تمهيد

تحتاج المؤسسات إلى القيام بالدراسات الميدانية لإيجاد الحلول اللازمة لبعض المشاكل الاقتصادية التي تواجهها، تتمثل هذه الدراسات في عمليات الاستقصاء التي تتكفل بها مصالح التسويق و البحث و التطوير، بهدف معرفة توجهات السوق و حاجات و رغبات المستهلك. كثيراً ما نشاهد أو نسمع في وسائل عن نتائج عمليات الاستقصاء التي أجرتها مؤسسة، مكتب للدراسات أو مجلة، ... حول آراء عينة معينة من المستهلكين عن منتجات جديدة طرحت في السوق أو عن سبب احتجاجهم عن علامة تجارية معينة. وفقاً لعلماء الإحصاء أن تلك النتائج الإحصائية عن العينة المدروسة، ترتكز على أسس و قواعد رياضية تستند عليها العمليات المختلفة للاستقصاء، بحيث يتم الاستدلال بها على معلمات مجتمع المستهلكين الذي أخذت منه. كل هذا يتطلب فهم العلاقات الرياضية بين مختلف خصائص مجتمع المستهلكين، المتمثلة في المتوسط الحسابي (**m**)، التباين (**V_x**)، الانحراف المعياري (**σ_x**)، و مقارنتها مع مثيلاتها في العينة التي سحبت منها، و هذا ما سنتطرق إليه في هذا البند. نحاول من خلال هذا الفصل الربط بين حساب الاحتمالات و الاحصاء الاستدلالي، فكثيراً ما نكون على علم بالخصائص الذي يتميز به المجتمع و نحاول استنتاج تلك الخصائص في عينة تنتمي إلى ذلك المجتمع، بمعنى آخر ننطلق من النتيجة (خاصية موجودة في مجتمع) على أن نتأكد منها من خلال الدليل (الموجود في العينة المختارة).

1. مفهوم نظرية المعاينة

تعرف نظرية المعاينة أو ما يصطلح عليه بالاستدلال الاستنتاجي (أو الصوري) بأنه "تلك العملية التي يتم من خلالها الانتقال من النتيجة المعروفة مسبقاً من المجتمع على يتم إظهار دليلها في العينة المدروسة، أو بمعنى آخر استنتاج الواقع الموجود في العينة من خلال الأحكام و القواعد العامة التي يتميز بها المجتمع". و لكي يزيد فهمنا لهذا التعريف نستعين بالمثال التالي:

مثال.1: نعتبر مجتمعاً عدد عناصره **N**؛ وسطه الحسابي **m** و انحرافه المعياري **σ**. نسحب منه عينة حجمها $\mathbf{n_1}$؛ وسطها الحسابي $\mathbf{\bar{x}_1}$ (الذي يمكن أن تختلف قيمته عن **m**) و انحرافها المعياري $\boldsymbol{\sigma'_1}$ (الذي يمكن أن تختلف قيمته عن **σ**). إذا قمنا بسحب عينة حجمها $\mathbf{n_2}$؛ وسطها الحسابي $\mathbf{\bar{x}_2}$ و انحرافها المعياري $\boldsymbol{\sigma'_2}$. إذا كررنا هذه العملية مع جميع العينات التي باستطاعتنا سحبها من هذا المجتمع، فإنه سيتوفر لدينا عدداً كبيراً من القيم للوسط الحسابي للعينات. الأمر الأكيد أنه لا يمكن لهذه الأوساط الحسابية أن تكون متساوية، كون أن كل واحد من هذه الأخيرة يتأثر بقيم عناصره. بطبيعة الحال إذا تم سحب هذه العناصر بالصدفة فإن قيمة الوسط الحسابي للعينة يعتمد هو الآخر على الصدفة، على هذا الأساس، في هذه الحالة يمكننا أن نقول أن الوسط الحسابي لكل العينات هو الآخر متغير عشوائي، يأخذ قيماً مختلفة و يتبع توزيعاً احتمالياً معيناً قد يختلف عن توزيع المجتمع الأصلي. يسمى هذا المجتمع الجديد للأوساط الحسابية **بتوزيع المعاينة للوسط الحسابي للمجتمع**. أنظر الجدول.**1**.

جدول.1: وصف معلمات المجتمع، العينة و المعاينة

	حجم	الوسط الحسابي	الإنحراف المعياري
المجتمع	**N**	$\mathbf{m}=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{N}$	**σ**
العينة	**n**	$\mathbf{\bar{X}}=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$	$\boldsymbol{\sigma'_i}$
المعاينة	**n***	$\bar{\bar{X}}=\mathrm{m}$	$\boldsymbol{\sigma_i^*}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

نستنتج أن توزيع المعاينة للوسط الحسابي للعينة هو التوزيع الاحتمالي للمجتمع الذي أخذت منه هذه العينة. فمن خلال معلمات المجتمع **(m و σ_X)** نحسب احتمال أن يكون المتوسط الحسابي **($\bar{X}$)** للعينة (n) المسحوبة من المجتمع (N) محصورة بين قيمتين (**$P(a<\bar{x}<b)$**). فنظرية المعاينة تجيب على المسائل المتعلقة بالاستنتاجات أي التأكد من الخاصية الموجودة في المجتمع من خلال إيجاد دليلها في العينة.

2. توزيع المعاينة للوسط الحسابي للعينات

نعتبر مجتمع متوسطه الحسابي **m** و انحرافه المعياري **σ**، نسحب منه عينات ذات حجم **n** بدون إرجاع أو بالإرجاع. بعد عملية السحب سنلاحظ أن الوسط الحسابي للعينات يختلف من عينة لأخرى، في هذا السياق يكون هدف نظرية المعاينة هو إيجاد التوزيع الاحتمالي للعينة لأنه متغير عشوائي، و نبين أن توزيع المعاينة للوسط الحسابي يخضع إلى توزيع طبيعي باستعمال **نظرية النهاية المركزية** بالمعلمتين **σ_i^*** و **$m_{\bar{\bar{X}}}=$**.

جدول.2: توزيع المعاينة للوسط الحسابي للعينات

السحب بالإرجاع	السحب بدون إرجاع	
$\bar{X} \curvearrowright N(m,\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$	$\bar{X} \curvearrowright N(m,\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$	$N \longrightarrow +\infty$ أو $n\leq(0.05)N$
$\bar{X} \curvearrowright N(m,\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$	$\bar{X} \curvearrowright N(m,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.\sqrt{\frac{N-n}{N-1}})$	محدودة بـN أو $n>(0.05)N$

ملاحظة: توزيع المعاينة للوسط الحسابي للعينات يخضع إلى التوزيع الطبيعي إذا كانت **$n\geq30$**.

مثال.1: تنتج مؤسسة نوعا من البطاريات مدة إشتغالها المتوسطة هي 1000سا بانحراف معياري قدره 40سا.
أحسب احتمال أن لا تقل مدة الاشتغال المتوسطة لـ 60 بطارية من منتوج هذه المؤسسة عن 950سا و لا تزيد عن 1100سا.

الحل: $P(950\leq\bar{X}\leq1100)=?$ **$n=60$, $\sigma=40\ h$ ، $m=1000\ h$ ، $N=800$**

X: نفرض أنها تتوزع توزيع طبيعي
ملاحظة: إذا لم ترد قيمة حجم المجتمع N في المعطيات فإننا نعتبره يؤول إلى ∞. ($N\longrightarrow+\infty$)

$\bar{X} \curvearrowright (m,\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, $\bar{X} \curvearrowright N(1000,\frac{40}{\sqrt{60}})$, $\bar{X} \curvearrowright N(1000, 5.16)$
$T \curvearrowright N(0,1)$ $T=\frac{\bar{X}-1000}{5.16}$

$$P(950\leq\bar{X}\leq1100)=P(\frac{950-1000}{5.16}\leq\frac{\bar{X}-1000}{5.16}\leq\frac{1100-1000}{5.16})=P(-9.68\leq T\leq19.37)=\mathbf{0.98}$$ **(Table.1de Student)**

مثال.2: تقوم وكالة سياحية سنوياً بتنظيم رحلات إلى البقاع المقدسة. تشير الخبرة السابقة لمدير الوكالة إلى أن متوسط أعمار المعتمرين الذي يتقدمون إلى وكالته هو 50 سنة بانحراف معياري 05 سنوات. نفرض أن عمر المعتمرين متغير عشوائي يخضع لتوزيع طبيعي.

1- أحسب احتمال أن لا يفوق متوسط أعمار 44 معتمر ممن يستقلون الرحلات عن هذه الوكالة عن 55 سنة.

2- أحسب احتمال أن لا يفوق متوسط أعمارهم 50 معتمر عن 60 سنة و لا يقل عن 45 سنة.

الحل: **$\sigma=05$ ، $m=50$ ، $N\longrightarrow+\infty$**

.1 **$P(\bar{X}\leq55)$ $n=44$**

$\bar{X} \curvearrowright N(m,\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$. $\bar{X} \curvearrowright N(50,\frac{05}{\sqrt{44}})$. $\bar{X} \curvearrowright N(50, 0.125)$ $T=\frac{\bar{X}-50}{0.753}$ $T \curvearrowright N(0,1)$

$$P(\bar{X}\leq55)=P(\frac{\bar{X}-50}{0.753}\leq\frac{55-50}{0.753})=P(T\leq6.64)=\mathbf{0.9999}$$

$P(45 \leq \bar{X} \leq 60) = ?$ $n=50$ .2

$\bar{X} \rightsquigarrow N(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$. $\bar{X} \rightsquigarrow N(50, \frac{05}{\sqrt{50}})$. $\bar{X} \rightsquigarrow N(50, 0.125)$ $T = \frac{\bar{X}-50}{0.753}$ $T \rightsquigarrow N(0, 1)$,

$$P(45 \leq \bar{X} \leq 60) = P(\frac{45-50}{0.707} \leq T \leq \frac{60-50}{0.707}) = P(-6.64 \leq T \leq 14.44) =$$
$$P(T \leq 13.28) - [1 - P(T \leq 7.07)] = 0.9999 - 1 + 0.9999 = 0.9998$$

2. توزيع المعاينة للنسب

نعتبر مجتمع من **N** عنصراً نسبة عناصره التي تتميز بخاصية معينة **[P]**. نسحب منه عينة ذات حجم **n**، نسبة عناصرها التي تتميز بالخاصية $[\hat{P}]$. هذه الأخيرة تتغير من عينة إلى أخرى و قيمها تعتمد على عناصر العينة التي سحبت بالصدفة، على هذا الأساس إن $[\hat{P}]$ متغير عشوائي.

جدول.2: توزيع نسب عينات مجتمع معين

السحب بالإرجاع	السحب بدون إرجاع	
$\hat{P} \rightsquigarrow N(p, \sqrt{\frac{p.q}{n}})$	$\hat{P} \rightsquigarrow N(p, \sqrt{\frac{p.q}{n}})$	$N \longrightarrow +\infty$ أو $n \leq (0.05)N$
$\hat{P} \rightsquigarrow N(p, \sqrt{\frac{p.q}{n}})$	$\hat{P} \rightsquigarrow N(p, \sqrt{\frac{p.q}{n}} . \sqrt{\frac{N-n}{N-1}})$	N محدودة بـ أو $n > (0.05)N$

إذا كان **$n \geq 30$** فإن توزيع نسب العينات يخضع إلى التوزيع الطبيعي، و إن لم يكن كذلك فإنه يجب علينا أن نفرض بأنه يتوزع توزيع طبيعي.

مثال.3: **30%** من زبائن مقهى معين يفضلون شرب الشاي بدلاً من القهوة. نفرض أن نسب عينة الزبائن تتوزع توزيعاً طبيعياً؛

1. أحسب احتمال أن لا تزيد نسبة الذين يفضلون شرب الشاي في هذا المقهى في عينة من **40** زبون عن **28%**.

2. ما هو احتمال أن تزيد نسبة الذين يفضلون شرب الشاي في هذا المقهى ضمن عينة من **60** زبون عن **40%**.

3. ما هو احتمال أن لا تقل نسبة الذين يفضلون شرب الشاي في هذا المقهى ضمن عينة من **55** زبون عن **25%**.و لا تزيد عن **50%**.

<u>الحل</u>: **$q=0.7$ $P= 0.3$.** و $\hat{p}$: نسبة زبائن المقهى الذين يفضلون شرب الشاي.

.1 $P(\hat{p} \leq 0.28) = ?$: $n=40$،

- $\hat{p} \rightsquigarrow N(P, \sqrt{\frac{p.q}{n}})$. $\hat{p} \rightsquigarrow N(0.3, \sqrt{\frac{(0.3).(0.7)}{40}})$. $\hat{p} \rightsquigarrow N(0.3, 0.0724)$ $Z = \frac{\hat{p}-0.3}{0.0724}$ $T \rightsquigarrow N(0, 1)$,

$$P(\hat{p} \leq 0.28) = P(T \leq \frac{0.28-0.3}{0.0724}) = P(T \leq -0.27) = 1 - P(T \leq +0.27) = 1 - 0.6064 = 0.3936$$

.2 $P(\hat{p} > 0.38) = ?$: $n=60$،

- $\hat{p} \rightsquigarrow N(P, \sqrt{\frac{p.q}{n}})$. $\hat{p} \rightsquigarrow N(0.3, \sqrt{\frac{(0.3).(0.7)}{60}})$. $\hat{p} \rightsquigarrow N(0.3, 0.059)$ $T = \frac{\hat{p}-0.3}{0.059}$ $T \rightsquigarrow N(0, 1)$,

$$\mathbf{P(\hat{p}>0.38)} = P(T > \frac{\mathbf{0.38}-0.3}{0.059}) = P(T > +\mathbf{1.35}) = 1- P(T \leq +\mathbf{1.35}) = 1-0.9115= \mathbf{0.0885}$$

.3 $\mathbf{P(0.25 \leq \hat{p} \leq 0.5) = ?}$: $\mathbf{n=55}$،

$$\hat{p} \curvearrowright N(P, \sqrt{\frac{p.q}{n}}). \quad \hat{p} \curvearrowright N(0.3, \sqrt{\frac{(0.3).(0.7)}{55}}). \quad \hat{p} \curvearrowright N(0.3, \mathbf{0.061}) \quad \mathbf{T} = \frac{\hat{p}-0.3}{\mathbf{0.061}} \quad \mathbf{T} \curvearrowright N(0, 1),$$

$$\mathbf{P(0.25 \leq \hat{p} \leq 0.5)} = P(\frac{\mathbf{0.5}-0.3}{\mathbf{0.061}} \leq T \leq \frac{\mathbf{0.25}-0.3}{\mathbf{0.061}}) = P(Z \leq +\mathbf{3.27}) - P(T \leq -\mathbf{0.819})$$

$$=0.999 - \mathbf{1}- P(T \leq +\mathbf{0.819}) = 0.999- 1-0.791= \mathbf{0.79}$$

.3 توزيع المعاينة للفروق بين الأوساط الحسابية

نعتبر مجتمعين الأول حجمه $\mathbf{N_1}$، و متوسطه $\mathbf{m_1}$، و انحرافه المعياري $\boldsymbol{\sigma_1}$ نسحب منه عينة ذات حجم $\mathbf{n_1}$ وسطها الحسابي $\mathbf{\bar{x}_1}$؛ و مجتمع ثاني حجمه $\mathbf{N_2}$، و متوسطه $\mathbf{m_2}$، و انحرافه المعياري $\boldsymbol{\sigma_2}$ نسحب منه عينة ذات حجم $\mathbf{n_2}$ وسطها الحسابي $\mathbf{\bar{x}_2}$؛ السؤال الذي يأمل أي إحصائي إلى الإجابة عنه هو ما هو التوزيع الاحتمالي للفرق بين الوسطين الحسابيين للعينتين المسحوبتين من المجتمعين الأول و الثاني. للإجابة على ذلك

المجتمع الثاني

$$\mathbf{\bar{x}_2} \curvearrowright N(\mathbf{m_2}, \boldsymbol{\sigma_2^*})$$

$$\boldsymbol{\sigma_2^*} = \begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{\sigma_2}}{\sqrt{\mathbf{n_2}}} \\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma_2}}{\sqrt{\mathbf{n_2}}} \cdot \sqrt{\dfrac{N_2-n_2}{N_2-1}} & \text{سحب بدون إرجاع } n_2 > 0.05\, N_2 \end{cases}$$

المجتمع الأول

$$\mathbf{\bar{x}_1} \curvearrowright N(\mathbf{m_1}, \boldsymbol{\sigma_1^*})$$

$$\boldsymbol{\sigma_1^*} = \begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{\sigma_1}}{\sqrt{\mathbf{n_1}}} \\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma_1}}{\sqrt{\mathbf{n_1}}} \cdot \sqrt{\dfrac{N_1-n_1}{N_1-1}} & \text{سحب بدون إرجاع } n_1 > 0.05\, N_1 \end{cases}$$

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \curvearrowright N(m_1 - m_2, \sqrt{(\sigma_1^{*2}) + (\sigma_2^{*2})})$$

مثال.4: يقوم مصنع ما بتغليف الدقيق باستعمال آلتين، بعد عملية التقصي تبين أن متوسط وزن **2000** كيس التي تنتجها الآلة الأولى هو **1050** غ بانحراف معياري قدره **50** غ. و أن متوسط وزن **1800** كيس التي تنتجها الآلة الثانية هو **1015** غ بانحراف معياري قدره **40** غ. إذا علمت أن أوزان أكياس الدقيق يخضع إلى التوزيع الطبيعي:

.1 أحسب احتمال أن <u>**يقل**</u> متوسط وزن **60** كيس من تلك التي تنتجها الآلة الأولى عن متوسط وزن **50** كيس من تلك التي تنتجها الآلة الثانية <u>**بأقل**</u> من **20** غ.

.2 أحسب احتمال أن عينة عشوائية من 77 كيس المنتجة من طرف الآلة الأولى لها وزن <u>**على الأقل**</u> 10 غرامات <u>**أكثر**</u> من عينة حجمها 93 كيس المنتجة من طرف الآلة الثانية.

الحل

$$\mathbf{m_1=1050\ kg,\quad \sigma_1 = 50\ kg,\quad N_1=2000}$$
$$\mathbf{m_2=1015\ kg,\quad \sigma_2 = 40\ kg,\quad N_2=1800}$$

1

$\mathbf{P(\bar{X}_2 - \bar{X}_1 \leq 20) = ?}$ $n_1=60,\ n_2=50$

$$\curvearrowright N(\mathbf{1050}, \frac{\mathbf{50}}{\sqrt{60}})\mathbf{\bar{x}_1} \qquad \curvearrowright N(\mathbf{1015}, \frac{\mathbf{40}}{\sqrt{50}})\mathbf{\bar{x}_2}$$

$$(\bar{X}_2 - \bar{X}_1) \curvearrowright N\ (\mathbf{1015 - 1050}, \sqrt{\left(\frac{50}{\sqrt{60}}\right)^2 + \left(\frac{40}{\sqrt{50}}\right)^2})$$

$$(\bar{X}_2 - \bar{X}_1) \curvearrowright N\ (\mathbf{-35, 8.574})$$

$$\mathbf{T} \curvearrowright N(0, 1) \qquad \mathbf{T} = \frac{(\bar{X}_2-\bar{X}_1)-(-35)}{8.574} = \frac{(20)-(-35)}{8.574} = \mathbf{6.4147}$$

$$\mathbf{P(\bar{X}_2 - \bar{X}_1 \leq 20)} = P(T \leq 6.4147) = \mathbf{0.9999}$$

2

$\mathbf{P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \geq 10) = ?}$ ،$n_1=77,\ n_2=93$

$$\curvearrowright N(\mathbf{1050}, \frac{\mathbf{50}}{\sqrt{77}})\mathbf{\bar{x}_1} \qquad \curvearrowright N(\mathbf{1015}, \frac{\mathbf{40}}{\sqrt{93}})\mathbf{\bar{x}_2}$$

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \curvearrowright N\ (\mathbf{1050 - 1015}, \sqrt{\left(\frac{50}{\sqrt{77}}\right)^2 + \left(\frac{40}{\sqrt{93}}\right)^2})$$

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \curvearrowright N\ (\mathbf{+35, 7.047})$$

$$\mathbf{T} \curvearrowright N(0, 1) \qquad \mathbf{T} = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(+35)}{7.047} = \frac{(10)-(+35)}{7.047} = \mathbf{-3.547}$$

$$\mathbf{P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \geq 10)} = P(T \geq -3.547) = P(T \leq +3.547) = \mathbf{0.999}$$

ملاحظة: كيفية كتابة العملية المطلوبة عند حساب الاحتمال

لا يزيد $\bar{X}_1$ عن $\bar{X}_2$ بأكثر من **a**.	$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \le a$
يزيد $\bar{X}_1$ عن $\bar{X}_2$ بأكثر من **a**.	$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 > a$
لا يقل $\bar{X}_1$ عن $\bar{X}_2$ بأقل من **a**.	$\bar{X}_2 - \bar{X}_1 \ge a$
يقل $\bar{X}_1$ عن $\bar{X}_2$ بأقل من **a**.	$\bar{X}_2 - \bar{X}_1 < a$

4. توزيع المعاينة للفروق بين النسب

نعتبر مجتمعين الأول عدده **N1**، نسبة عناصره التي تتميز بخاصية معينة هي **P1**، نسحب منه عينة ذات حجم **n1** نسبة الخاصية التي تتميز بها هذه العينة هي $\hat{P}_1$. و المجتمع الثاني عدده **N2**، نسبة عناصره التي تتميز بخاصية معينة هي **P2**، نسحب منه عينة ذات حجم **n2** نسبة الخاصية التي تتميز بها هذه العينة هي $\hat{P}_2$. وفقاً لنظرية المعاينة فإن التوزيع الاحتمالي للفرق بين نسبتي الخاصيتين التين يتميز بهما المجتمعين هي كالآتي:

المجتمع الأول

$$\hat{P}_1 \curvearrowright N(P_1, \sigma_1^*)$$

$$\sigma_1^* = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{p_1 . q_1}{n_1}} \\ \sqrt{\dfrac{p_1 . q_1}{n_1}} . \sqrt{\dfrac{N_1 - n_1}{N_1 - 1}} & \text{سحب بدون إرجاع } n_1 \ge 0.05\, N_1 \end{cases}$$

المجتمع الثاني

$$\hat{P}_2 \curvearrowright N(P_2, \sigma_2^*)$$

$$\sigma_2^* = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{p_2 . q_2}{n_2}} \\ \sqrt{\dfrac{p_2 . q_2}{n_2}} . \sqrt{\dfrac{N_2 - n_2}{N_2 - 1}} & \text{سحب بدون إرجاع } n_2 \ge 0.05\, N_2 \end{cases}$$

$$\hat{P}_1 - \hat{P}_2 \curvearrowright N\left(P_1 - P_2, \sqrt{\left(\sigma_1^{*2}\right) + \left(\sigma_2^{*2}\right)} \right)$$

مثال.5: اقترحت على عمال مصنع معين صيغة جديدة للإنتاج، فكانت نسبة الموافقين في الورشة A مكونة من 500 عامل هي 60%، و فيما كانت نسبة الموافقين على هذه الصيغة في ورشة B مكونة من 400 عامل هي 65%.

1- أحسب احتمال أن لا تزيد نسبة الموافقين على هذه الصيغة في عينة مكونة من 40 عامل من الورشة A عن نسبة الموافقين لعينة من 60 عامل في الورشة B بأكثر من 8%.

2- ما هو احتمال أن تقل نسبة الموافقين على هذه الصيغة في عينة مكونة من 30 عامل من الورشة A عن نسبة الموافقين لعينة من 35 عامل في الورشة B بأكثر من 10%.

الحل: نفرض أن العينتين في المجتمعين يتوزعون توزيعاً طبيعياً

1. احتمال $P(\hat{P}_1 \leq \hat{P}_2 + 0.08) = ?$ أو $P(\hat{P}_1 - \hat{P}_2 \leq +0.08) = ?$

الورشة A	الورشة B
$n_1=40$	$n_2=60$
$\hat{P}_2 \; N\left(65\%, \sqrt{\frac{0.65.(0.35)}{60}}\right)$	$\hat{P}_1 \; N\left(60\%, \sqrt{\frac{0.6.(0.4)}{40}}\right)$

$$\hat{P}_1 - \hat{P}_2 \; N\left(P_1 - P_2, \sqrt{\left({\sigma_1^*}^2\right) + \left({\sigma_2^*}^2\right)} \right)$$

$$\hat{P}_1 - \hat{P}_2 \; N\left(0.6 - 0.65, \sqrt{\left(\sqrt{\frac{0.6.(0.4)}{40}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{0.65.(0.35)}{60}}\right)^2} \right)$$

$$\hat{P}_1 - \hat{P}_2 \; N(-0.05, \; 0.0989)$$

$$T = \frac{(\hat{P}1 - \hat{P}2) - (P1 - P2)}{\sqrt{\left({\sigma_1^*}^2\right) + \left({\sigma_2^*}^2\right)}} = \frac{0.08 - (-0.05)}{0.0989} = \mathbf{1.3144}$$

$\mathbf{P(\hat{P}_1 \leq \hat{P}_2 + 0.08)} = P(\hat{P}_1 - \hat{P}_2 \leq 0.08)$
$= P(T \leq 1.3144) = \mathbf{0.9049}$

2. احتمال $P(\hat{P}_2 \geq \hat{P}_1 + 0.1) = ?$ أو $P(\hat{P}_2 - \hat{P}_1 \geq +0.1) = ?$

الورشة A	الورشة B
$n_1=30$	$n_2=35$
$\hat{P}_2 \; N\left(65\%, \sqrt{\frac{0.65.(0.35)}{35}}\right)$	$\hat{P}_1 \; N\left(60\%, \sqrt{\frac{0.6.(0.4)}{30}}\right)$

$$\hat{P}_2 - \hat{P}_1 \; N\left(P_2 - P_1, \sqrt{\left({\sigma_1^*}^2\right) + \left({\sigma_2^*}^2\right)} \right)$$

$$\hat{P}_2 - \hat{P}_1 \; N\left(0.6 - 0.65, \sqrt{\left(\sqrt{\frac{0.6.(0.4)}{30}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{0.65.(0.35)}{35}}\right)^2} \right)$$

$$\hat{P}_2 - \hat{P}_1 \; N(+0.05, \; 0.1204)$$

$$T = \frac{(\hat{P}2 - \hat{P}1) - (P2 - P1)}{\sqrt{\left({\sigma_1^*}^2\right) + \left({\sigma_2^*}^2\right)}} = \frac{0.1 - 0.05}{0.1204} = \mathbf{0.415}$$

$\mathbf{P(\hat{P}_2 \geq \hat{P}_1 + 0.1)} = P(\hat{P}_2 - \hat{P}_1 \geq 0.1) = P(T \geq 0.415)$
$= 1 - P(T < 0.415) = 1 - (0.6591) = \mathbf{0.3409}$