Corrigé de TD N° 01 d'Electricité

3eme partie : ELECTROSTATIQUE

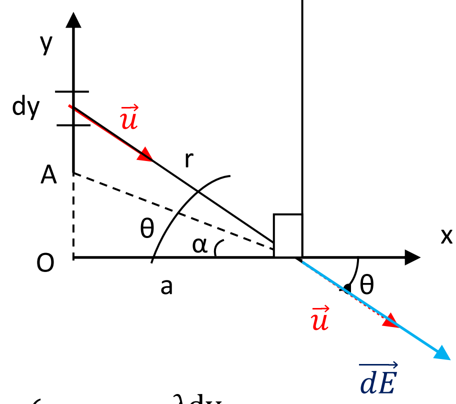
Distribution de Charges

Exercice 5 :

- **Les composantes du champ électrique dE_x et dE_y qui résultent de la charge se trouvant dans l'élément élémentaire de longueur dy défini par l'angle θ.**

Le champ électrique élémentaire $d\vec{E}$, au point M, créé par l'élément de charge linéaire dq présent dans l'élément de longueur dl

La charge se trouve sur l'axe (Oy) donc dl=dy et dq=λdy



$d\vec{E} = k\frac{dq}{r^2}\,\vec{u}$

(avec r est la distance entre la charge élémentaire dq

et le point M) et $\vec{u}$ est dirigé de dq vers le point M)

$\vec{u} = \cos\theta\ \vec{\imath} - \sin\theta\,\vec{\jmath}$

$$d\vec{E} = k\frac{dq}{r^2}\,\vec{u} = k\frac{\lambda dy}{r^2}(\cos\theta\ \vec{\imath} - \sin\theta\,\vec{\jmath}) \Rightarrow \begin{cases} dE_X = k\dfrac{\lambda dy}{r^2}cos\theta \\ dE_y = -k\dfrac{\lambda dy}{r^2}sin\theta \end{cases}$$

Nous avons trois variables : y,r et θ ; il faut choisir une variable et écrire les deux autres en fonction de cette variable

Dans ce cas la variable choisie est θ qui varie de α à π/2. Il faut écrire r et y en fonction de θ

$\cos\theta = \frac{a}{r} \Rightarrow r = \frac{a}{\cos\theta}$ avec « a » est la distance OM et elle ne dépend pas de θ

$$\text{tg}\,\theta = \frac{y}{a} \Rightarrow y = a\ \text{tg}\theta$$

$$\Rightarrow dy = a\ d(tg\ \theta) = \frac{a}{cos^2\theta}d\theta$$

$$\begin{cases} dE_X = k\dfrac{\lambda\dfrac{a}{cos^2\theta}d\theta}{\dfrac{a^2}{cos^2\theta}}cos\theta \\ dE_y = -k\dfrac{\lambda\dfrac{a}{cos^2\theta}d\theta}{\dfrac{a^2}{cos^2\theta}}sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dE_X = k\dfrac{\lambda}{a}cos\theta d\theta \\ dE_y = -k\dfrac{\lambda}{a}sin\theta d\theta \end{cases}$$

- **Les composantes E_x et E_y du champ électrique crée par le fil (Ay) et son module**

La charge étudié change ou se situe du point A correspondant à l'angle α jusqu'à l'infini qui correspond à l'angle π/2

$$\begin{cases} E_X = \int_{\alpha}^{\pi/2} dE_X = k\dfrac{\lambda}{a}\int_{\alpha}^{\pi/2} cos\theta d\theta \\ E_y = \int_{\alpha}^{\pi/2} dE_y = -k\dfrac{\lambda}{a}\int_{\alpha}^{\pi/2} sin\theta d\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_X = k\dfrac{\lambda}{a}(\sin(\pi/2) - sin\alpha) \\ E_y = k\dfrac{\lambda}{a}(-\cos(\pi/2) + \cos\alpha) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_X = k\dfrac{\lambda}{a}(1 - sin\alpha) \\ E_y = k\dfrac{\lambda}{a}cos\alpha \end{cases}$$

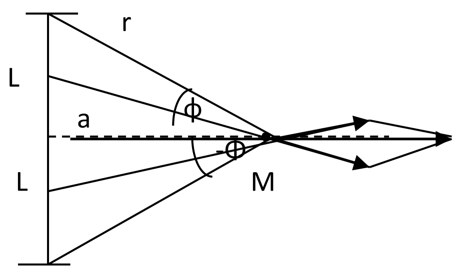
$$\Rightarrow \vec{E} = k\frac{\lambda}{a}(1 - sin\alpha)\,\vec{\imath} + k\frac{\lambda}{a}cos\alpha\,\vec{\jmath}$$

Le module du champ électrique

$$|\vec{E}| = \sqrt{\left(k\frac{\lambda}{a}(1 - sin\alpha)\right)^2 + \left(k\frac{\lambda}{a}cos\alpha\right)^2}$$

- **L'expression du champ électrique au point M équidistant des extrémités du fil de longueur 2L**

Dans ce cas l'angle θ varie de (-Φ) à Φ



$$\begin{cases} E_X = \int_{-\Phi}^{\Phi} dE_X = k\frac{\lambda}{a}\int_{-\Phi}^{\Phi} cos\theta d\theta \\ E_y = \int_{-\Phi}^{\Phi} dE_y = -k\frac{\lambda}{a}\int_{-\Phi}^{\Phi} sin\theta d\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_X = k\frac{\lambda}{a}(\sin\Phi - sin(-\Phi)) \\ E_y = -k\frac{\lambda}{a}(-\cos\Phi - (-\cos(-\Phi))) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_X = k\dfrac{\lambda}{a}(sin\Phi + sin\Phi) \\ E_y = k\dfrac{\lambda}{a}(cos\ \alpha - \cos\alpha) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = 2k\frac{\lambda}{a}sin\Phi\ \vec{\imath}$$

Lorsqu'on a une symétrie par rapport à l'axe (Ox), le champ électrique aura une seule composante suivant l'axe des x, l'autre composante serait nulle.

$sin\Phi = \frac{L}{r} = \frac{L}{\sqrt{L^2+a^2}}$ donc $\vec{E} = 2k\frac{\lambda L}{a\sqrt{L^2+a^2}}\ \vec{\imath},\ r = \sqrt{L^2 + a^2}$

- **Le champ électrique pour un fil infini**

Dans ce cas θ varie de ($-\pi/2$) à $\pi/2$

$$\begin{cases} E_X = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} dE_X = k\frac{\lambda}{a}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} cos\theta d\theta \\ E_y = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} dE_y = -k\frac{\lambda}{a}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} sin\theta d\theta \end{cases}$$

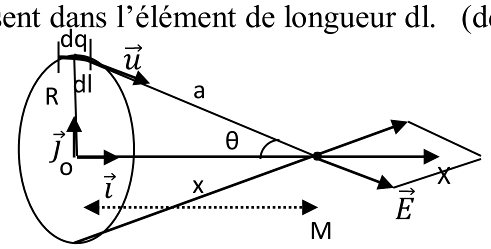
$$\Rightarrow \begin{cases} E_X = k\dfrac{\lambda}{a}(\sin\pi/2 - sin(-\pi/2)) \\ E_y = -k\dfrac{\lambda}{a}(-\cos\pi/2 + \cos(-\pi/2)) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_X = k\dfrac{\lambda}{a}(sin\ \pi/2 + \sin\pi/2) \\ E_y = k\dfrac{\lambda}{a}(cos\ \pi/2 - \cos\pi/2) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \vec{E} = 2k\frac{\lambda}{a}\ \vec{\imath}$=

Exercice 6 :

1- **Champ électrostatique** On cherche le champ élémentaire $\overrightarrow{dE}$ créé par l'élément de Charge dq présent dans l'élément de longueur dl. (dq=λdl)



$$\overrightarrow{dE} = \frac{kdq}{a^2}\vec{u} \Rightarrow \overrightarrow{dE} = \frac{k\lambda \mathrm{dl}}{R^2+x^2}(\cos\theta\vec{\imath} - \sin\theta\vec{\jmath})$$

D'après la relation de Pitagorth $a^2=R^2+x^2$ et $\vec{u}= \cos\theta\vec{\imath} - \sin\theta\vec{\jmath}$

Nous avons une symétrie par rapport à l'axe (Ox) donc le champ électrique a une seule composante E_x, ($E_y=0$) et $\cos\theta = \frac{x}{a} = \frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}$

Donc $dE_x = \frac{k\lambda}{R^2+x^2}\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}dl \Rightarrow dE_x = k\lambda\frac{\mathrm{x}}{(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}dl$, (Il ya une seule variable (l) et x et R sont constantes par rapport à l).

$E_x = k\lambda\frac{\mathrm{x}}{(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi R} dl = k\lambda\frac{\mathrm{x}}{(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\ 2\pi R$ avec $k=1/(4\pi\varepsilon_0)$

Donc $E = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0}\ \frac{\mathrm{x\,R}}{(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

2- Potentiel électrostatique

$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V = -\frac{dV}{dx}\vec{\imath} \Rightarrow E = -\frac{dV}{dx}$

$$V = -\int Edx = -\frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\frac{1}{2}\int \frac{2\mathrm{x}}{(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$$

$$\int U'U^n = \frac{U^{n+1}}{n+1}\ pour\ \int\frac{U'}{U} = lnU$$

U=R^2+x^2 ; n=-3/2, U'=2x donc $\frac{(R^2+x^2)^{\frac{-3}{2}+1}}{\frac{-3}{2}+1} = \frac{(R^2+x^2)^{\frac{-1}{2}}}{\frac{-1}{2}} = \frac{-2}{\sqrt{R^2+x^2}}$

$$V = -\int Edx = -\frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\frac{1}{2}\left(\frac{-2}{\sqrt{R^2+x^2}}\right)$$

Donc $V = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{R^2+x^2}}$

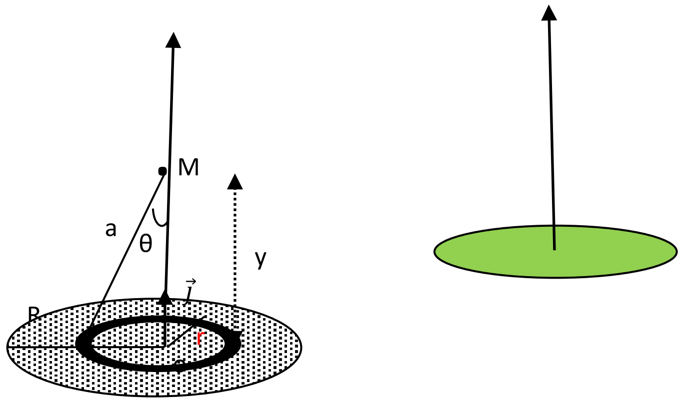
<u>Exercice 7 :</u>

potentiel électrostatique

On cherche le potentiel élémentaire dV créé par l'élément de Charge dq présent dans la surface élémentaire ds. ($dq=\sigma ds$)

$dv = k\frac{dq}{r}$

dq=σds



La surface élémentaire dans ce cas est un anneau de rayon r (avec 0<r<R) et d'épaisseur dr et ds=2πrdr.

ds=2πrdr

S=$\pi r^2 \Rightarrow ds = 2\pi r dr$

$$dv = k\frac{dq}{a} = k\frac{\sigma ds}{\sqrt{r^2+y^2}} = k\frac{\sigma 2\pi r dr}{\sqrt{r^2+y^2}}$$

$$v = k\sigma\pi\int_0^R \frac{2rdr}{\sqrt{r^2+y^2}}$$

$$\int U'U^n = \frac{U^{n+1}}{n+1}$$

U=r^2+y^2,   n=-1/2 ;   U'=2r dr

$$v = k\sigma\pi\int_0^R 2rdr(r^2+y^2)^{\frac{-1}{2}}$$

$$v = k\sigma\pi\frac{(r^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}$$

$$v = 2k\sigma\pi\sqrt{r^2+y^2}$$

$$v = 2k\sigma\pi\left(\sqrt{R^2+y^2} - \sqrt{y^2}\right)$$

$$v = 2k\sigma\pi\left(\sqrt{R^2+y^2} - |y|\right)$$

$$v = k\sigma\pi \int_0^R \frac{2rdr}{\sqrt{r^2+y^2}} = 2k\sigma\pi\sqrt{R^2+y^2} - 2k\sigma\pi\sqrt{0+y^2}$$

$$v = 2k\sigma\pi\left(\sqrt{R^2+y^2} - |y|\right)$$

$$v =: \begin{cases} y > 0 & v = 2k\sigma\pi\left(\sqrt{R^2+y^2} - y\right) \\ y < 0 & v = 2k\sigma\pi\left(\sqrt{R^2+y^2} + y\right) \end{cases}$$

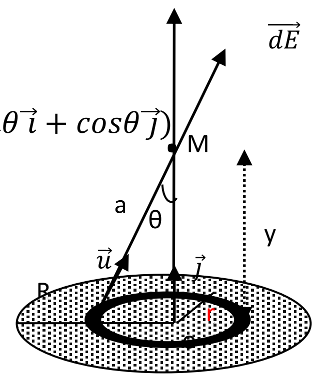
$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V = -\frac{dV}{dy}\vec{j} \Rightarrow E = -\frac{dV}{dy}$$

$$\vec{E} = \begin{cases} y > 0 & E_y = -2k\sigma\pi\left(\frac{y}{\sqrt{R^2+y^2}} - 1\right) \\ y < 0 & E_y = -2k\sigma\pi\left(\frac{y}{\sqrt{R^2+y^2}} + 1\right) \end{cases}$$

<u>Le calcul du champ électrique par la méthode directe</u>

Avec dq=σds= dq=σ2πrdr, d'après la relation de Pitagorth $a^2=r^2+y^2$ et $\vec{u}= sin\theta\vec{\imath} + cos\theta\vec{\jmath}$

Nous avons une symétrie par rapport à l'axe (Oy) donc le champ électrique a une seule composante E_y, (E_x=0) et $cos\theta = \frac{y}{a} = \frac{y}{\sqrt{r^2+y^2}}$.



$$\overrightarrow{dE} = \frac{kdq}{a^2}\vec{u} \Rightarrow \overrightarrow{dE} = \frac{k\sigma ds}{R^2+x^2}(\,sin\theta\vec{\imath} + cos\theta\vec{\jmath})$$

Donc $dE_y = \frac{k\sigma 2\pi rdr}{r^2+y^2}\frac{y}{\sqrt{r^2+y^2}} \Rightarrow dE_y = k\sigma\pi y\frac{2rdr}{(r^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

$E_y = k\sigma\pi y\int_0^R \frac{2rdr}{(r^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = -2k\sigma\pi y\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+y^2}} - \frac{1}{|y|}\right)$,

avec $k=1/(4\pi\varepsilon_0)$

Donc nous avons deux cas

$$E = E_y: \begin{cases} y > 0 & E_y = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{y}{\sqrt{R^2+y^2}} - 1\right) \\ y < 0 & E_y = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{y}{\sqrt{R^2+y^2}} + 1\right) \end{cases}$$

3- Le champ électrique lorsque le rayon du disque R tend vers l'infini

$$\lim_{R\to\infty} E : \begin{cases} y > 0 & E_y = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \\ y < 0 & E_y = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \end{cases} \quad \text{Donc } \lim_{R\to\infty} |E| = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$