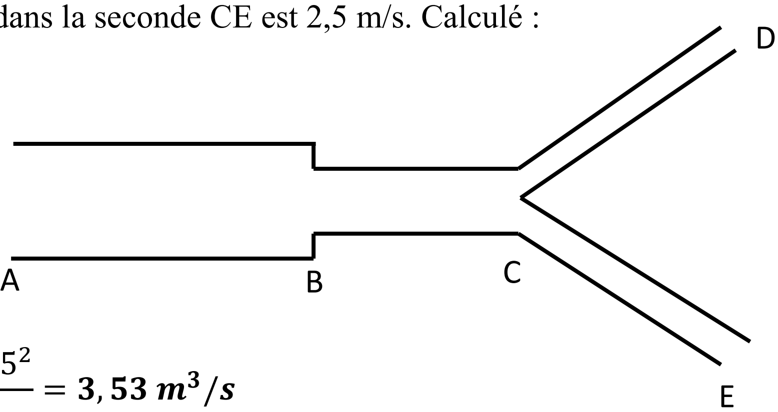
$$\boldsymbol{\sum F_{ex}=\rho Q\left(\vec{V_2}-\vec{V_1}\right)}$$

## Exercices

**Exercice N°1 :**

De l'eau s'écoule à une vitesse uniforme de *2 m/s* dans une conduite *AB* de $d_1$=*1,5 m* de diamètre reliée à une conduite BC de $d_2$=1,2 m de diamètre. Au point C la conduite se sépare en deux parties. La première CD a un diamètre de $d_3$=0,8 m et transporte le tiers de l'écoulement total. La vitesse dans la seconde CE est 2,5 m/s. Calculé :

1. Le débit dans AB ;
2. La vitesse dans BC ;
3. La vitesse dans CD ;
4. Le diamètre CE.




**Solution :**

$$Q = V.S = V\frac{\pi d_1^2}{4} = 2\ \frac{3{,}14\ 1{,}5^2}{4} = \mathbf{3{,}53\ m^3/s}$$

$$Q = V_{BC}.S_{BC} \Rightarrow V_{BC} = \frac{4Q}{\pi D d_2^2} = \frac{4\ \ 3{,}53}{3{,}14\ 1{,}2^2} = \mathbf{3{,}12\ m/s}$$

$$Q_{CD} = \frac{Q}{3} = 1{,}176\ m^3/s \Rightarrow V_{CD} = \frac{4Q_{CD}}{\pi D d_3^2} = \frac{4\ 1{,}176}{3{,}14\ 0{,}8^2} = \mathbf{2{,}34\ m/s}$$

$$Q = Q_{CD} + Q_{CE} \Rightarrow Q_{CE} = \frac{2}{3}\ Q = \mathbf{2{,}354\ m^3/s}$$

$$Q_{CE} = V_{CE}\frac{\pi d_4^2}{4} \Rightarrow d_4 = \sqrt{\frac{4\ Q_{CE}}{\pi V_{CE}}} = \mathbf{1{,}095\ m}$$

**Exercice N°2 :**

Le réservoir de la figure ci-dessous se vidange à l'aide de deux sorties. Le diamètre de la sortie 2 et 3 sont respectivement $d_2$=10 cm et $d_3$=7 cm.

1. Calculer la variation de niveau de la surface libre (dh/dt) en fonction de $Q_2$ , $Q_3$ et le diamètre du réservoir ;
2. Pour le cas h est constante, déterminer la vitesse $V_3$ si $V_2$= 2m/s et $Q_1$= 0,05m$^3$/s.

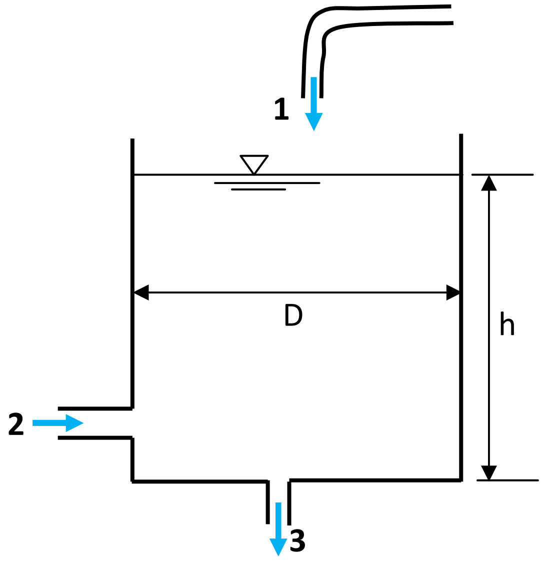
**Solution :**

1. On appelle $Q_r$ le débit de remplissage du réservoir est égale :

$$Q_r = Q_1 + Q_2 - Q_3 \Rightarrow \frac{\pi D^2}{4}\frac{dh}{dt} = Q_1 + Q_2 - Q_3$$

Alors :

$$\frac{dh}{dt} = \frac{Q_1 + Q_2 - Q_3}{\left(\frac{\pi D^2}{4}\right)}$$




2. $V_3$= ?

Si h est constant alors :

$$Q_3 = Q_1 + Q_2$$

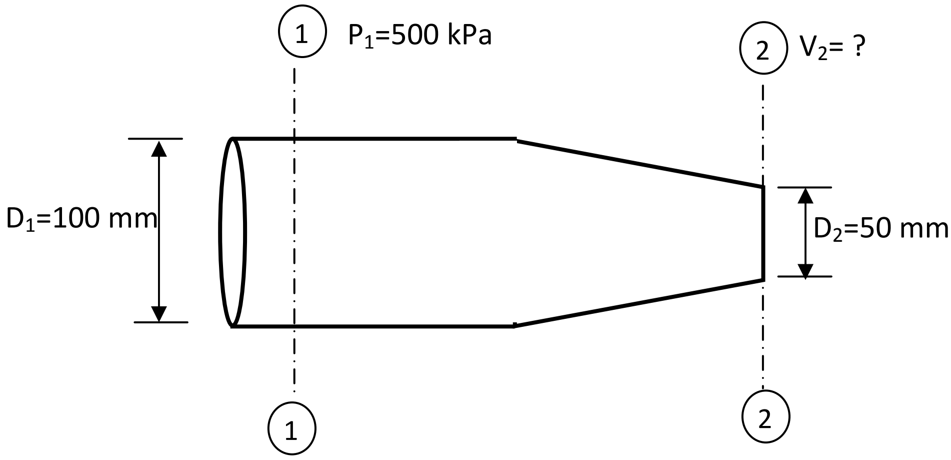
$$V_3 \frac{\pi d_3^2}{4} = Q_1 + V_2 \frac{\pi d_2^2}{4}$$

$$V_3 \frac{\pi 0{,}07^2}{4} = 0{,}05 + 2\frac{\pi 0{,}1^2}{4}$$

$$V_3 = \mathbf{4{,}13\ m/s}$$

**Exercice N°3 :**

Une buse est connectée à un tuyau comme l'indique la figure ci-dessous. La pression au point 1 est 500 kPa (manométrique), déterminer la vitesse du jet.




**Solution :**

Appliquons l'équation de Bernoulli entre 1 et 2 :

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2$$

$P_1$=500 kPa et $P_2$= Patm (négligeable)

$Z_1$=$Z_2$

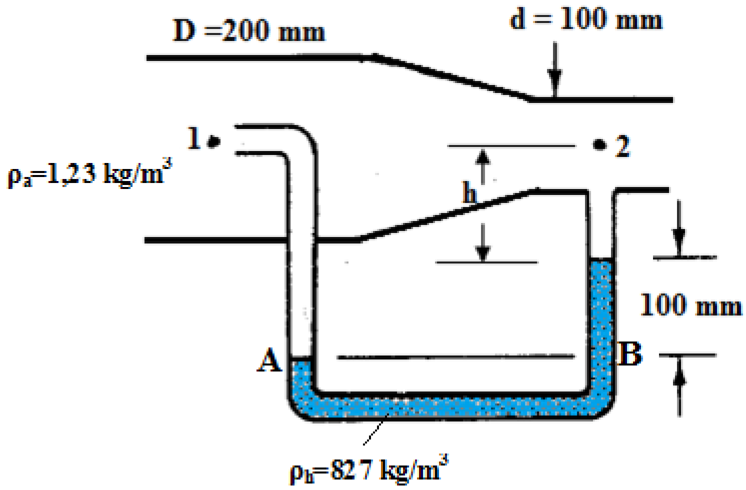
L'équation de continuité s'écrit :

$$Q = V_1 S_1 = V_2 S_2 \Rightarrow V_1 = V_2 \frac{d_2^2}{d_1^2} = \frac{V_2}{4}$$

$$\frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_2^2}{32g} = \frac{P_1}{\rho g} \Rightarrow V_2 = \sqrt{\frac{16}{15}\left(\frac{2P_1}{\rho}\right)} = \mathbf{32{,}66\ m/s}$$

**Exercice N°4 :**

Un gaz s'écoule à travers une conduite schématisée par la figure ci-dessous. A partir des données de la figure, déterminer le débit d'écoulement du gaz.




**Solution :**

Appliquons l'équation de Bernoulli entre 1 et 2 :

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2$$

On a :

$Z_1$=$Z_2$ (même niveau)

$V_1$=0 ( point 1 est un point d'arrêt c-à-d est un obstacle), on trouve :

$$V_2 = \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho_a}}$$

L'équation hydrostatique entre A et 1 et entre B et 2 :

$$P_A = P_1 + \rho_a g(h + 0{,}1)$$

$$P_B = P_2 + \rho_h g(0{,}1) + \rho_a gh$$

Ainsi :

$P_A = P_B$ (même niveau, même liquide)

Alors :

$$P_1 + \rho_a g(h + 0{,}1) = P_2 + \rho_h g(0{,}1) + \rho_a gh \Rightarrow P_1 - P_2 = (\rho_h - \rho_a)g\ 0{,}1$$

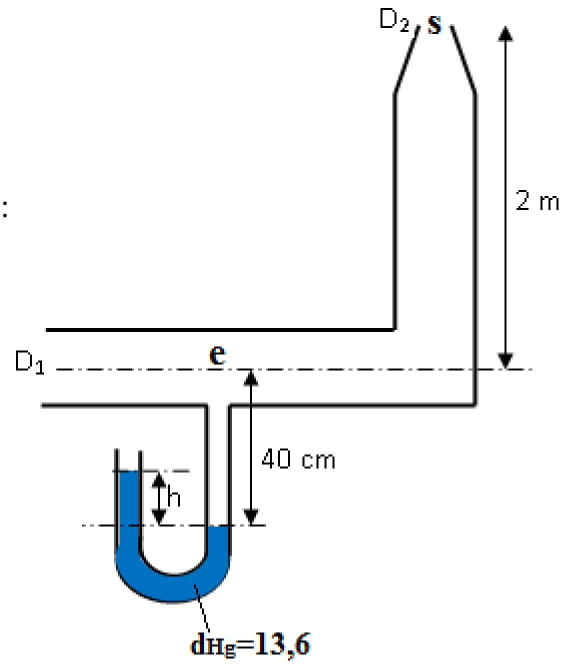
$$V_2 = \sqrt{\frac{2(\rho_h - \rho_a)g\ 0{,}1}{\rho_a}} = \sqrt{\frac{2(827 - 1{,}23)g\ 0{,}1}{1{,}23}} = \mathbf{36{,}3 m/s}$$

$$Q = V_2\, S_2 = V_2 \frac{\pi d^2}{4} = \mathbf{0{,}285\ m^3/s}$$

**Exercice N°5**

De l'eau circule dans un coude et sort sous forme de jet vers le haut à travers une buse (figure 5). Un manomètre à mercure est placé en un point de la tuyauterie horizontale, en amont du coude. On négligera le frottement dans le fluide. Calculer l'élévation h du mercure.

On donne $D_1$= 9cm, $D_2$ =3cm, Ve=0,5 m/s




**Solution :**

Appliquons l'équation de Bernoulli entre **e** et **s** :

$$\frac{P_e}{\rho g}+\frac{V_e^2}{2g}+Z_e=\frac{P_s}{\rho g}+\frac{V_s^2}{2g}+Z_s$$

$$Z_e=0\,,Z_s=2\,m$$

$$P_s=Patm\ (négligeable)$$

$$\frac{P_e}{\rho g}=Z_s-\frac{V_e^2}{2g}+\frac{V_s^2}{2g}$$

$$Q=V_eS_e=V_sS_s\Rightarrow V_s=V_e\frac{D_1^2}{D_2^2}$$

$$\frac{P_e}{\rho g}=Z_s+\frac{V_e^2}{2g}\left(\frac{D_1^4}{D_2^4}-1\right)=3{,}02m$$

Par application de la loi de l'hydrostatique dans le manomètre

$$P_e=\rho_{Hg}gh-\rho g\,0{,}4$$

$$\frac{P_e}{\rho g}=\left(d_{Hg}h-0{,}4\right)=3{,}02m\Rightarrow h=\frac{0{,}4+3{,}02}{d_{Hg}}=\mathbf{0{,}25m}$$

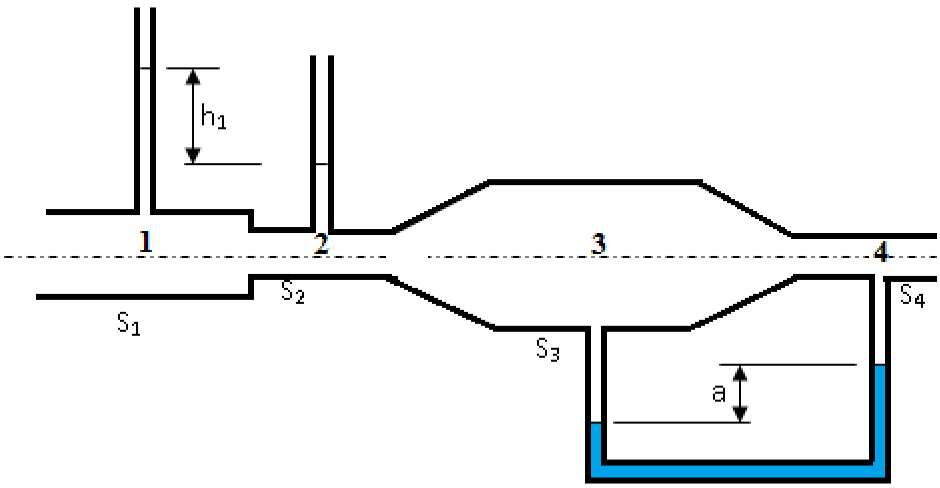
**Exercice N°6 :**

Dans une conduite composée de 04 tronçons de section $S_1$, $S_2$, $S_3$ et $S_4$, s'écoule de l'eau en écoulement permanent. En considérant le fluide est parfait, calculer :

1. Les vitesses d'écoulement de l'eau dans chaque tronçon ;
2. La dénivellation (a) indiquée par le manomètre à mercure.

Données :

$h_1$=1,25m , $S_1$=60 $cm^2$, $S_2$=10 $cm^2$ $S_3$=80 $cm^2$ $S_4$=5 $cm^2$, $\rho_{Hg}$=13600 kg/$m^3$




**Solution:**

**1. Les vitesses d'écoulement de l'eau dans chaque tronçon ;**

Appliquons l'équation de Bernoulli entre 1 et 2 :

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2$$

On a :

$Z_1 = Z_2$ (même niveau)

L'équation de continuité s'écrit :

$$Q = V_1 S_1 = V_2 S_2 \Rightarrow V_1 = V_2 \frac{S_2}{S_1} = \frac{V_2}{6}$$

L'application de la loi de l'hydrostatique dans les deux piézomètres donne :

$$P_1 - P_2 = \rho g\, h_1$$

$$\frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_1 - P_2}{\rho g} \Rightarrow V_2^2 - \frac{V_2^2}{36} = 2\frac{P_1 - P_2}{\rho} = 2gh_1$$

**Donc :**

$$V_2 = \sqrt{\frac{72}{35} g h_1} = \mathbf{5,02\ m/s}$$

$$V_1 = \frac{V_2}{6} = \mathbf{0,836\ m/s}$$

$$V_1 S_1 = V_3 S_3 \Rightarrow V_3 = \frac{V_1 S_1}{S_3} = \mathbf{0,627\ m/s}$$

$$V_1 S_1 = V_4 S_4 \Rightarrow V_4 = \frac{V_1 S_1}{S_4} = \mathbf{10,032\ m/s}$$

**2. La dénivellation (a) indiquée par le manomètre à mercure.**

Appliquons l'équation de Bernoulli entre 3 et 4 :

$$\frac{P_3}{\rho g}+\frac{V_3^2}{2g}+Z_3=\frac{P_4}{\rho g}+\frac{V_4^2}{2g}+Z_4$$

On a :

$Z_3$=$Z_4$ (même niveau)

$$\frac{P_3-P_4}{\rho g}=\frac{V_4^2}{2g}-\frac{V_3^2}{2g}=\mathbf{5,11\ m}$$

L'application de la loi de l'hydrostatique dans le manomètre donne :

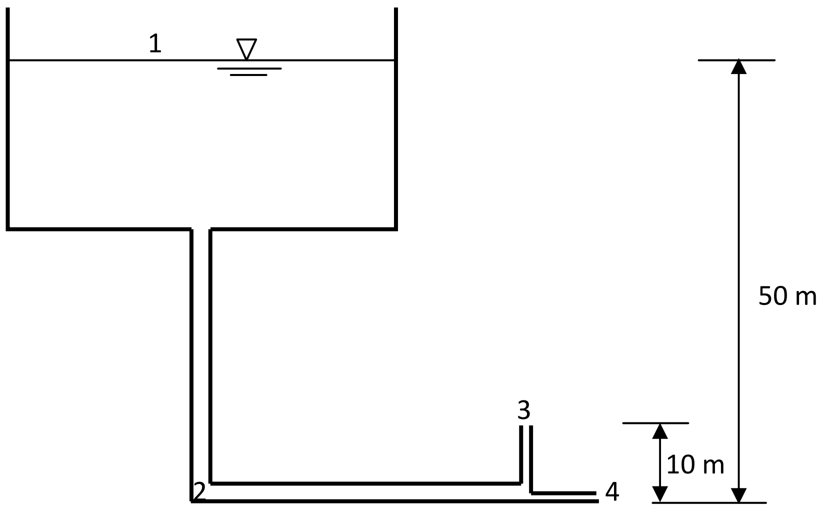
$$P_3-P_4=(\rho_{Hg}-\rho)g\ a\Rightarrow\frac{P_3-P_4}{\rho g}=\frac{(\rho_{Hg}-\rho)a}{\rho}=5{,}11\ m$$

Alors :

$$\boldsymbol{a=0,405\ m}$$

**Exercice N°7 :**

Le schéma de la figure ci-dessous représente un château d'eau et son système de distribution. La canalisation principale a un diamètre égal à $d_2$=500 mm. Le diamètre de la canalisation de distribution n° 3 et n°4 sont égal à $d_3$=200 mm et à $d_4$=300 mm. Les deux sorties sont à la pression atmosphérique. Déterminer les différents débits et la pression au point 2.




**Solution :**

Appliquons l'équation de Bernoulli entre 1 et 4 puis entre 1 et 3 :

$$\frac{P_1}{\rho g}+\frac{V_1^2}{2g}+Z_1=\frac{P_4}{\rho g}+\frac{V_4^2}{2g}+Z_4$$

$$\frac{P_1}{\rho g}+\frac{V_1^2}{2g}+Z_1=\frac{P_3}{\rho g}+\frac{V_3^2}{2g}+Z_3$$

On a :

$P_1=P_4=P_3=Patm$

$Z_1=50$ m , $Z_3=10$ m et $Z_4=0$ m

$V_1=0$ (réservoir de grande dimension)

On trouve :

$$V_3=\sqrt{2g(Z_1-Z_3)}=\mathbf{28,014\ m/s}$$

$$V_4=\sqrt{2gZ_1}=\mathbf{31,32\ m/s}$$

Donc

$$Q_3=V_3S_3=V_3\,\frac{\pi d_3^2}{4}=\mathbf{0,88\ m^3/s}$$

$$Q_4=V_4S_4=V_4\,\frac{\pi d_4^2}{4}=\mathbf{2,21\ m^3/s}$$

$$Q_2=Q_3+Q_4=\mathbf{3,09\ \ m^3/s}$$

Pour calculer la pression au point 2, on applique Bernoulli entre 1 et 2 :

$$\frac{P_1}{\rho g}+\frac{V_1^2}{2g}+Z_1=\frac{P_2}{\rho g}+\frac{V_2^2}{2g}+Z_2$$

On a :

$P_1=Patm$

$Z_1=50$ m , et $Z_2=0$ m

$V_1=0$ (réservoir de grande dimension)

$$V_2=\frac{Q_2}{S_2}=\frac{4Q_2}{\pi d_2^2}=\mathbf{15,74\ m/s}$$

On trouve :

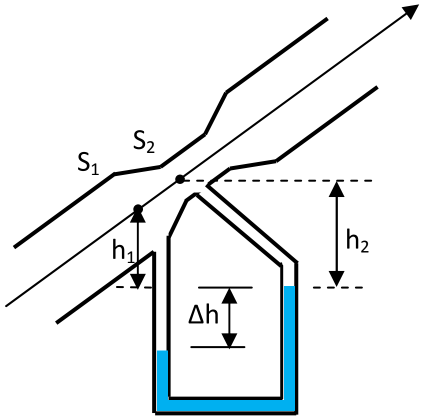
$$\frac{P_2}{\rho g}=Z_1-\frac{V_2^2}{2g}=\mathbf{37,37\ m}$$

$$P_2=1000\ 9{,}81\ 37{,}37=\mathbf{366,6kPa}$$

**Exercice N°8 :**

Le fluide en écoulement dans un venturi incliné est une huile incompressible de masse volumique $\rho_h$ =820 kg/m$^3$ . La section $S_1$ d'entrée dans le venturi est caractérisée par son diamètre $D_1$ =125mm. La seconde prise de pression statique est en section $S_2$ où le diamètre est $D_2$=50mm. A l'intérieur du tube en U où aboutissent les prises de pression est placé un fluide de mesure de masse volumique $\rho_{Hg}$=13600 kg/m$^3$ (mercure). L'inclinaison du tube et les différentes cotes de niveaux sont repérés par rapport à une base horizontale arbitraire.

Calculer la valeur du débit Q lorsque la dénivellation observée dans le tube en U est $\Delta h$=200 mm. On prendra g=9.81ms$^{-2}$




**Solution :**

Appliquons l'équation de Bernoulli entre 1 et 2 :

$$\frac{P_1}{\rho g}+\frac{V_1^2}{2g}+Z_1=\frac{P_2}{\rho g}+\frac{V_2^2}{2g}+Z_2$$

On a :

$Z_1=h_1$ et $Z_2=h_2$

L'application de la loi de l'hydrostatique dans le manomètre donne :

$$\frac{P_1-P_2}{\rho g}=h_2-h_1+\Delta h\left(\frac{\rho_{Hg}-\rho}{\rho}\right)$$

Alors :

$$\frac{V_2^2-V_1^2}{2g}=\frac{P_1-P_2}{\rho g}+h_1-h_2=\Delta h\left(\frac{\rho_{Hg}-\rho}{\rho}\right)$$

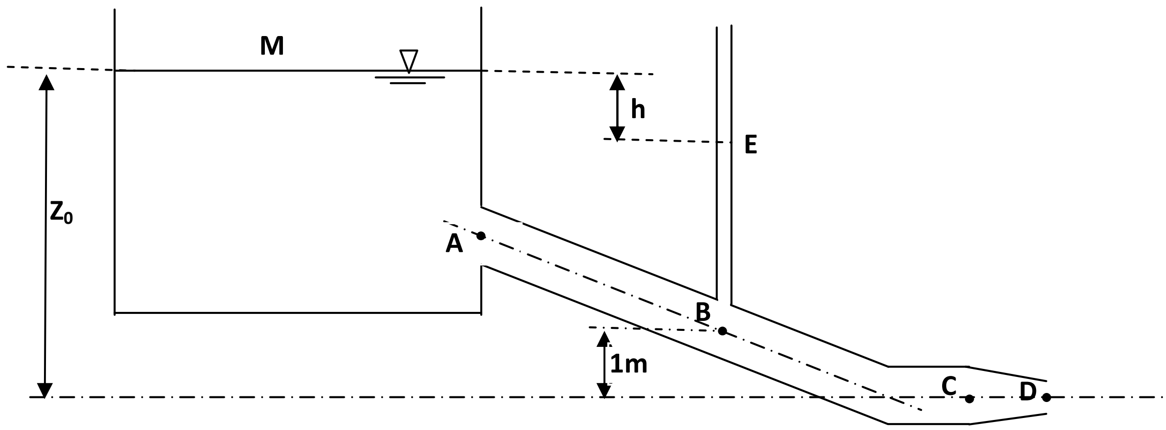
$$Q^2\left(\frac{16}{\pi^2 D_2^4}-\frac{16}{\pi^2 D_1^4}\right)=\Delta h\left(\frac{\rho_{Hg}-\rho}{\rho}\right)$$

$$Q=\frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{D_2^4}-\frac{1}{D_1^4}}}\sqrt{\Delta h\left(\frac{\rho_{Hg}-\rho}{\rho}\right)}=\mathbf{0{,}0156}\ \boldsymbol{m^3/s}$$

**Exercice 9 :**

Dans la figure ci-dessous, R est un réservoir à grandes dimensions rempli d'eau, et dont le niveau $Z_0$=4m. AC est une conduite de diamètre D=5 cm. En C se trouve une courte tuyère de diamètre de sortie d=2,0 cm. C et D sont sur la même horizontale. L'eau sort de D à l'air libre. Un tube est placé en B (piézomètre) en liaison avec la conduite. Le liquide est parfait.

1. calculer la vitesse $V_D$ de l'eau à la sortie de la tuyère .
2. Calculer le débit Q
3. En déduire la vitesse V dans la conduite AC.
4. Calculer la pression en B
5. Déterminer la différence des niveaux h entre les surfaces libres du réservoir et du tube




**Solution :**

1. **Vitesse de sortie $V_D$**

   Appliquons l'équation de Bernoulli entre M et D :

   $$\frac{P_M}{\rho g}+\frac{V_M^2}{2g}+Z_M=\frac{P_D}{\rho g}+\frac{V_D^2}{2g}+Z_D$$

   $P_M=P_D=P_{atm}$

   $V_M=0$ (réservoir de grande dimension)

   $Z_M=Z_0=4m$ et $Z_D=0.0$

   $$V_D=\sqrt{2g\,Z_0}=\sqrt{2\,9{,}81\,4}=\mathbf{8{,}859\,m/s}$$

2. **Débit Q**

   $$Q=V_DS_D=\frac{\pi\,0.02^2}{4}8{,}859=\mathbf{0{,}0028\ m^3/s}$$

3. **Vitesse $V_C$**

   $$Q=V_DS_D=V_CS_C$$

   $$V_C=V_D\frac{d_2^2}{d_1^2}=8.859\left(\frac{0{,}02}{0{,}05}\right)^2=\mathbf{1{,}417\,m/s}$$

4. **Pression $P_B$**

Appliquons l'équation de Bernoulli entre B et M :

$$\frac{P_M}{\rho g}+\frac{V_M^2}{2g}+Z_M=\frac{P_B}{\rho g}+\frac{V_B^2}{2g}+Z_B$$

Origine de pression = Patm

$Z_M=Z_0=4m$, $Z_B=1{,}0$ m, $V_B=V_C=1{,}417$ m/s et $V_M=0{,}0$ m/s

$$\frac{P_B}{\rho g}=Z_0-Z_B-\frac{V_B^2}{2g}=4-1-\frac{1.417^2}{2\,9{,}81}=\mathbf{2{,}897\ m}$$

$\boldsymbol{P_B = 1000\ 9,81\ 2,897 = 28419,57\ Pa}$ (pression manométrique)

**5. La hauteur h**

Par application de la loi de l'hydrostatique dans le piézomètre

$$P_B = \rho g\,(Z_0 - Z_B - h) \Rightarrow \frac{P_B}{\rho g} = (Z_0 - Z_B - h)$$

Alors

$$(Z_0 - Z_B - h) = Z_0 - Z_B - \frac{V_B^2}{2g} \Rightarrow h = \frac{V_B^2}{2g} = \mathbf{0,102}\boldsymbol{m}$$

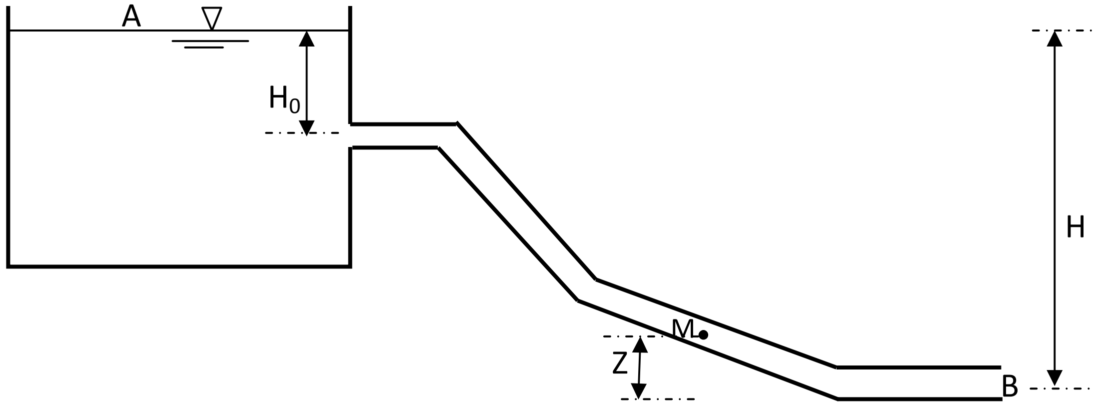
**Exercice N°10 :**

Une conduite amène de l'eau d'un barrage vers une station de traitement. La conduite cylindrique, de diamètre constant D = 30,0 cm et de longueur L = 200 m, se termine horizontalement, son axe étant situé à H = 120 m au-dessous de la surface libre de l'eau dans le barrage de très grande capacité. Le départ de la conduite est à H0 = 20 m au dessous du niveau pratiquement constant. On néglige tout frottement et on prendra les valeurs numériques suivantes :

g = 9.81 m.s-2, $\rho$ = 1000 kg.m$^{-3}$, patm = 1,01 bar.

Pression de vapeur saturante de l'eau Pv= 23 mbar

1. Calculer la vitesse à la sortie A et le débit à la sortie ;
2. Déterminer littéralement la pression $P_M$ au point M de côte Z ; pour quelles valeurs de Z la pression de l'eau devient-elle inférieure à la pression saturante de l'eau ? Quel serait le phénomène observé pour cette valeur limite de Z ?
3. Pour éviter ce problème dans la conduite, on dispose à l'extrémité A de la conduite une tubulure de section décroissante (injecteur), de diamètre de sortie d et d'axe horizontal. Décrire l'évolution de la pression à l'intérieur de la conduite.



**Solution :**

1. **Vitesse de sortie $V_B$ et le débit**

Appliquons l'équation de Bernoulli entre A et B :

$$\frac{P_A}{\rho g}+\frac{V_A^2}{2g}+Z_A=\frac{P_B}{\rho g}+\frac{V_B^2}{2g}+Z_B$$

$P_A=P_B=P_{atm}$

$Z_B=0$ m   $Z_A=H$

$V_A=0$ (réservoir de grande dimension)

$$V_B=\sqrt{2g\ H}=\sqrt{2\ 9{,}81\ 120}=\boldsymbol{48{,}52m/s}$$

$$Q=V_BS_B=\frac{\pi\ 0{,}3^2}{4}48{,}52=\boldsymbol{3{,}43\ m^3/s}$$

2. **La pression $P_M$ au point M de côte Z**

Appliquons l'équation de Bernoulli entre B et M :

$$\frac{P_M}{\rho g}+\frac{V_M^2}{2g}+Z_M=\frac{P_B}{\rho g}+\frac{V_B^2}{2g}+Z_B$$

$P_B=$ Patm

$Z_B=0$ m   $Z_M=Z$

$V_B=V_M$

$$\frac{P_M}{\rho g}=\frac{P_{atm}}{\rho g}-Z\Rightarrow P_M=P_{atm}-\rho gZ$$

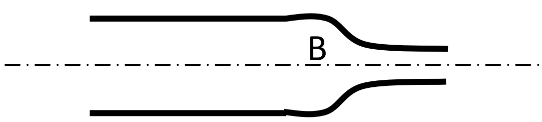
$$P_M\leq P_v\Rightarrow P_{atm}-\rho gZ\leq 0{,}023\ 10^5$$

$$Z\geq\frac{(1{,}013-0{,}023)10^5}{1000\ 9{,}81}=\boldsymbol{10{,}092\ m}$$

Pour ces valeurs de z égales ou plus grandes que 10,092 m, il y a cavitation c'est-à-dire l'eau passera de la phase liquide à la phase vapeur. L'écoulement à ce moment – là sera perturbé et ne se fera plus.

3. **Effet de l'injecteur**

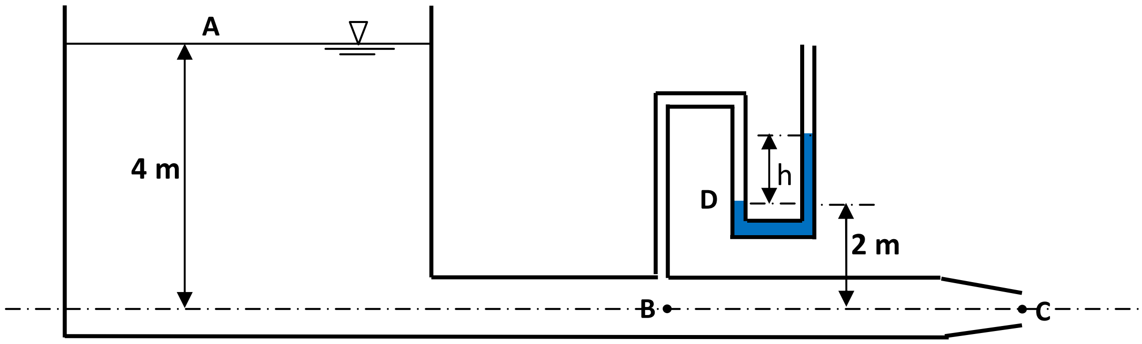
Le fait de placer un injecteur en bout de conduite a pour but de remonter la pression en amont, à l'intérieur de la conduite et ce, en réduisant le débit.



**Exercice N°11 :**

Dans la figure ci-dessous, R est un réservoir à grandes dimensions rempli d'eau, et dont le niveau $Z_0$=4m. AC est une conduite de diamètre D=5 cm. En C se trouve une courte tuyère de diamètre de sortie d=2,0 cm. C et D sont sur la même horizontale. L'eau sort de D à l'air libre. Un manomètre à mercure est placé en B en liaison avec la conduite. Le liquide est parfait.

1. Calculer la vitesse $V_C$ de l'eau à la sortie de la tuyère.
2. Calculer le débit Q
3. En déduire la vitesse V dans le point B.
4. déterminer la pression en B et déduire l'élévation h du mercure dans le manomètre.




**Solution :**

**1. Vitesse de sortie $V_C$**

Appliquons l'équation de Bernoulli entre A et C :

$$\frac{P_A}{\rho g}+\frac{V_A^2}{2g}+Z_A=\frac{P_C}{\rho g}+\frac{V_C^2}{2g}+Z_C$$

$P_A$=$P_C$=Patm

$Z_C$=0 m   $Z_A$=$Z_0$= 4 m

$V_A$=0 (réservoir de grande dimension)

$$V_C=\sqrt{2g\,Z_0}=\sqrt{2\;9{,}81\;4}=\mathbf{8{,}859}\boldsymbol{m/s}$$

**2. Débit Q**

$$Q=V_C S_C=\frac{\pi\;0.02^2}{4}8{,}86=\mathbf{0{,}0028}\;\boldsymbol{m^3/s}$$

**3. Vitesse $V_B$**

$$Q=V_B S_B=V_C S_C$$

$$V_B=V_C\frac{d^2}{D^2}=8{,}859\left(\frac{0{,}02}{0{,}05}\right)^2=\mathbf{1{,}417}\boldsymbol{m/s}$$

### 4. La pression $P_B$

Appliquons l'équation de Bernoulli entre A et B :

$$\frac{P_A}{\rho g}+\frac{V_A^2}{2g}+Z_A=\frac{P_B}{\rho g}+\frac{V_B^2}{2g}+Z_B$$

Origine de pression = Patm

$Z_B$=0 m   $Z_A$=$Z_0$= 4 m

$V_A$=0 et $V_B$=1,417 m/s

$$\frac{P_B}{\rho g}=Z_A-\frac{V_B^2}{2g}=\mathbf{3,897\ m}$$

Par application de la loi de l'hydrostatique dans le manomètre :

$$P_B=\rho g\,2+\rho_{Hg}h\Rightarrow\frac{P_B}{\rho g}=2+d_{Hg}h=3{,}897$$

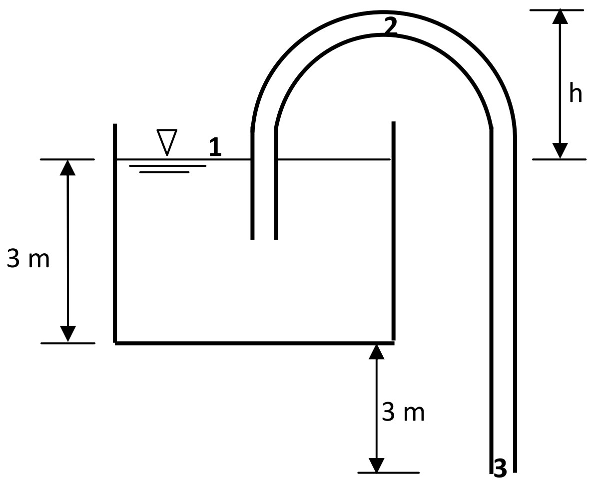
Alors :

$$h=\frac{3{,}897-2}{d_{Hg}}=\mathbf{0,14\ m=14\ cm}$$

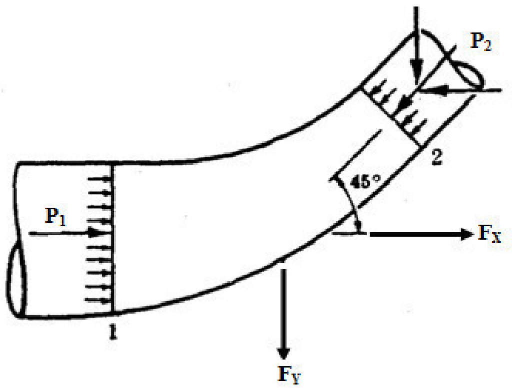
**Exercice N°12 :**

Un siphon permet l'écoulement de l'eau d'un réservoir de grande dimension à niveau constant. Il est constitué par un tuyau de 10cm de diamètre.

1. Calculer la vitesse et le débit à la sortie du siphon ;
2. Donner l'expression de $P_2$ au point 2 en fonction de h et déduire la hauteur maximale de siphonage.



**Solution :**




$$V_1 = \frac{Q}{S_1} = \frac{4Q}{\pi d_1^2} = \mathbf{1,57\ m/s}$$

$$V_2 = \frac{Q}{S_2} = \frac{4Q}{\pi d_2^2} = \mathbf{6,28\ m/s}$$

Appliquons l'équation de Bernoulli entre 1 et 2 :

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2$$

On a :

$Z_1 = Z_2$ (la différence est négligeable)

$$\frac{P_2}{\rho g} = \frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} - \frac{V_2^2}{2g} = \frac{145\ 10^3}{10^3 9,81} + \frac{1,57^2 - 6,28^2}{2\ 9,81} \Rightarrow P_2 = \mathbf{126,51\ kPa}$$

Les forces de pression sur la section 1 et 2 :

$$F_1 = P_1 S_1 = 145\ 10^3\ \frac{\pi\ 0,6^2}{4} = \mathbf{40,97\ kN}$$

$$F_2 = P_2 S_2 = 126,51\ 10^3\ \frac{\pi\ 0,3^2}{4} = \mathbf{8,93\ kN}$$

La force exercée par le fluide sur la paroi de la conduite $\vec{F}$ est opposée à une force de même grandeur exercée par la paroi de la conduite sur le fluide $\vec{R}$.

Dans la direction x :

$$F_1 - R_X - F_2 \cos 45° = \rho Q (V_2 cos45° - V_1) \Rightarrow R_X = \mathbf{-33,38\ kN}$$

Le sens de $R_x$ est la droite vers la gauche.

Dans la direction y :

$$R_y - F_2 \sin 45° = \rho Q (V_2 \sin 45°) \Rightarrow R_y = \mathbf{8,27\ kN}$$

Donc la force exercée par l'eau sur le coude convergent est :

$$F_X = \mathbf{33,38\ kN\ vers\ le\ haut}$$

$$F_y = \mathbf{-8,27\ kN\ vers\ le\ bas}$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \mathbf{34,38\ kN}$$

Inclinaison de la force est:

$$\tan\theta = \frac{F_y}{F_X} = \frac{\mathbf{-8,27}}{\mathbf{33,38}} = -0,247 \Rightarrow \boldsymbol{\theta} = \mathbf{13,91°}$$

**Solution :**

**1. Vitesse de sortie et le débit**

Appliquons l'équation de Bernoulli entre 1 et 3 :

$$\frac{P_1}{\rho g}+\frac{V_1^2}{2g}+Z_1=\frac{P_3}{\rho g}+\frac{V_3^2}{2g}+Z_3$$

On a :

$Z_1$=6 m et $Z_3$=0

$V_1$=0

$P_1$=$P_2$=Patm

$$V_3=\sqrt{2gZ_1}=\mathbf{10,84\ m/s}$$

$$Q=V_3S_3=\frac{\pi\ 0.1^2}{4}17{,}15=\mathbf{0,085\ m^3/s}$$

**2. La pression $P_2$**

Appliquons l'équation de Bernoulli entre 1 et 2 :

$$\frac{P_1}{\rho g}+\frac{V_1^2}{2g}+Z_1=\frac{P_2}{\rho g}+\frac{V_2^2}{2g}+Z_2$$

On a :

$Z_1$=0 et $Z_2$=h

$V_1$=0, $V_2$=$V_3$=10,84 m/s et $P_1$=Patm

**Donc :**

$$\frac{P_2}{\rho g}=\frac{P_1}{\rho g}-\frac{V_2^2}{2g}-h=\frac{P_{atm}}{\rho g}-6-h$$

$$P_2=P_{atm}-\rho g(6+h)$$

L'écoulement se fait au siphon si $P_2>0$, alors :

$$\rho g(6+h)<P_{atm}\Rightarrow h<\frac{P_{atm}}{\rho g}-6=\mathbf{4,32\ m}$$

La hauteur maximale de siphonage est 4,32 m

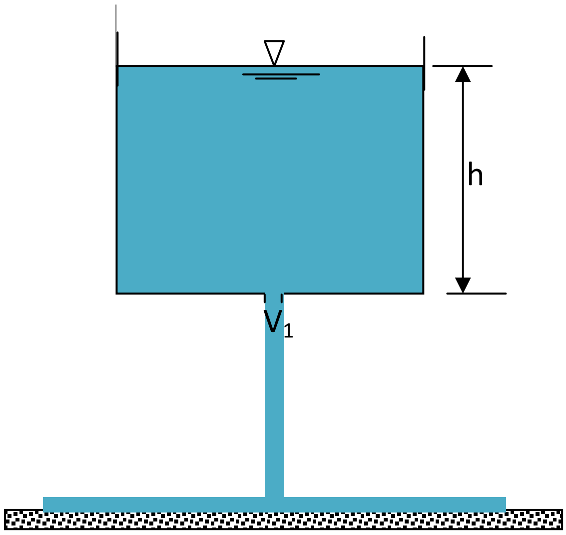
**Exercice N°13 :**

Un coude convergent de 45°, de 600 mm de diamètre en amont, de 300 mm en aval, débite 0,444 $m^3$ d'eau à la seconde sous une pression de 145 kPa. Calculer la réaction du coude sur la force exercée par l'eau.

**Exercice N°14 :**

Un jet d'eau verticale sort par l'orifice circulaire d'un réservoir. Le jet se bute contre une plaque horizontale perpendiculaire à l'axe du jet. Si le diamètre de l'orifice est 12,5 cm et la hauteur d'eau dans le réservoir est 9 m :

1. Calculer la vitesse du jet à la sortie du réservoir ;
2. Calculer la force nécessaire pour maintenir la plaque en place contre la force du jet.




**Solution :**

**1. La vitesse du jet à la sortie du réservoir**

Appliquons l'équation de Bernoulli entre 0 et 1 :

$$\frac{P_0}{\rho g} + \frac{V_0^2}{2g} + Z_0 = \frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1$$

On a :

$Z_0$=9 m et $Z_1$=0

V0=0

$P_0=P_1=$Patm

$V_1 = \sqrt{2gZ_0} = \mathbf{13,28\ m/s}$

**2. La force nécessaire pour maintenir la plaque en place contre la force du jet**

La force exercée par le fluide sur la plaque est:

$$F = \rho Q(V_1 - 0) = \rho V_1^2 S_{orifice} = \mathbf{2163,14\ N}$$

La force nécessaire pour maintenir la plaque en place contre la force du jet est égale et opposée à F .

**Introduction :**

L'écoulement d'un **fluide réel** est plus complexe que celui d'un fluide idéal. En effet, il existe des forces de frottement, dues à la viscosité du fluide, qui s'exercent entre les particules de fluide et les parois, ainsi qu'entre les particules elles-mêmes. Pour résoudre un problème d'écoulement d'un fluide réel, on fait appel à des résultats expérimentaux, en particulier ceux de l'ingénieur et physicien britannique **Osborne Reynolds**.

**IV.1 Fluide réel**

Un fluide est dit réel si, pendant son mouvement, les forces de contact ne sont pas perpendiculaires aux éléments de surface sur lesquelles elles s'exercent (elles possèdent donc des composantes tangentielles qui s'opposent au glissement des couches fluides les unes sur les autres). Cette résistance est caractérisée par la viscosité

**IV.2 Régimes d'écoulement - nombre de Reynolds**

Un réservoir alimente une conduite horizontale en verre munie de deux prises de pression. Une vanne permet de régler la vitesse d'écoulement. Un tube effilé muni d'un réservoir de colorant permet de visualiser l'écoulement.

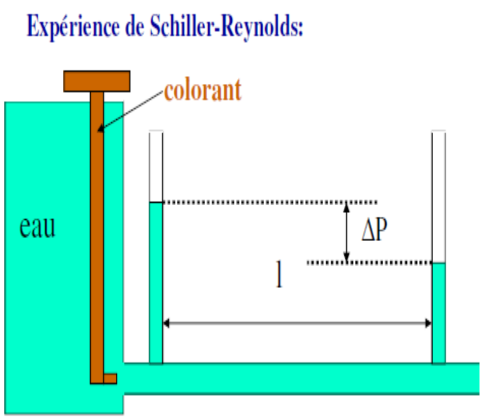
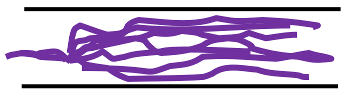



**Figure IV.1 : Expérience de Reynolds**

Aux faibles vitesses: le filet coloré conserve son individualité jusqu'à l'extrémité du tube, il ne se mélange pas aux autres filets de fluide: l'écoulement est dit laminaire. La perte de charge est faible.

On augmente la vitesse: le filet coloré se met à osciller un certain temps et se mélange au reste du fluide. En même temps, on observe une brusque augmentation de la perte de charge. Le régime est dit turbulent lisse.

On augmente encore la vitesse du fluide: le filet coloré se mélange presque aussitôt son introduction dans le tube. Le régime est dit turbulent rugueux.



En utilisant divers fluides à viscosités différentes, en faisant varier le débit et le diamètre de la canalisation, Reynolds (1883) a montré que le paramètre qui permettait de déterminer si l'écoulement est laminaire ou turbulent est un nombre sans dimension appelé nombre de Reynolds donné par l'expression suivante:

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu}$$

*ρ : masse volumique*

*V: vitesse de l'écoulement*

*D: diamètre*

*μ: viscosité dynamique*

**<u>Résultats empiriques à titre indicatif</u>**

Si Re < 2000 l'écoulement est laminaire

Si Re>2000 l'écoulement est turbulent

→ Lisse si 2000<Re<100000

→ Rugueux si Re>100000

**IV.3 Equation de Bernoulli pour les fluides réels**

Nous avons vu que pour le cas d'un fluide réel et en régime permanent, d'autres forces interviennent, notamment les forces dues au frottement, qui font apparaître une dissipation de l'énergie mécanique en énergie thermique. On appelle ce phénomène la perte de charge due aux frottements dans un fluide.

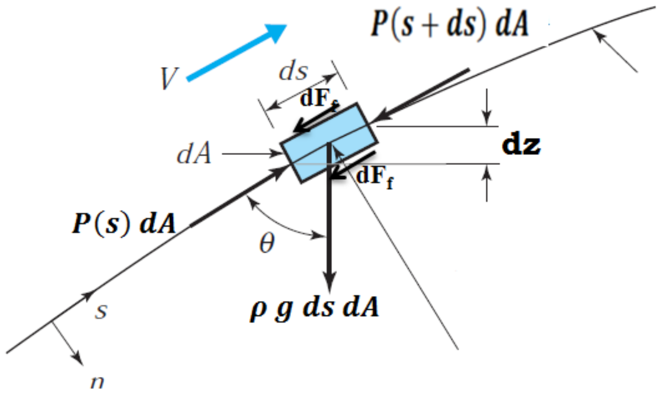



**Figure IV.2 : Systéme de force sur un élément de fluide**

Les forces agissant dans la direction s sont dues à la pression agissant à la surface des extrémités, à la composante du poids et aux forces de viscosité ($dF_f$).

Suivant la direction s

$$\sum \vec{F_s} = dm\,\vec{a_s} \Rightarrow P(s)dA - P(s+ds)dA - \rho g ds\, dA\, \cos\theta - dF_f = \rho ds\, dA \frac{dV}{dt}$$

On a :

$$\cos\theta = \frac{dZ}{ds}$$

Alors :

$$P(s)dA - P(s+ds)dA - \rho g ds\, dA\, \frac{\mathrm{dZ}}{\mathrm{ds}} - dF_f = \rho ds\, dA \frac{dV}{dt}$$

Devisée cette équation par $ds\, dA$:

$$\frac{P(s) - P(s+ds)}{ds} - \rho g \frac{\mathrm{dZ}}{\mathrm{ds}} - \frac{dF_f}{\mathrm{ds\, dA}} = \rho \frac{dV}{dt} \Rightarrow -\frac{dP}{ds} - \rho g \frac{\mathrm{dZ}}{\mathrm{ds}} - \frac{dF_f}{\mathrm{ds\, dA}} = \rho \frac{dV}{dt}$$

Multipliée cette équation par ds :

$$dP + \rho g dZ + \frac{dF_f}{\mathrm{dA}} + \rho ds \frac{dV}{dt} = 0$$

On pose :

$$V = \frac{ds}{dt}$$

On trouve :

$$\frac{dP}{\rho g} + dZ + \frac{dF_f}{\rho g \mathrm{dA}} + \frac{1}{g} \mathrm{d}\frac{\mathrm{V}^2}{2} = 0$$

$$\boldsymbol{\frac{dF_f}{\rho g \mathrm{dA}} = \frac{\mathrm{N}}{\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^3}\mathrm{m}^2} = \mathrm{m}}$$

Ce terme représente la résistance à l'écoulement sur la longueur ds.

On pose :

$$dh_T = \frac{dF_f}{\rho g \mathrm{dA}}$$

$$\frac{dP}{\rho g} + dZ + \frac{1}{g}\mathrm{d}\frac{\mathrm{V}^2}{2} + dh_T = 0$$

L'intégration de cette équation différentielle s'effectue simplement comme suit :

$$\int_{P_1}^{P_2} \frac{dP}{\rho g} + \int_{Z_1}^{Z_2} dZ + \int_{V_1}^{V_2} d\frac{V^2}{2g} + \int_{0}^{\Delta H_{12}} dh_T = 0$$

On trouve finalement :

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2 + \Delta H_{12}$$

Elle peut être interprétée graphiquement de la manière suivante :

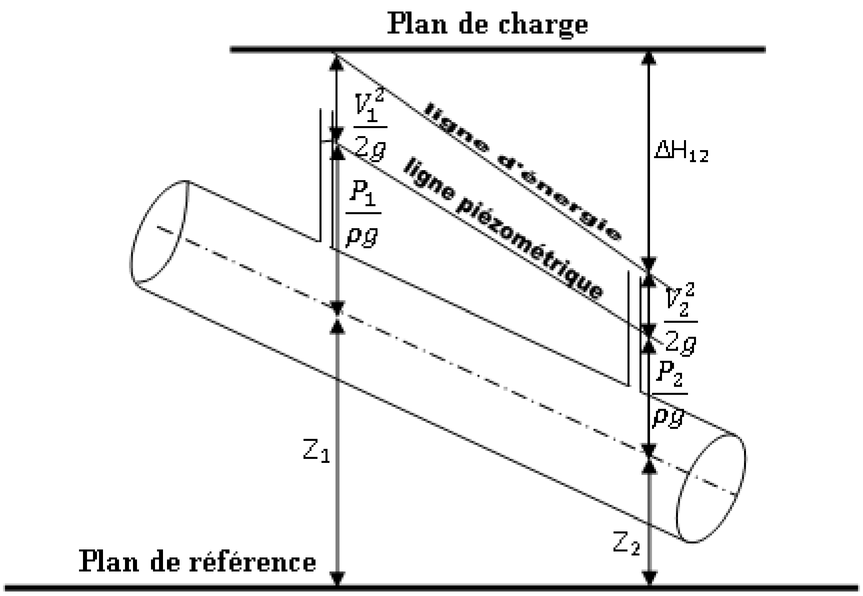



**Figure IV.3 : diagramme d'énergie**

## IV.4 Perte de charge

Selon l'état de surface intérieur d'une canalisation et la géométrie d'un circuit hydraulique (changement de section, changement de direction, …) nous pourrons constater des frottements plus ou moins importants exercés par le fluide sur les parois. Cela va se traduire par des pertes de charge plus ou moins importantes.

On distingue deux types de perte de charge :

- la perte de charge linéaire représentant l'énergie perdue entre les deux points,

- la perte de charge singulière qui intervient lorsque l'écoulement uniforme est localement perturbé.

### IV.4.1 Notion de Rugosité des Conduites

Contrairement à une surface lisse, une surface rugueuse implique un état de surface dont les irrégularités ont une action directe sur les forces de *frottements.* Une surface rugueuse peut être considérée comme étant constituée par une série de protubérances élémentaires caractérisées par une hauteur, notée $\varepsilon$ , et appelée ‘' **Rugosité** ‘' . Afin de comparer la rugosité par rapport au diamètre de la conduite, on introduit le rapport :$\frac{\varepsilon}{D}$

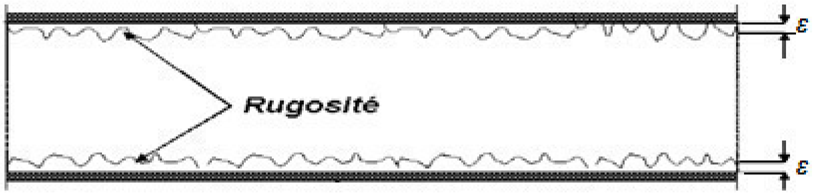



**Figure IV.4 : la rugosité d'une conduite**

### IV.4.2 Perte de charge linéaire

Soit une conduite cylindrique horizontale de diamètre invariable d, dans laquelle s'écoule un fluide à une vitesse U. Supposons que l'on dispose sur cette conduite en deux endroits éloignés d'une longueur L, deux tubes manométriques permettant de mesurer la pression statique.

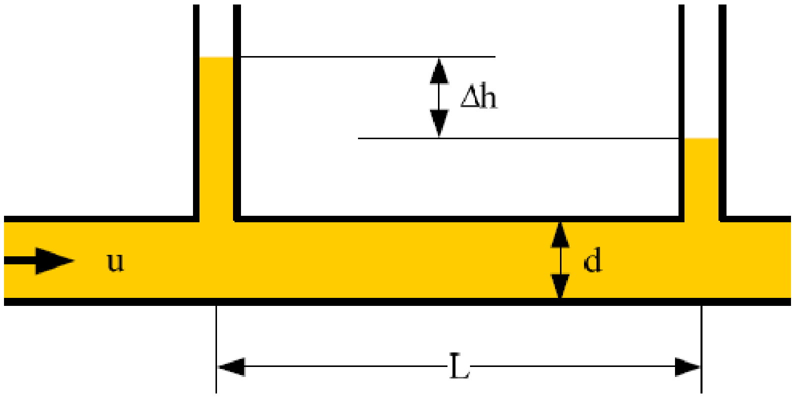



**Figure IV.5 : La chute de pression par l'effet du frottement**

On constate que la hauteur du fluide est plus grande dans le tube amont que dans le tube aval. La différence des deux niveaux donne la hauteur de fluide correspondant à la perte de charge Δh. Les pertes de charge linéaires sont proportionnelles à la longueur L de la conduite, inversement proportionnelles à son diamètre d, proportionnelle au carré de la vitesse débitante V du fluide. Elle est calculée par la formule de Darcy – Weisbach :

$$\Delta H_L = \lambda \frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}$$

Le coefficient de perte de charge λ est fonction du nombre de **Reynolds** et de la **rugosité (ε)** de la conduite. Il existe des formules empiriques qui permettent de déterminer λ, ces formules sont très nombreuses car chacune d'elles ne sont applicables que dans certaines conditions.

**A. Perte de charge en écoulement laminaire**

Soit une conduite circulaire, dans laquelle l'écoulement est laminaire. Considérant une particule de fluide cylindrique de rayon r et de longueur L. les forces agissant sur cette particule sont :

1. Les forces de pression ;
2. Les forces de frottement.

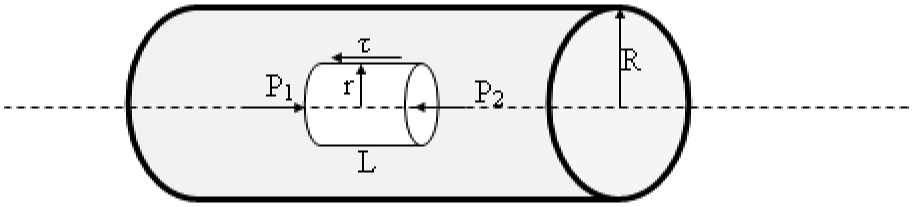



**Figure IV.6 : Forces agissant sur un élément cylindrique**

Le régime étant permanent, on peut écrire :

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow (P_1 - P_2)\pi\, r^2 = \tau(2\pi r L) \Rightarrow \tau = \frac{(P_1 - P_2)r}{2L}$$

Où τ est le contrainte de cisaillement exprimé par :

$$\tau = -\mu \frac{dV}{dr}$$

En combinant ces deux équations et solutionnant pour dV on obtient :

$$dV = -\frac{(P_1 - P_2)}{2\mu\, L} r dr = -\frac{\Delta P}{2\mu\, L} r dr$$

On intégre cette équation de r = 0 à r et déterminer la constante d'intégration en utilisant la condition de u = 0 pour r = R (sue la paroi), on obtient le profil de vitesse :

$$V(r) = \frac{\Delta P}{4\mu\, L}(R^2 - r^2)$$

Pour r = 0, u = umax; ainsi, on peut obtenir le profil de vitesse sans dimension comme :

$$\frac{V}{V_{max}} = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2$$

La vitesse moyenne et le débit sont obtenus en l'intégrant de r = 0 à r = R :

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\mu}\left(\frac{\Delta P}{L}\right)\ et\ V = \frac{Q}{S} = \frac{R^2}{8\mu}\left(\frac{\Delta P}{L}\right)$$

D'après l'équation du débit, on tire ΔP :

$$\Delta P = \frac{8\mu\, L}{\pi R^4} Q = \frac{8\mu\, L}{R^2} V$$

Mais la perte de charge sur L métres est :

$$\Delta H = \frac{\Delta P}{\rho g}$$

Alors :

$$\Delta H = \frac{8\mu\, L}{\rho g R^2} V = \frac{32\mu\, L}{\rho g D^2} V$$

On peut écrire cette équation sous la forme de l'équation de Darcy :

$$\Delta H = \frac{64\mu}{\rho D V} \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} = \frac{64}{Re} \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} = \lambda \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$$

λ étant le coefficient de la perte de charge :

$$\lambda = \frac{64}{Re}$$

**Exemple N°1 :**

Une huile de densité 0,850 et de viscosité dynamique 0,10104 Pa.s circule dans un tuyau de fonte lisse de longueur L = 3000 m, de diamètre D = 30 cm, avec un débit Q = 44 l/s. Quelle est la perte de charge dans ce tuyau ?

**Solution :**

La vitesse moyenne est donnée par :

$$V = \frac{Q}{S} = 4 \frac{0{,}044}{3{,}14\ 0{,}30^2} = 0{,}622 m/s$$

Le nombre de Reynolds égale à :

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{850\ 0{,}622\ 0{,}3}{0{,}10104} = 1570 < 2000$$

L'écoulement est laminaire :

$$\lambda = \frac{64}{Re} = \frac{64}{1570} = 0{,}0407$$

La perte de charge linéaire vaut :

$$\Delta H = \lambda \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} = 0{,}0407 \frac{3000}{0{,}3} \frac{0{,}622^2}{2\ 9{,}81} = 6{,}8 m$$

**B. Perte de chrage en écoulement turbulent**

Lorsqu'un écoulement en conduite est turbulent ( $Re > 2000$ ), le profil de vitesse n'est plus parabolique comme c'est le cas en régime laminaire. Il s'uniformise sur un large domaine autour de l'axe et présente en conséquence une brusque variation au voisinage des parois (voir **figure IV.6**). Les pertes de charge régulières sont donc essentiellement dues aux frottements visqueux entre les particules fluides situées près des parois de la conduite. Il en résulte que les propriétés de la paroi jouent un rôle important et que notamment sa rugosité devient un paramètre non négligeable.

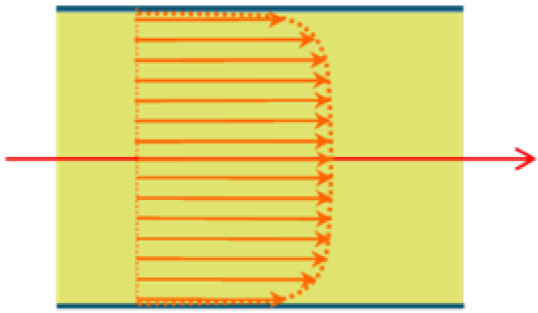


**Figure IV.7 : profil d'écoulement turbulent**

Nikuradse (1931-33) a effectué toute une série de mesures des pertes de charge dans des conduites dont la paroi intérieure était enduite d'une couche régulière de grains de sable. Il a observé qu'à partir d'une certaine valeur du nombre de Reynolds, le coefficient λ restait constant quel que soit Re, sa valeur ne dépend que la rugosité relative de la canalisation (domaine horizontale). Ses résultats sont résumés par la courbe suivante :

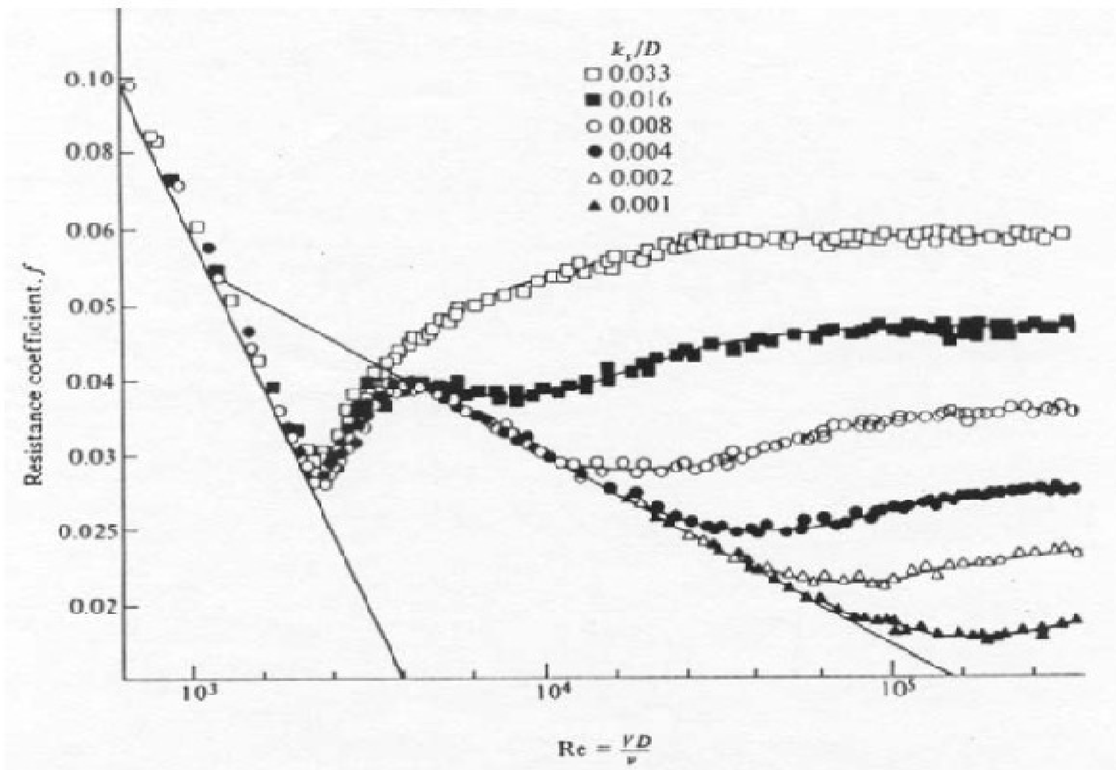



**Figure IV.8 : diagramme de perte de charge de Nikurdse**

On peut devisée cette courbe en quatre domaine en fonction du nombre de Reynolds :

1. Re<2000 :

$$\lambda = \frac{64}{Re}$$

2. Re<$10^5$ :

Le coefficient de perte de charge est donné par la relation de Blasius :

$$\lambda = \frac{0,316}{Re^{0,25}}$$

formule dans laquelle la rugosité n'intervient pas, on parle d'écoulement **turbulent lisse**

3. Re> $10^5$ jusqu'à l'horizontale :

Le coefficient de perte de charge est donné par l'équation de Von Karman:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log\frac{2,51}{Re\sqrt{\lambda}}$$

4. Le domaine de l'horizontale:

Le coefficient de perte de charge est indépendant du nombre de Reynolds. Son expression est donnée par la formule de Nikuradse :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log\frac{\varepsilon}{3,71D}$$

Dans ce domaine, on dit que l'écoulement est **turbulent rugueux.**

**Cyril Colebrook (1939)** a intégré en une seule relation les résultats pour les parois lisses et totalement rugueuses. On peut ainsi calculer le coefficient de frottement λ sans avoir à distinguer le type de paroi :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log\left[\frac{\varepsilon}{3,71D} + \frac{2,51}{Re\sqrt{\lambda}}\right]$$

On constate qu'elle associe en somme les formules de Von Karman et de Nikuradse. On note, cependant, que l'inconnue apparait dans les deux membres de cette équation non linéaire. Il faut donc procéder par itération pour trouver λ.

Pour faciliter la tâche au niveau pratique, **Lewis .F. Moody (1944)** a tracé la formule Colebrook sous forme d'abaque :

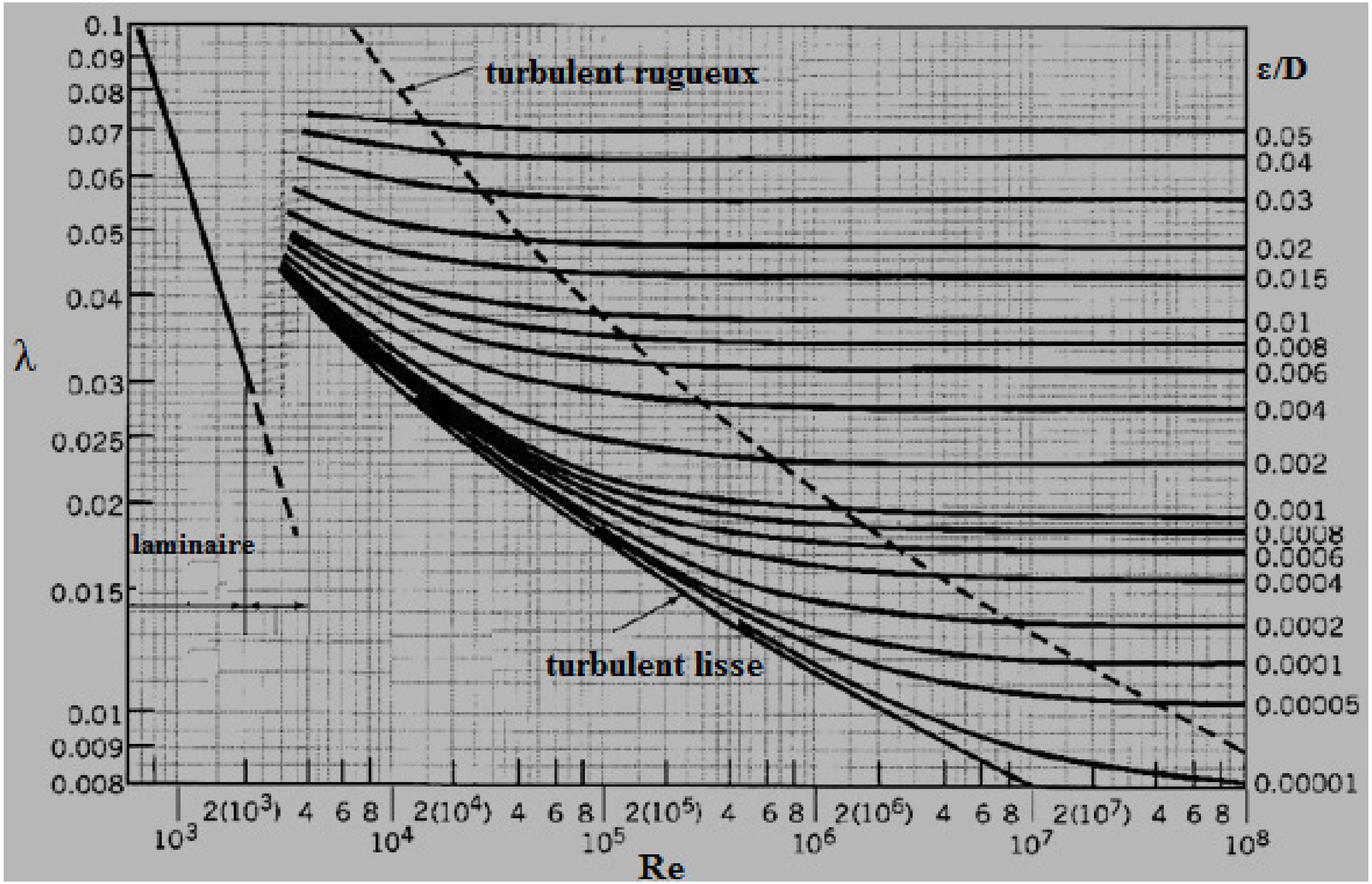



Figure IV.9: diagramme de perte de charge de Moody

Pour utiliser cet abaque, on choisit le point d'intersection de la courbe correspondant au ε/D de la conduite et au nombre de Reynolds. On projette ensuite ce point sur l'ordonnée de gauche du diagramme de Moody.

À partir des années 1970, des nouvelles formules explicites, incluant l'effet de la rugosité, ont fait leur apparition pour obtenir le coefficient λ défini implicitement dans la formule de Colebrook. L'une des premières utilisées avec succès a été introduite par *Swamee-Jain* en 1976, suivi par celle de *Haaland* en 1983. Cette dernière est populaire grâce à sa simplicité tout en affichant une bonne précision. Plusieurs formules similaires on été proposées par la suite, mais sans établir une différence substantielle sur la précision.

- **Formule de *Swamee-Jain***

$$\lambda = \frac{0{,}25}{\left[\log\left(\frac{\varepsilon}{3{,}7D} + \frac{5{,}74}{Re^{0{,}9}}\right)\right]^2}$$

- **Formule de Haaland**

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -1{,}8\ \log\left[\frac{6{,}9}{Re} + \left(\frac{\varepsilon/D}{3{,}7}\right)^{1{,}11}\right]$$

**Exemple :**

Déterminez la chute de pression dans une conduite horizontale de 300 m long et de 0.20m de diamètre. La vitesse moyenne de l'eau est de 1,7 m/s, la masse volumique de l'eau est de 1000 kg/m$^3$, sa viscosité cinématique est de $10^{-6}$ m$^2$/s et la rugosité absolue est de 0.2mm.

**Solution :**

Écrivons l'équation de Bernoulli entre l'entrée (section 1) et la sortie (section 2) de la conduite :

Appliquons l'équation de Bernoulli entre 1 et 2 :

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2 + \Delta H$$

On a :

$Z_1 = Z_2 = 0$ et $V_1 = V_2 = V = 1{,}7$ m/s, alors :

$$\frac{P_1 - P_2}{\rho g} = \Delta H = \lambda \frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}$$

Pour déterminer λ , il faut calculer Re et ε/D:

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{VD}{\nu} = \frac{1{,}7\ 0{,}2}{10^{-6}} = 3{,}4\ 10^5 > 2000\ l'écoulement\ est\ turbulent$$

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0{,}2}{200} = 0{,}001$$

L'équation de Halaand donne:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -1{,}8\ \log\left[\frac{6{,}9}{Re} + \left(\frac{\varepsilon/D}{3{,}7}\right)^{1{,}11}\right] \Rightarrow \lambda = 0{,}0204$$

Donc :

$$\frac{P_1 - P_2}{\rho g} = \frac{\Delta P}{\rho g} = 0{,}0204\frac{300}{0{,}2}\frac{1{,}7^2}{2\ 9{,}81} = \boldsymbol{4{,}51\ m}$$

$$\Delta P = 10^3 9{,}81\ 4{,}51 = \boldsymbol{44{,}24\ kPa}$$

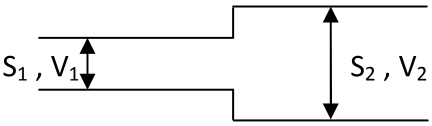
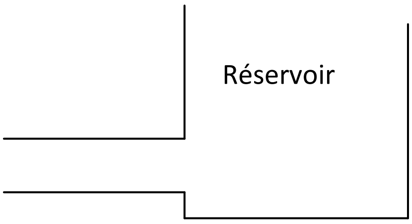
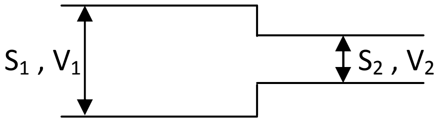
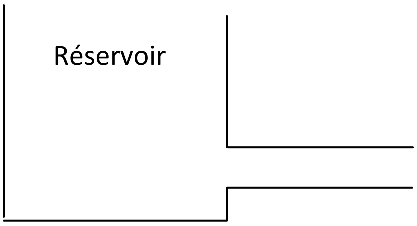
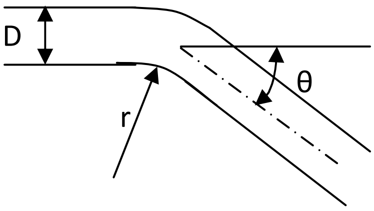
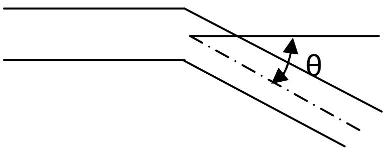
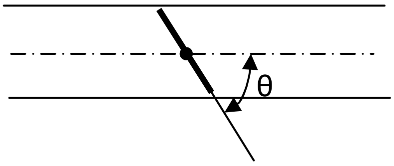
### IV.4.3 Pertes de charge singulières

Chaque fois que le régime d'un fluide se trouve perturbé brusquement, c'est à dire que la vitesse varie rapidement en direction ou en grandeur, les tourbillons produits donnent lieu a un frottement supplémentaire qui s'ajoute aux frottements dus à la viscosité et aux parois du tube. Ces perturbations engendrent des pertes de charge appelée perte de charge singulière. Les principales pertes de charge singulières se produisent à l'entrée de la conduite, dans les rétrécissements ou élargissements de section, dans les coudes et les branchements, ainsi que dans les organes divers disposés sur la tuyauterie (vannes,filtres,clapets,...). On a l'habitude d'exprimer ces pertes de charge par la formule suivante:

$$\Delta H_s = K\frac{V^2}{2g}$$

Où :

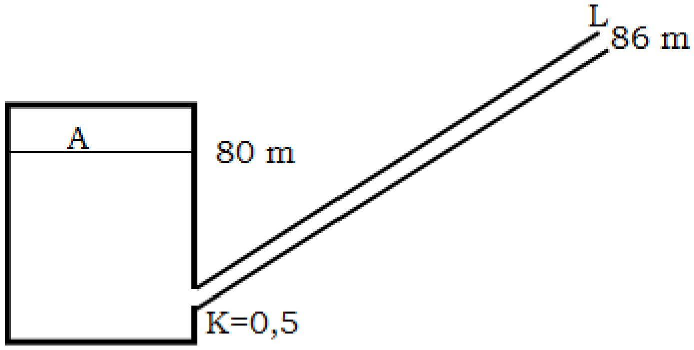
K est fonction des caractéristiques géométriques et du nombre de Reynolds.

<table>
<tr><th>Nature de singularité</th><th>Valeur de K</th></tr>
<tr><td>Elargissement brusque<br></td><td>$$K = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2 \; et \; \Delta Hs = K\frac{V_1^2}{2g}$$</td></tr>
<tr><td>Sortie vers un réservoir<br></td><td>$$K = 1 \; et \; \Delta Hs = \frac{V^2}{2g}$$</td></tr>
<tr><td>Rétrécissement brusque<br></td><td>$$\Delta Hs = K\frac{V_2^2}{2g}$$<table><tr><td>$S_2/S_1$</td><td>0,1</td><td>0,5</td><td>0,7</td></tr><tr><td>K</td><td>0,41</td><td>0,24</td><td>0,14</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Sortie réservoir - conduite<br></td><td>$$K = 0{,}5 \; et \; \Delta Hs = K\frac{V^2}{2g}$$</td></tr>
<tr><td>Coude arrondi<br></td><td>$$K = \left(0{,}131 + 1{,}847\left(\frac{d}{2r}\right)^{3,5}\right)\frac{\theta}{90°}$$<br>$\theta$ en degrés</td></tr>
<tr><td>Coude à angle vif<br></td><td><table><tr><td>$\theta°$</td><td>22,5</td><td>30</td><td>45</td><td>60</td><td>90</td></tr><tr><td>K</td><td>0,07</td><td>0,11</td><td>0,24</td><td>0,47</td><td>1,13</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Vanne à papillon<br></td><td><table><tr><td>$\theta°$</td><td>20</td><td>30</td><td>40</td><td>50</td><td>60</td><td>70</td></tr><tr><td>K</td><td>1,5</td><td>3,9</td><td>11</td><td>33</td><td>118</td><td>750</td></tr></table></td></tr>
</table>

**Exemple :**

De l'huile circule du réservoir A à travers 150m de tuyau neuf de fonte asphaltée de 150mm de diamètre jusqu'au point B de côte 30m, comme le montre la Figure ci-dessous. Quelle devra être la pression en A pour que le débit de l'huile soit de 13l/s (densité = 0.84 et ν = 2.1 $10^{-6}$m$^2$/s ). Utiliser ε = 0.12mm.

**Solution :**




Appliquons l'équation de Bernoulli entre A et L:

$$\frac{P_A}{\rho g}+\frac{V_A^2}{2g}+Z_A=\frac{P_L}{\rho g}+\frac{V_L^2}{2g}+Z_L+\Delta H$$

On a :

$V_A$=0 ,$Z_A$=80 m , $Z_L$=86 m et $P_L$=Patm (négligeable), alors :

$$\frac{P_A}{\rho g}=Z_L-Z_A+\frac{V_L^2}{2g}+\lambda\frac{L}{D}\frac{V_L^2}{2g}+K\,\frac{V_L^2}{2g}$$

$$V_L=\frac{Q}{S}=\frac{4Q}{\pi D^2}=\mathbf{0,736\ m/s}$$

$$Re=\frac{\rho VD}{\mu}=\frac{VD}{\nu}=\frac{0{,}736\ 0{,}15}{2{,}1\ 10^{-6}}=5{,}26\ 10^4>2000\ l'\acute{e}coulement\ est\ turbulent$$

$$\frac{\varepsilon}{D}=\frac{0{,}12}{150}=0{,}0008$$

L'équation de Halaand donne:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=-1{,}8\ \log\left[\frac{6{,}9}{Re}+\left(\frac{\varepsilon/D}{3{,}7}\right)^{1{,}11}\right]\Rightarrow\lambda=0{,}023$$

**Donc :**

$$\frac{P_A}{\rho g}=6+\frac{0{,}736^2}{2\ 9{,}81}\left(1+0{,}023\frac{150}{0{,}15}+0{,}5\right)=\mathbf{6,7\ m}$$

$$P_A=\ 0{,}84\ 1000\ 9{,}81\ 6{,}7=\mathbf{55,21\ kPa}$$

## IV.5 Equation de bernoulli avec transfert d'énergie

Il est assez fréquent, dans les circuits hydrauliques, qu'un appareil hydromécanique, placé dans un tuyau, permette une transformation d'énergie mécanique en énergie hydraulique (une pompe par exemple) ou inversement (une turbine). Ainsi l'expression de l'équation de Bernoulli s'écrit :

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g} + Z_1 \pm \Delta H_P = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho g} + Z_2 + \Delta H_{12}$$

Si l'échange d'énergie se fait des parois de la machine vers le fluide nous avons affaire à une pompe, si au contraire, l'échange d'énergie se fait du fluide aux parois de la machine, nous avons affaire à une turbine.

L'équation d'énergie est modifiée par le terme $\Delta H_P$, qui représente l'augmentation par une pompe ou la diminution par une turbine de l'énergie mécanique totale par unité de masse de liquide en mouvement.

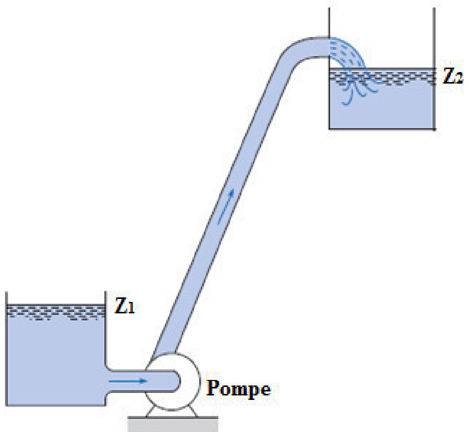



**Figure IV.10 : Système hydraulique comprenant une pompe**

**<u>Puissance et rendement d'une machine hydraulique</u>**

La puissance de la machine est l'énergie échangée par le fluide qui la traverse, par unité de temps.

Si Qm note le débit massique (kg/s) et E, l'énergie échangé par unité de masse du fluide (J/kg), on a

$$\mathbf{P = E \cdot Qm = \rho\, Q\, g\, (H_2 - H_1) = \rho\, Q\, g\, \Delta H_P\ (Watt)}$$

Le rendement η d'une machine est le rapport entre la puissance fournie et la puissance utilisée.

**Dans le cas d'une pompe :**

$$\eta = \frac{P_h}{P_a}$$

Où :

$P_h$ = puissance hydraulique échangée avec le fluide,

$P_a$ = puissance absorbée sur l'arbre d'entrée:

**Dans le cas d'une turbine :**

$$\eta = \frac{P_u}{P_h}$$

Où :

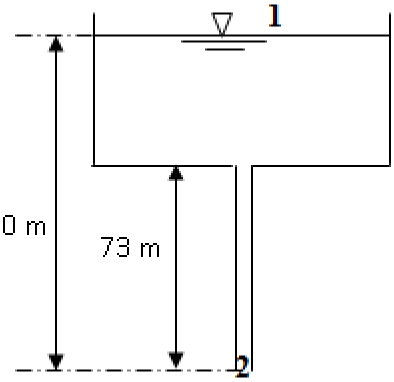
$P_u$ = puissance hydraulique échangée avec le fluide

$P_h$= puissance utile sur l'arbre de sortie

## Exercices

### Exercice N°1:

Un réservoir d'eau est vidangé par une conduite verticale. Le diamètre de la conduite est 50 mm et sa longueur est 73 m. En négligeant les pertes de charges singulières et le coefficient de perte de charge linéaire λ=0,025. Calculer le débit d'écoulement.




**Solution :**

Appliquons l'équation de Bernoulli entre 1 et 2 :

$$\frac{P_1}{\rho g}+\frac{V_1^2}{2g}+Z_1=\frac{P_2}{\rho g}+\frac{V_2^2}{2g}+Z_2+\Delta H$$

On a :

$Z_1$=80 m , $Z_2$=0 et $P_1$=$P_2$=Patm

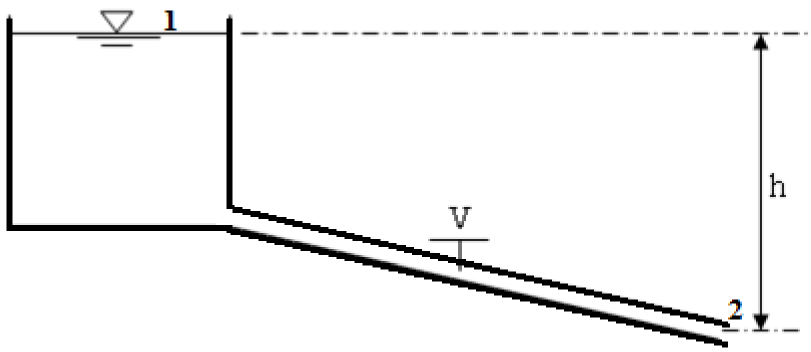
$V_1$=0 ( réservoir de grande dimension), on trouve :

$$\frac{V_2^2}{2g}+\lambda\frac{L}{D}\frac{V_2^2}{2g}=80\Rightarrow V_2=\sqrt{\frac{2g\ 80}{1+\lambda\frac{L}{D}}}=\sqrt{\frac{2\ 9{,}81\ 80}{1+0{,}025\frac{73}{0.05}}}=\mathbf{6{,}47\ m/s}$$

$$Q=V_2S_2=6{,}47\ \frac{3{,}14\ 0{,}05^2}{4}=\mathbf{0{,}0127\ m^3/s}$$

### Exercice N°2:

Une conduite de vidange d'un grand réservoir à niveau constant débouche à l'air libre. La section de sortie de la conduite est situé h=7m au-dessous du niveau du plan d'eau du réservoir. La conduite a une longueur L=150m et son diamètre est D=0,2m. La rugosité de la conduite est ε=0,1mm. On néglige la perte de charge singulière à l'entrée de la conduite. Au milieu de la conduite se trouve une vanne V.




1. La vanne étant grande ouverte (perte de charge de la vanne nulle), Quel est le débit de vidange Q assuré par la conduite.
2. La vanne est partiellement fermée et le débit dans la conduite est alors Q=0,05 $m^3.s^{-1}$. En déduire le coefficient de perte de charge singulière K de la vanne.

$\rho = 10^3 kg.m^{-3}$ et $g=9,81 m.s^{-2}$. Utiliser la formule de Nikuradse : $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log\frac{\varepsilon}{3,71D}$

**Solution :**

**1. Calcul le débit de vidange**

Appliquons l'équation de Bernoulli entre 1 et 2 :

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2 + \Delta H$$

On a :

$Z_1=h$ , $Z_2=0$ et $P_1=P_2=Patm$

$V_1=0$ ( réservoir de grande dimension), on trouve :

$$\frac{V_2^2}{2g} + \lambda\frac{L}{D}\frac{V_2^2}{2g} = h \Rightarrow V_2 = \sqrt{\frac{2gh}{1+\lambda\frac{L}{D}}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log\frac{\varepsilon}{3,71D} = -2\,log\frac{0,0001}{0,2} = 6,602 \Rightarrow \boldsymbol{\lambda = 0,023}$$

$$V_2 = \sqrt{\frac{2\ 9,81\ 7}{1+0,023\frac{150}{0,2}}} = \mathbf{2,74\ m/s}$$

$$Q = V_2 S_2 = 2,74\ \frac{3,14\ 0,2^2}{4} = \mathbf{0,086\ m^3/s}$$

**2. Le coefficient de perte de charge singulière K**

La vanne est partiellement fermée donc :

$$\Delta H = \lambda\frac{L}{D}\frac{V_2^2}{2g} + K\ \frac{V_2^2}{2g}$$

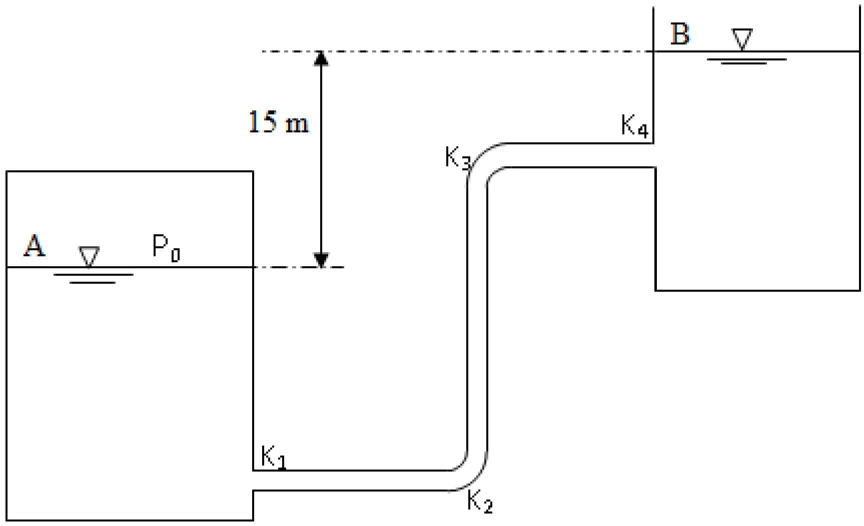
L'application de l'équation de Bernoulli entre 1 et 2 donnez-nous :

$$\frac{V_2^2}{2g} + \lambda\frac{L}{D}\frac{V_2^2}{2g} + K\ \frac{V_2^2}{2g} = h \Rightarrow K = \frac{2\ g\ h}{V_2^2} - 1 - \lambda\frac{L}{D} = \frac{2\ g\ h\ S^2}{Q^2} - 1 - \lambda\frac{L}{D}$$

$K = \mathbf{34,5}$

**Exercice N°3 :**

Grace à une surpression $P_0$, l'eau circule du réservoir A vers le réservoir B au moyen d'une conduite de diamètre d= 300 mm de rugosité $\varepsilon$ = 0,3 mm et de longueur L=170 m. Les coefficients des pertes de charges singulières sont $K_1=0,5$ à la sortie du réservoir A, $K_2 = K_3=0,15$ pour les deux coudes et $K_4$ =1 à l'entrée du réservoir B. Déterminez la pression manométrique $P_0$ pour avoir un débit de Q = 200 l/s. utiliser le diagramme de Moody. On donne $\rho = 10^3 kg.m^{-3}$ , $g=9,81 m.s^{-2}$ et $\nu=1,00510^{-6}$ $m^2/s$




**Solution :**

Appliquons l'équation de Bernoulli entre A et B:

$$\frac{P_A}{\rho g}+\frac{V_A^2}{2g}+Z_A=\frac{P_B}{\rho g}+\frac{V_B^2}{2g}+Z_B+\Delta H$$

On a :

$Z_A=0$ , $Z_B=15$ m , $P_B=Patm$ et $P_A=P_0$

$V_A=V_B=0$ ( Niveau d'eau constante), alors :

$$\frac{P_0}{\rho g}=15+\lambda\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}+(K_1+K_2+K_3+K_4)\frac{V^2}{2g}$$

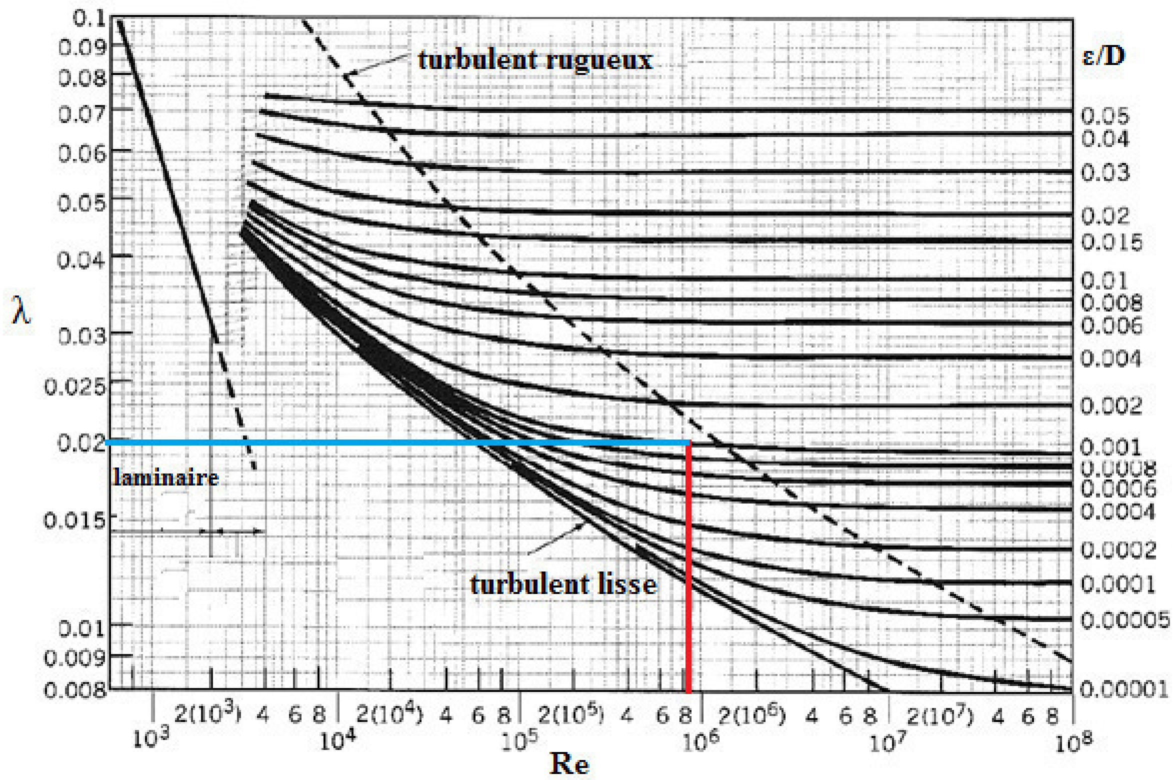
$$V=\frac{Q}{S}=4\frac{0,2}{3,14\ 0,30^2}=2,83\ m/s$$

Pour calculer λ, il faut calculer Re et ε/D:

$$Re=\frac{V\ D}{\nu}=\frac{2,83\ 0,3}{1,00510^{-6}}=8,44\ 10^5$$

$$\frac{\varepsilon}{D}=\frac{0,3}{300}=0,001$$

Le diagramme de Moody donne : $\lambda=0,0199\approx0,02$ (voir la figure ci-dessous)

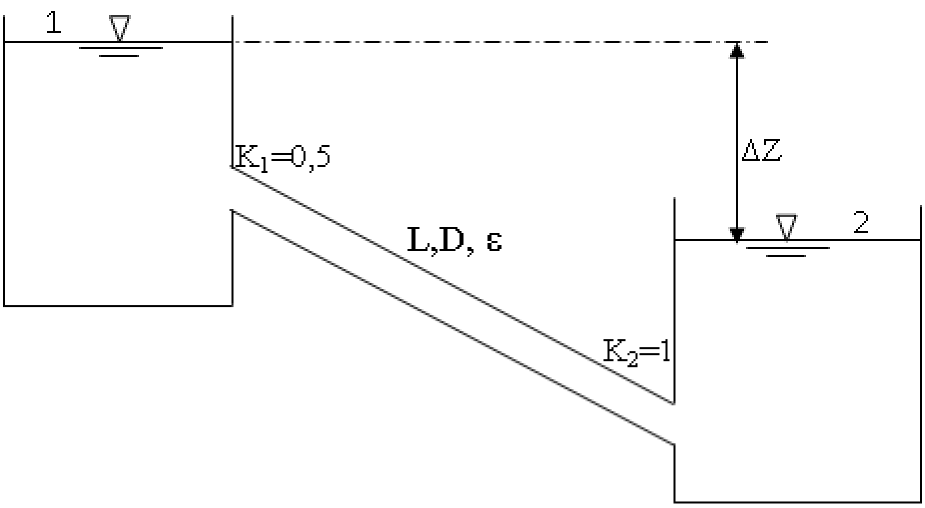



$$\frac{P_0}{\rho g} = 15 + 0{,}02\frac{170}{0{,}3}\frac{2{,}83^2}{2\ 9{,}81} + (0{,}5 + 0{,}15 + {,}015 + 0{,}1)\frac{2{,}83^2}{2\ 9{,}81} = \mathbf{19{,}99\ m \approx 20\ m}$$

$P_0 = \mathbf{196{,}2\ kPa}$

**Exercice N°4 :**

Soit le système de la figure ci-dessous, avec ΔZ = 45m et L = 9000 m, la longueur de la conduite en acier rivé (ε=0,9 mm). Quel est le diamètre de la conduite pour lequel le débit de l'eau sera de 625 l/s. Les coefficients des pertes de charges singulières sont $K_1$=0,5 à la sortie du réservoir 1 et $K_2$ =1 à l'entrée de réservoir 2. Utiliser l'équation de Halaand pour calculer le coefficient de perte de charge.



**Solution :**

Appliquons l'équation de Bernoulli entre 1 et 2 :

$$\frac{P_1}{\rho g}+\frac{V_1^2}{2g}+Z_1=\frac{P_2}{\rho g}+\frac{V_2^2}{2g}+Z_2+\Delta H$$

On a :

$Z_1=0$ , $Z_2=\Delta Z=80m$ et $P_1=P_2=Patm$

$V_1=V_2=0$ ( Niveau d'eau constante), alors :

$$\Delta H=\lambda\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}+(K_1+K_2)\frac{V^2}{2g}=\Delta Z$$

On a :

$$Q=V\left(\frac{\pi D^2}{4}\right)\Rightarrow V=\frac{4Q}{\pi D^2}$$

Donc :

$$D=\left[\frac{8Q^2}{g\pi^2\Delta Z}\left(\lambda\frac{L}{D}+K_1+K_2\right)\right]^{1/4}=f(D)$$

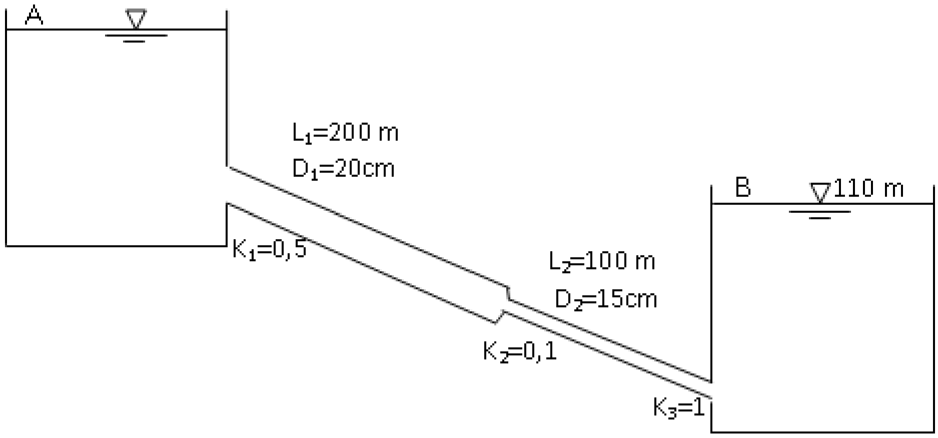
Dans cette équation le coefficient de perte de charge λ dépend du diamètre D, donc on a 2 inconnues. Dans ce cas, le calcul du diamètre est fait par itération. On commence par une valeur initiale $D^{(0)}=0.1$ et on évalue la valeur de λ puis la valeur de D. Si la valeur calculé D est très proche de $D^{(0)}$ on s'arrête les calcules si non on continue jusqu'à la convergence. Le tableau ci-dessous résume les résultats :

| $D^{(0)}$ (m) | V (m/s) | Re | ε/D | λ | D (m) |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,1 | 79,57 | $7{,}95\ 10^6$ | 0.009 | 0.0366 | 1,24 |
| 1,24 | 0,52 | $6{,}42\ 10^5$ | $7{,}26\ 10^{-4}$ | 0,0188 | 0,56 |
| 0,56 | 2,53 | $1{,}42\ 10^6$ | 0,0016 | 0,022 | 0,71 |
| 0,71 | 1,57 | $1{,}12\ 10^6$ | 0,0013 | 0,021 | 0,66 |
| 0,66 | 1,82 | $1{,}2\ 10^6$ | 0,0014 | 0,0214 | 0,67 |
| 0,67 | 1,73 | $1{,}18\ 10^6$ | 0,0014 | 0,0214 | 0.67 |

**Le diamètre de la conduite est 0.67 m**

**Exercice N°5 :**

De l'eau circule du réservoir A au réservoir B à travers deux conduites en série en acier ($\varepsilon$=0,26 mm). Quelle est l'élévation de la surface libre dans le réservoir A si le débit d'écoulement est 0,03 $m^3$/s. Utiliser l'équation de Nikuradse




**Solution :**

Appliquons l'équation de Bernoulli entre A et B:

$$\frac{P_A}{\rho g}+\frac{V_A^2}{2g}+Z_A=\frac{P_B}{\rho g}+\frac{V_B^2}{2g}+Z_B+\Delta H$$

On a :

$Z_B$=110 m , $P_B$= $P_A$ =Patm

$V_A$=$V_B$ =0 ( Niveau d'eau constante), alors :

$$Z_A=Z_B+\Delta H=Z_B+\lambda_1\frac{L_1}{D_1}\frac{V_1^2}{2g}+\lambda_2\frac{L_2}{D_2}\frac{V_2^2}{2g}+K_1\frac{V_1^2}{2g}+(K_2+K_3)\frac{V_2^2}{2g}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}=-2\log\frac{\varepsilon}{3{,}71D_1}\Rightarrow \boldsymbol{\lambda_1=0,021}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}=-2\log\frac{\varepsilon}{3{,}71D_2}\Rightarrow \boldsymbol{\lambda_2=0,0225}$$

$$V_1=\frac{4Q}{\pi D_1^2}=\frac{4\ 0{,}03}{3{,}14\ 0{,}2^2}=\boldsymbol{0,96\ m/s}$$

$$V_2=\frac{4Q}{\pi D_2^2}=\frac{4\ 0{,}03}{3{,}14\ 0{,}15^2}=\boldsymbol{1,7\ m/s}$$

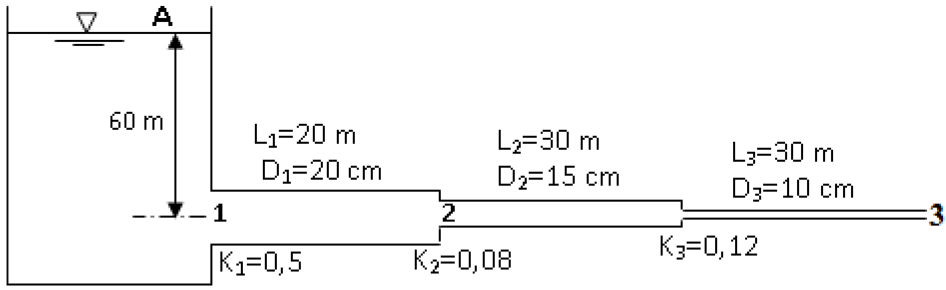
$$Z_A=110+\left(0{,}021\frac{200}{0{,}2}+0{,}5\right)\frac{0{,}96^2}{2\ 9{,}81}+\left(0{,}0225\frac{100}{0{,}15}+0{,}1+1\right)\frac{1{,}7^2}{2\ 9{,}81}$$

$$\boldsymbol{Z_A=113,38\ m}$$

**Exercice N°6 :**

Un réservoir d'eau alimente un réseau composé de trois conduites en série neufs ($\varepsilon$=0.1mm) et l'eau sort sous forme d'un jet comme indiquée ci-dessous.

1. Calculer le débit d'écoulement ;
2. Calculer la pression statique aux points 1 et 2.




**Solution :**

**1. Le débit d'écoulement**

Appliquons l'équation de Bernoulli entre A et 3:

$$\frac{P_A}{\rho g}+\frac{V_A^2}{2g}+Z_A=\frac{P_3}{\rho g}+\frac{V_3^2}{2g}+Z_3+\Delta H$$

On a :

$Z_A$=60 m , $Z_3$=0, $P_3$= $P_A$ =Patm

$V_A$=0 ( Niveau d'eau constante), alors :

$$Z_A=\frac{V_3^2}{2g}+\Delta H=\frac{V_3^2}{2g}+\lambda_1\frac{L_1}{D_1}\frac{V_1^2}{2g}+\lambda_2\frac{L_2}{D_2}\frac{V_2^2}{2g}+\lambda_3\frac{L_3}{D_3}\frac{V_3^2}{2g}+K_1\frac{V_1^2}{2g}+K_2\frac{V_2^2}{2g}+K_3\frac{V_3^2}{2g}$$

$$Z_A=\frac{8\,Q^2}{\pi^2 g}\left(\frac{K_1}{D_1^4}+\frac{\lambda_1 L_1}{D_1^5}+\frac{K_2}{D_2^4}+\frac{\lambda_2 L_2}{D_2^5}+\frac{K_3+1}{D_3^4}+\frac{\lambda_3 L_3}{D_3^5}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}=-2\log\frac{\varepsilon}{3{,}71D_1}\Rightarrow \boldsymbol{\lambda_1=0,0167}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}=-2\log\frac{\varepsilon}{3{,}71D_2}\Rightarrow \boldsymbol{\lambda_2=0,0178}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_3}}=-2\log\frac{\varepsilon}{3{,}71D_3}\Rightarrow \boldsymbol{\lambda_3=0,0196}$$

L'Application numérique donne :

$Q=\boldsymbol{0,096\ m^3/s=96\ l/s}$

**2. Les pressions statiques au point 1 et 2:**

Appliquons l'équation de Bernoulli entre A et 1:

$$\frac{P_A}{\rho g}+\frac{V_A^2}{2g}+Z_A=\frac{P_1}{\rho g}+\frac{V_1^2}{2g}+Z_1+\Delta H$$

On a :

$Z_A$=60 m , $Z_1$=0, $P_A$ =Patm (négligeable)

$V_A$=0 ( Niveau d'eau constante), alors :

$$\frac{P_1}{\rho g}=Z_A-\frac{V_1^2}{2g}-K_1\frac{V_1^2}{2g}$$

$$V_1=\frac{4\,Q}{\pi D_1^2}=\frac{4\;0{,}096}{3{,}14\;0{,}2^2}=\mathbf{3,057}\;\boldsymbol{m/s}$$

$$\frac{P_1}{\rho g}=\mathbf{59,28}\;\boldsymbol{m}\Rightarrow P_1=\mathbf{581,59}\;\boldsymbol{kPa}$$

Même chose

$$\frac{P_2}{\rho g}=Z_A-\frac{V_2^2}{2g}-\lambda_1\frac{L_1}{D_1}\frac{V_1^2}{2g}-\lambda_2\frac{L_2}{D_2}\frac{V_2^2}{2g}-K_1\frac{V_1^2}{2g}-K_2\frac{V_2^2}{2g}$$

$$\frac{P_2}{\rho g}=Z_A-\frac{V_2^2}{2g}\left(1+\lambda_2\frac{L_2}{D_2}+K_2\right)-\frac{V_1^2}{2g}\left(K_1+\lambda_1\frac{L_1}{D_1}\right)$$

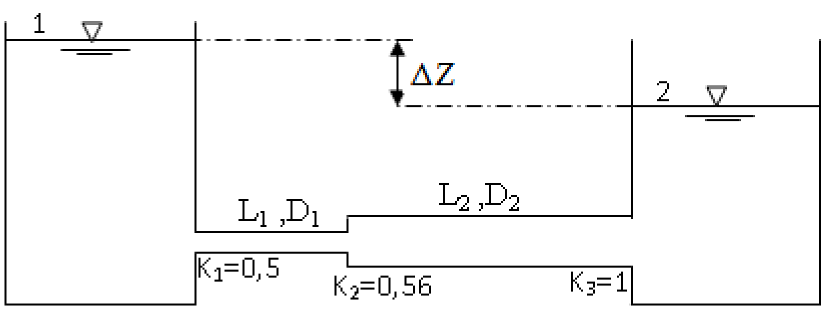
$$V_2=\frac{4\,Q}{\pi D_2^2}=\frac{4\;0{,}096}{3{,}14\;0{,}15^2}=\mathbf{5,43}\;\boldsymbol{m/s}$$

$$\frac{P_2}{\rho g}=60-\frac{5{,}43^2}{2\;9{,}81}\left(1+0{,}0178\frac{30}{0{,}15}+0{,}08\right)-\frac{3{,}057^2}{2\;9{,}81}\left(0{,}5+0{,}0167\frac{20}{0{,}2}\right)\approx\mathbf{52}\;\boldsymbol{m}$$

$$\boldsymbol{P_2}=\mathbf{510,12}\;\boldsymbol{k\,Pa}$$

**Exercice N°7 :**

Deux réservoirs est reliée par deux conduites placées en série de diamètre $d_1$=15 cm et $d_2$=30 cm et de longueur $L_1$=50 m et $L_2$=160 m. La rugosité des deux conduites est 0,1 mm et le débit d'écoulement est 0,1 $m^3$/s. Déterminer la différence de niveau de la surface libre entre les deux réservoirs (ΔH). (ρ=1000kg/$m^3$, ν=1.00510$^{-6}$ $m^2$/s)



**Solution :**

Appliquons l'équation de Bernoulli entre 1 et 2 :

$$\frac{P_1}{\rho g}+\frac{V_1^2}{2g}+Z_1=\frac{P_2}{\rho g}+\frac{V_2^2}{2g}+Z_2+\Delta H$$

On a :

$Z_1=0$ , $Z_2=\Delta Z = 80m$ et $P_1=P_2=Patm$

$V_1=V_2=0$ ( Niveau d'eau constante), alors :

$$\Delta Z=\Delta H=\lambda_1\frac{L_1}{D_1}\frac{V_1^2}{2g}+\lambda_2\frac{L_2}{D_2}\frac{V_2^2}{2g}+(K_1+K_2)\frac{V_1^2}{2g}+K_3\frac{V_2^2}{2g}$$

$$V_1=\frac{4\,Q}{\pi D_1^2}=\frac{4\;0{,}1}{3{,}14\;0{,}15^2}=\mathbf{5{,}66\;m/s}$$

$$V_2=\frac{4\,Q}{\pi D_2^2}=\frac{4\;0{,}1}{3{,}14\;0{,}3^2}=\mathbf{1{,}415\;m/s}$$

**Calculons maintenant $Re_1$ et $Re_2$ :**

$$Re_1=\frac{V_1\,D_1}{\nu}=\frac{5{,}66\;0{,}15}{1{,}005\;10^{-6}}=8{,}44\;10^5$$

$$Re_2=\frac{V_2\,D_2}{\nu}=\frac{1{,}415\;0{,}3}{1{,}005\;10^{-6}}=4{,}22\;10^5$$

L'équation de Halaand donne:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}=-1{,}8\;\log\left[\frac{6{,}9}{Re_1}+\left(\frac{\varepsilon/D_1}{3{,}7}\right)^{1{,}11}\right]\Rightarrow\lambda_1=0{,}0182$$

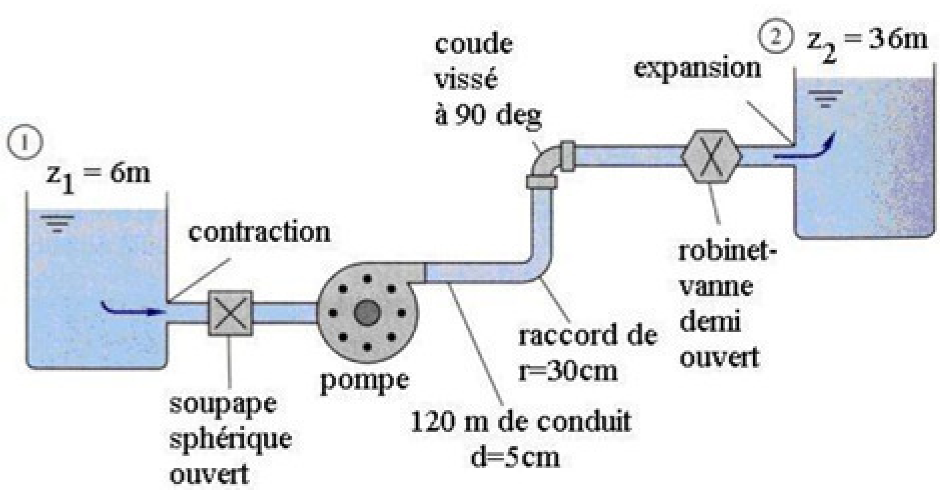
$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}=-1{,}8\;\log\left[\frac{6{,}9}{Re_1}+\left(\frac{\varepsilon/D_2}{3{,}7}\right)^{1{,}11}\right]\Rightarrow\lambda_2=0{,}0166$$

$$\Delta Z=\Delta H=0{,}0182\frac{50}{0{,}15}\frac{5{,}66^2}{2\;9{,}81}+0{,}0166\frac{160}{0{,}3}\frac{1{,}415^2}{2\;9{,}81}+(0{,}5+1)\frac{5{,}66^2}{2\;9{,}81}+\frac{5{,}66^2}{2\;9{,}81}$$

$$\Delta Z=\mathbf{14{,}89\;m}$$

**Exercice N°8 :**

L'eau ($\rho$=1000kg/m3, $\nu=1.00510^{-6}$ $m^2/s$) est pompée du réservoir 1 au réservoir 2 en utilisant une conduite de diamètre de 5 cm et de longueur de 120 m comme montré à la figure ci dessous. Le débit est de 0.006 $m^3/s$. La rugosité relative est de $\varepsilon/D$ = 0,001. Calculez la puissance de la pompe.




***Coefficient des pertes de charges singulières***

| Accessoire | K |
|---|---|
| sortie réservoir-conduite | 0.5 |
| Soupape sphérique ouverte | 6.9 |
| Raccord de r=30cm | 0.15 |
| Coude de 90 deg | 0.95 |
| Robinet-vanne demi-ouvert | 2.7 |
| Sortie vers un réservoir | 1.0 |

**Solution :**

Appliquons l'équation de Bernoulli entre 1 et 2 :

$$\frac{P_1}{\rho g}+\frac{V_1^2}{2g}+Z_1+H_P=\frac{P_2}{\rho g}+\frac{V_2^2}{2g}+Z_2+\Delta H$$

On a :

$Z_1$=6 m , $Z_2$= 36m et $P_1=P_2=Patm$

$V_1=V_2=0$ ( Niveau d'eau constante), alors :

$$H_P=Z_2-Z_1+\Delta H$$

$$\Delta H=\lambda\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}+\sum K_i\frac{V^2}{2g}$$

$$V=\frac{4Q}{\pi D^2}=3{,}06 m/s$$

$$Re=\frac{V\,D}{\upsilon}=152240$$

L'équation de Halaand donne:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=-1{,}8\ \log\left[\frac{6{,}9}{Re}+\left(\frac{\varepsilon/D}{3{,}7}\right)^{1{,}11}\right]\Rightarrow\lambda=0{,}0213$$

$$H_P=30+\left(0{,}0213\frac{120}{0{,}05}+12{,}2\right)\frac{3{,}06^2}{2\ 9{,}81}\approx\boldsymbol{60m}$$

La puissance de la pompe est :

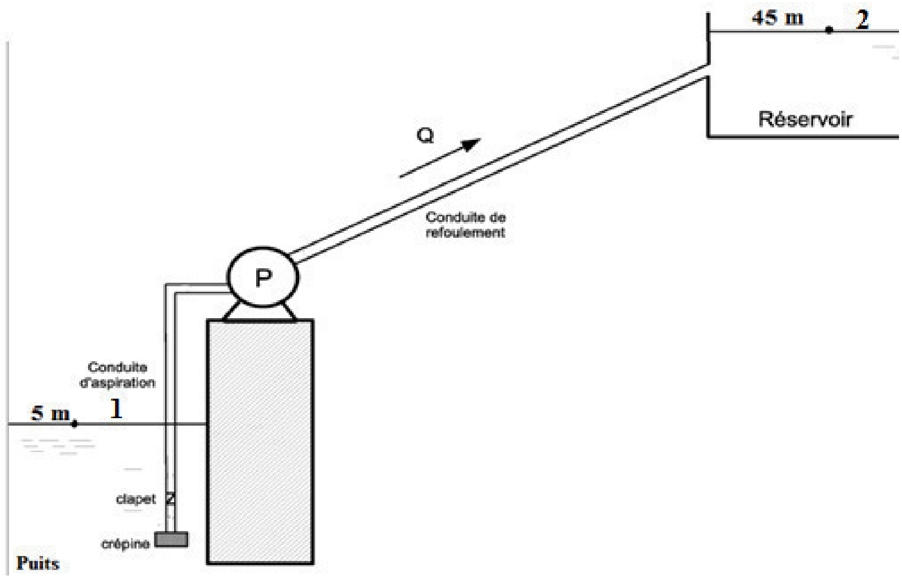
$P = \rho\ g\ Q\ H_P = \mathbf{3531,6}\ \boldsymbol{watt}$

**Exercice N°9:**

L'eau est pompée à partir d'un puits vers un réservoir de stockage. Si le débit de pompage est 10 l/s, déterminer la puissance de la pompe.

Données du problème :

- conduite d'aspiration : longueur La = 15 m, diamètre Da = 125 mm;
- conduite de refoulement : longueur Lr = 925 m, diamètre Dr = 80 mm;
- rugosité des conduites $\varepsilon$ = 0,1 mm;
- singularités dans le circuit : crépine $K_1$ = 3, clapet : $K_2$ = 1,2, coude $K_3$ = 0,134, l'entrée de réservoir : $K_4$ = 1 ;




**Solution :**

Appliquons l'équation de Bernoulli entre 1 et 2 :

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 + H_P = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2 + \Delta H$$

On a :

$Z_1$=5 m , $Z_2$= 45m et $P_1$=$P_2$=Patm

$V_1$=$V_2$ =0 ( Niveau d'eau constante), alors :

$$H_P = Z_2 - Z_1 + \Delta H$$

$$\Delta H = \lambda_1 \frac{L_a}{D_a}\frac{V_1^2}{2g} + \lambda_2 \frac{L_r}{D_r}\frac{V_2^2}{2g} + (K_1 + K_2 + K_3)\frac{V_1^2}{2g} + K_4 \frac{V_2^2}{2g}$$

$$V_1 = \frac{4Q}{\pi D_a^2} = 0{,}815\, m/s \;\; Re_1 = \frac{V_1 D_a}{\nu} = \frac{0{,}815\; 0{,}125}{10^{-6}} = 101875 \;\; , \frac{\varepsilon}{D_a} = 0{,}0008$$

L'équation de Halaand donne:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} = -1{,}8 \; \log\left[\frac{6{,}9}{Re_1} + \left(\frac{\varepsilon/D_a}{3{,}7}\right)^{1{,}11}\right] \Rightarrow \lambda_1 = 0{,}021$$

$$V_2 = \frac{4Q}{\pi D_r^2} = 1{,}99\, m/s \;\; Re_2 = \frac{V_1 D_r}{\nu} = \frac{1{,}99 \;\; 0{,}08}{10^{-6}} = 159200 \;\; , \frac{\varepsilon}{D_r} = 0{,}00125$$

De même :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} = -1{,}8 \; \log\left[\frac{6{,}9}{Re_2} + \left(\frac{\varepsilon/D_r}{3{,}7}\right)^{1{,}11}\right] \Rightarrow \lambda_2 = 0{,}022$$

$$\Delta H = 0{,}021 \frac{15}{0{,}125}\frac{0{,}815^2}{2\; 9{,}81} + 0{,}022 \frac{925}{0{,}08}\frac{1{,}99^2}{2\; 9{,}81} + (4{,}334)\frac{0{,}815^2}{2\; 9{,}81} + \frac{1{,}99^2}{2\; 9{,}81}$$

$$\boldsymbol{\Delta H = 51{,}77\; m}$$

$$H_P = 40 + 51{,}77 = \boldsymbol{91{,}77\; m}$$

$$P = \rho g Q H_P = \boldsymbol{9002{,}67\; Watt}$$

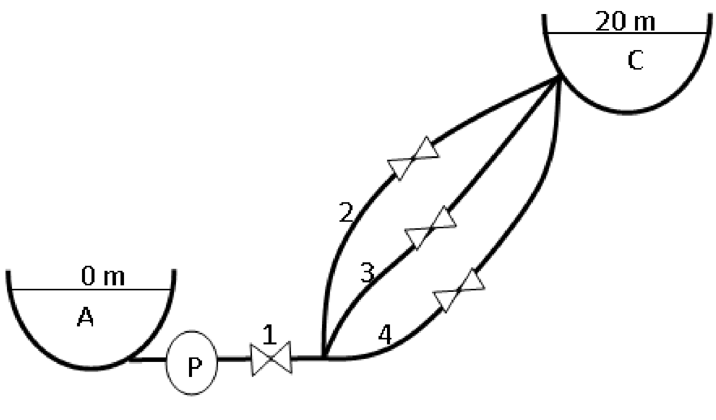
**Exercice N°10:**

Le réservoir « A » alimente le réservoir « C » à partir de trois canalisations multiples comme représentée dans la figure ci-dessous.

1. Calculer les débits $Q_2$, $Q_3$, $Q_4$
2. Calculer la puissance absorbée par la pompe.

Données : $Q_1$= 3m$^3$/s ,$\eta$=0,75

| conduite | L (m) | D (mm) | λ | ΣK |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 100 | 1200 | 0,015 | 2 |
| 2 | 1000 | 1000 | 0,02 | 3 |
| 3 | 1500 | 500 | 0,018 | 2 |
| 4 | 800 | 750 | 0,021 | 4 |



**Solution :**

1. **Les débits $Q_2$, $Q_3$, $Q_4$**

l'équation de Bernoulli entre B et C dans les trois conduites(voir la figure) donne:

$$\frac{P_B}{\rho g}+\frac{V_B^2}{2g}+Z_B=\frac{P_C}{\rho g}+\frac{V_C^2}{2g}+Z_C+\Delta H_2$$

$$\frac{P_B}{\rho g}+\frac{V_B^2}{2g}+Z_B=\frac{P_C}{\rho g}+\frac{V_C^2}{2g}+Z_C+\Delta H_3$$

$$\frac{P_B}{\rho g}+\frac{V_B^2}{2g}+Z_B=\frac{P_C}{\rho g}+\frac{V_C^2}{2g}+Z_C+\Delta H_4$$

En égalisant les trois relations précédentes, on trouve :

$$\Delta H_2=\Delta H_3=\Delta H_4 \Rightarrow \left(\lambda_2\frac{L_2}{D_2}+\sum K\right)\frac{V_2^2}{2g}=\left(\lambda_3\frac{L_3}{D_3}+\sum K\right)\frac{V_3^2}{2g}=\left(\lambda_4\frac{L_4}{D_4}+\sum K\right)\frac{V_4^2}{2g}$$

***Les conduites en parallèles ont la même perte de charge. Le débit total traversant toutes les conduites est la somme des débits***

L'application numérique donne:

$$\begin{cases} 23\dfrac{V_2^2}{2g}=56\dfrac{V_3^2}{2g} \\ 23\dfrac{V_2^2}{2g}=26{,}4\,\dfrac{V_4^2}{2g}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_3=0{,}64\,V_2 \\ V_4=0{,}933\,V_2\end{cases}$$

l'équation de continuité dans ce circuit hydraulique, montre que:

$$Q=Q_2+Q_3+Q_4=V_2S_2+V_3S_3+V_4\,S_4$$

$$S_2=\frac{\pi D_2^2}{4}=0{,}785\,m^2\,,\quad S_3=\frac{\pi D_3^2}{4}=\;0{,}196m^2\;\;et\;\;S_4=\frac{\pi D_4^2}{4}=0{,}44m^2$$

$$Q=3=0{,}785V_2+0{,}196\;\;V_3+0{,}44V_4\;=0{,}785V_2+0{,}196\;0{,}64\,V_2+0{,}44\;0{,}933\,V_2$$

on trouve:

$$V_2=2{,}27\;\;m/s \Rightarrow Q_2=\mathbf{1{,}782\;\;m^3/s}$$

$$V_3=1{,}45\;\;m/s \Rightarrow Q_3=\mathbf{0{,}285\;\;m^3/s}$$

$$V_4=2{,}12\;\;m/s \Rightarrow Q_4=\mathbf{0{,}933\;\;m^3/s}$$

2. **La puissance absorbée par la pompe**

Appliquons l'équation de Bernoulli entre A et C :

$$\frac{P_A}{\rho g}+\frac{V_A^2}{2g}+Z_A+H_P=\frac{P_C}{\rho g}+\frac{V_C^2}{2g}+Z_C+\Delta H$$

On a :

$Z_A$=0 m , $Z_C$= 20 m et $P_A$=$P_C$=Patm

$V_A$=$V_C$ =0 ( Niveau d'eau constante), alors :

$$H_P = Z_C - Z_A + \Delta H$$

$$\Delta H = \left(\lambda_1 \frac{L_1}{D_2} + \sum K\right)\frac{V_1^2}{2g} + \left(\lambda_2 \frac{L_2}{D_2} + \sum K\right)\frac{V_2^2}{2g}$$

$$V_1 = \frac{4Q}{\pi D^2} = 2{,}65\ m/s \ \ et\ V_2 = 2{,}27\ \ m/s$$

L'application numérique donne:

$$\Delta H = 7{,}2\ m$$

alors

$$H_P = 27{,}2\ m$$

$$P_a = \frac{P_h}{\eta} = \frac{\rho g\ Q\ H_P}{\eta} = \mathbf{1067,32\ kW}$$

# Bibliographie


A.Ameur, "Mécanique des fluides appliquée à l'eau: principe fondamentaux et exercices corrigés", Edition castilla,2009,ISBN:978.2.7135.3026.5

A, Lencastre, "Hydraulique Générale", Edition Eyrolles. 1996 ISBN: 2212018940

BEN HAMOUDA. R , "Notions de mécanique des fluides" , Centre de Publication Universitaire, Tunisie.2008 ISBN : 978-9973-37-494-3

Bruce R. Munson, Donald. F. Young,Theodore H. Okiishi et Wade W. Huebsch, "Fundamentals of Fluid Mechanics", sixth edition, John Wiley & Sons, Inc. 2009 ISBN 978-0470-26284-9

Carlier M., " Hydraulique Générale et Appliquée", Collection de la Direction des Etudes et Recherches d'EdF, n°14, 1986, Edition Eyrolles.

Clayton T. Crowe, Donald F.Elger, Barbara C.Williams and John A.Roberson, "Engineering Fluid Mechanics" , Ninth edition, John Wiley & Sons, Inc.2009 ISBN 978-0470-25977-1

Comolet, R : "Mécanique expérimentale des Fluides", Tome III: Exercices et problèmes corrigées. Editions Masson.1986,ISBN:2-225-80870-8

Frank.M.White ,"fluid mechanics, seven edition", McGraw-Hill Series in Mechanical Engineering ,2011,ISBN 978-0-07-352934-9

Renald V. Giles, Jack B.Evett and Cheng Liu, "Mécanique des Fluides et hydraulique", Série Schaum ,Mc Graw hill.1994 ISBN :0-07-023316-0

R. Ouziaux, J. Perrier: Mécanique des Fluides Appliquée, Dunod,2004, ISBN: 2100038591

Sakir A, Jean-Luc B,"Mécanique des fluides" Edition Dunod, 2011, ISBN: 978-2-10-056922-9

S. Candel ," Problèmes résolus de mécaniques des fluides" "Edition Dunod, 2005, ISBN : 6184594359814