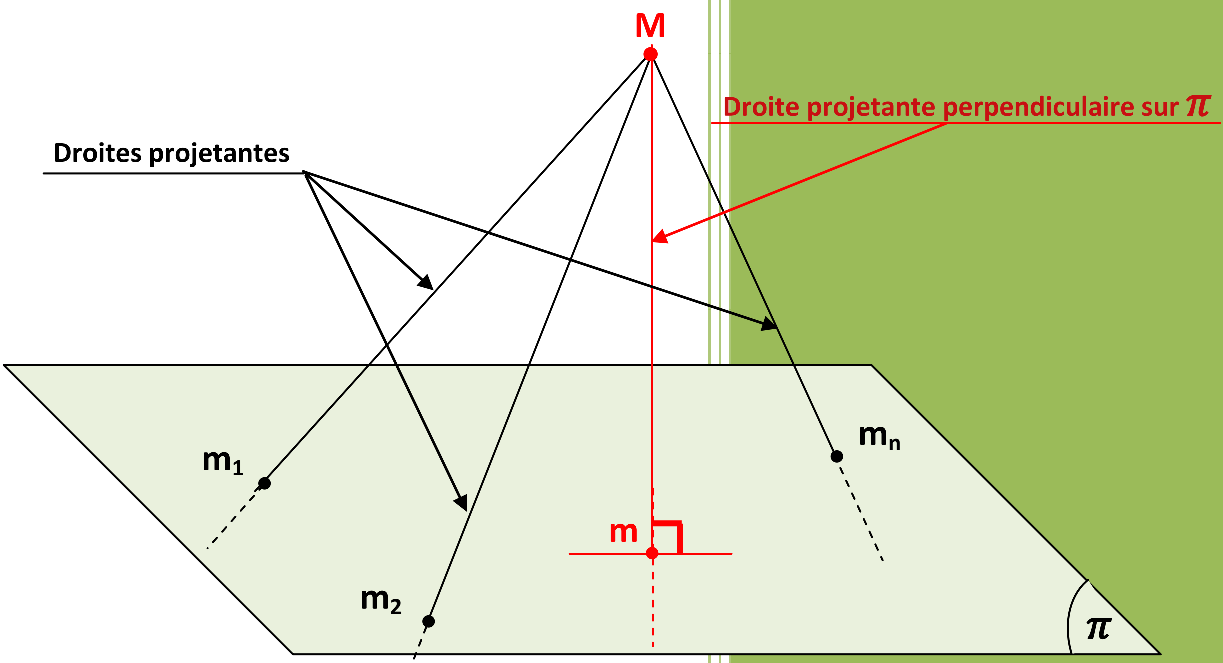
Université Abou Bekr Belkaïd-Tlemcen
Faculté de technologie

2015

Géométrie de l'espace
Cours & applications
Première année Architecture



Première partie
Semestre I

Docteur HADJOUI Féthi

P R E F A C E

Ce document est le fruit de plusieurs années d'enseignement de la matière de géométrie de l'espace au sein du département d'architecture ; il a était rédigé sous forme de cours de différents chapitres illustrés et suivis par des applications.

Il est conçu pour les étudiants de la $1^{ère}$ année d'architecture programme en particulier et pour les étudiants en sciences et techniques de $2^{ème}$ année ainsi que pour les enseignants.

Ce document qui répond aux exigences didactiques et pédagogiques du programme officiel de la $1^{ère}$ année architecture du 1^{er} semestre et une partie de la $2^{ème}$ année sciences et techniques est destiné à être exploiter comme :

- Recueil des connaissances définies par le programme enseigné ;
- Document ressource pour la conduite des cours et activités pratique ;
- Outil d'évaluation personnel

Je souhaite que ce document réponde à la fois aux besoins des étudiants et aux attentes des collègues enseignants.

Je serais très attentif aux critiques et aux suggestions des utilisateurs de ce document.

FETHI HADJOUI
Docteur en mécanique
Département de génie mécanique
Faculté de Technologie – Université de Tlemcen

SOMMAIRE

SOMMAIRE

I INTRODUCTION A LA GEOMETRIE DE L'ESPACE

CHAPITRE I

EPURE DU POINT

CHAPITRE II

EPURE DE LA DROITE

CHAPITRE III

EPURE D'UN PLAN

CHAPITRE IV

LIGNES DE PLUS GRANDE PENTE D'UN PLAN

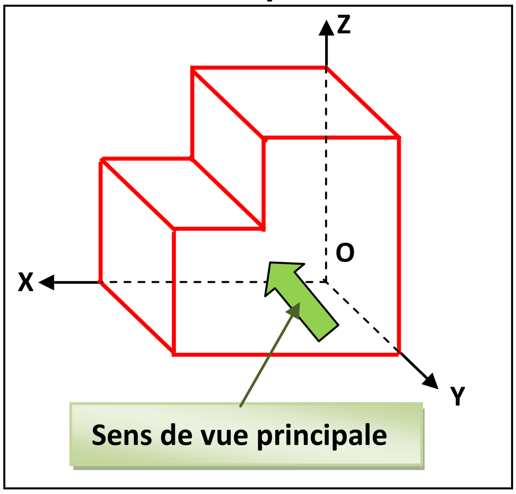
INTRODUCTION
A LA GEOMETRIE DE
L'ESPACE

I. Introduction

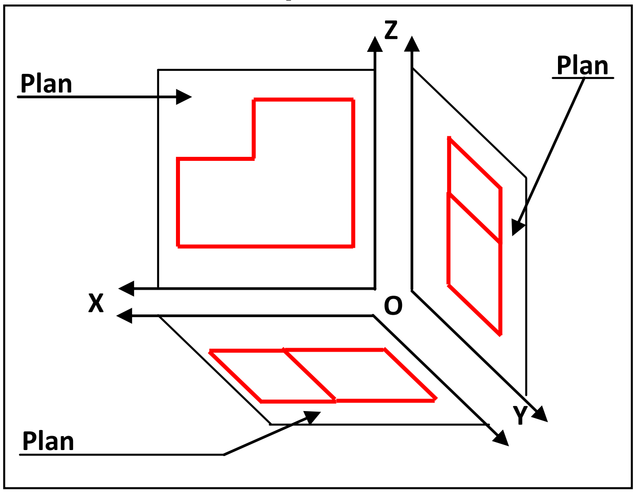
La géométrie de l'espace est une science appliquée à caractère graphique sur laquelle se base la représentation des objets.

Dans la géométrie de l'espace on étudie la représentation en trois dimensions (**3D**), et on peut aussi résoudre les difficultés de la compréhension des objets de forme complexe en effectuant des projections sur plans, qui est une représentation à deux dimensions (**2D**).

Représentation en perspective « En espace »

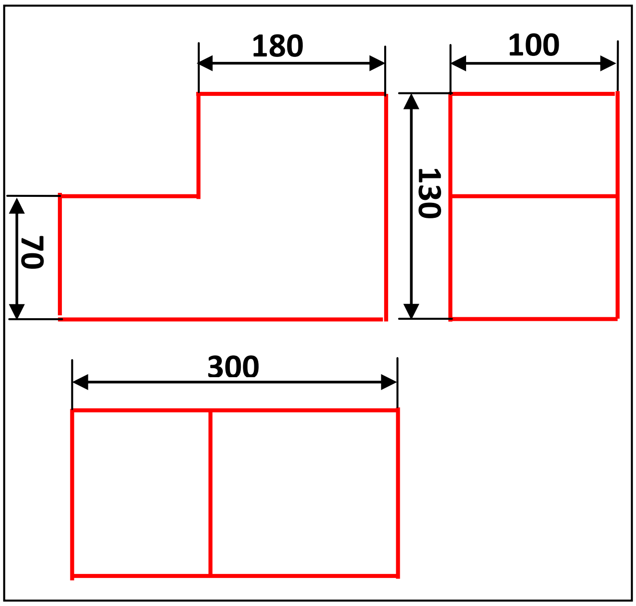


Représentation en projection « sur plan »



Dans la représentation plane, on peut :

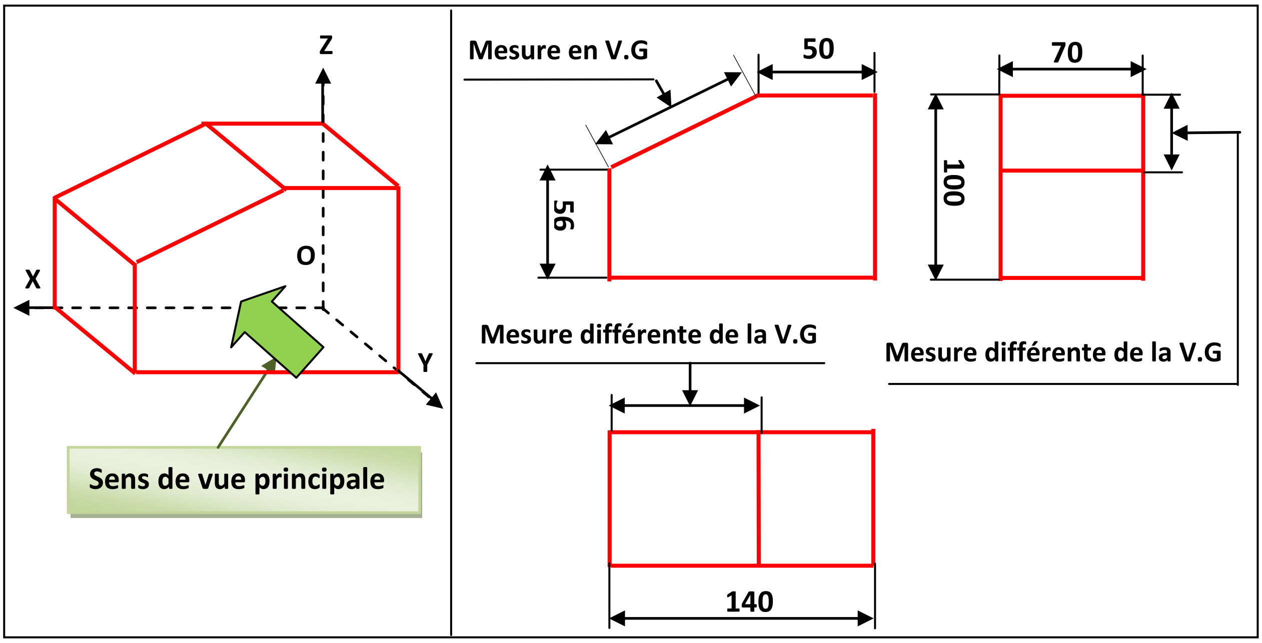
- Connaitre au moyen d'un dessin plan dit **épure**, la forme et les dimensions exactes d'un objet volumique.
- Résoudre par des tracés plans des problèmes relatifs à l'objet dans l'espace, tel que la position, la vraie grandeur, etc.……



Sur la représentation suivante, certaines mesures sont en vraie grandeur (**V.G**) par contre d'autres ne le sont pas, d'ou la nécessité de bien choisir les plans de projection.

Généralement, nous choisissons les plans de projection de la sorte suivante :

- La totalité des projections soient en vraie grandeur,
- ou à défaut si ce n'est pas possible, nous essayons d'avoir la majorité des projections en vraie grandeur



Dans la géométrie de l'espace, pour la représentation des objets, et en fonction de l'importance des détails à mettre en évidence par rapport à d'autres, plusieurs méthodes de représentation peuvent être utilisées,

- La projection orthogonale
- La projection perspective
- La projection axonométrique
- La projection conique (à points fuyants)

II. La projection orthogonale

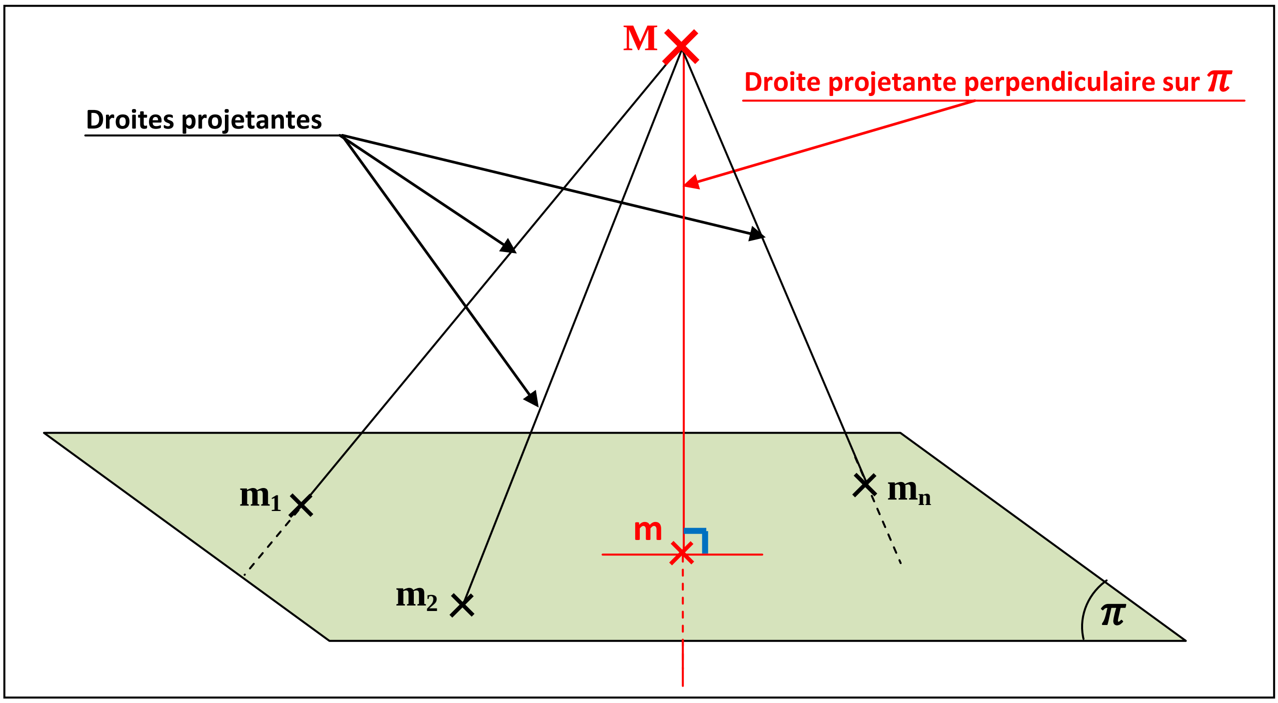
II.1. Définition :

Etant donné un point **M** de l'espace distant d'un plan (π) de projection ; la projection de **M** sur (π) est l'image de ce point **M** sur le plan (π) Si la projection est quelconque on peut trouver une infinité d'image de ce même point **M** sur le même plan (π)

- **m**, **m_1**, **m_2**,…… **m_n**, sont des images du point **M** sur le plan (π)
- **p**, **p_1**, **p_2**,…… **p_n**, sont les lignes projetantes du point **M** sur le plan (π)

La projection orthogonale du point **M** sur le plan (π) est l'intersection de la droite (**P**) issue du point **M** est perpendiculaire au plan (π) et qu'on nomme par la lettre **m**.

La ligne projetante (**P**) entre le point **M** et sa projection **m** est une droite perpendiculaire au plan de projection (π)

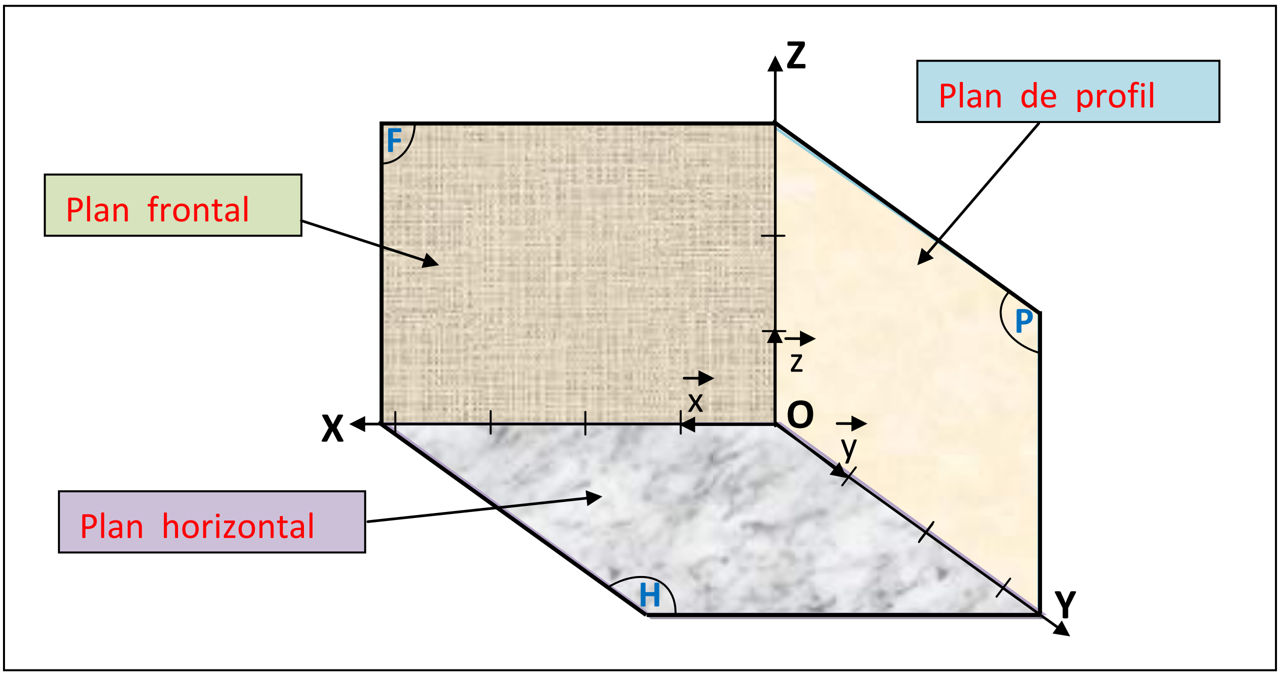


II.2. Plans de projection

Pour définir un point de l'espace, une seule projection sur un seul plan est insuffisante, d'où la nécessité de l'utilisation du système à trois plans perpendiculaires entre eux d'une façon générale et le système à deux plans dans certains cas particulier.

II.2.1. Système à trois plans de projection

Soit le système de coordonnées à trois dimensions (**O**, **x**, **y**, **z**) sur lequel on peut déterminer les trois plans qui sont perpendiculaires entre eux.



F : Plan frontal ou l'ensemble de ses points appartenant à ce plan ont la valeur par rapport à **Y** nulle

H : Plan horizontal ou l'ensemble de ses points appartenant à ce plan ont la valeur par rapport à **Z** nulle

P : Plan de profil ou l'ensemble de ses points appartenant à ce plan ont la valeur par rapport à **X** nulle

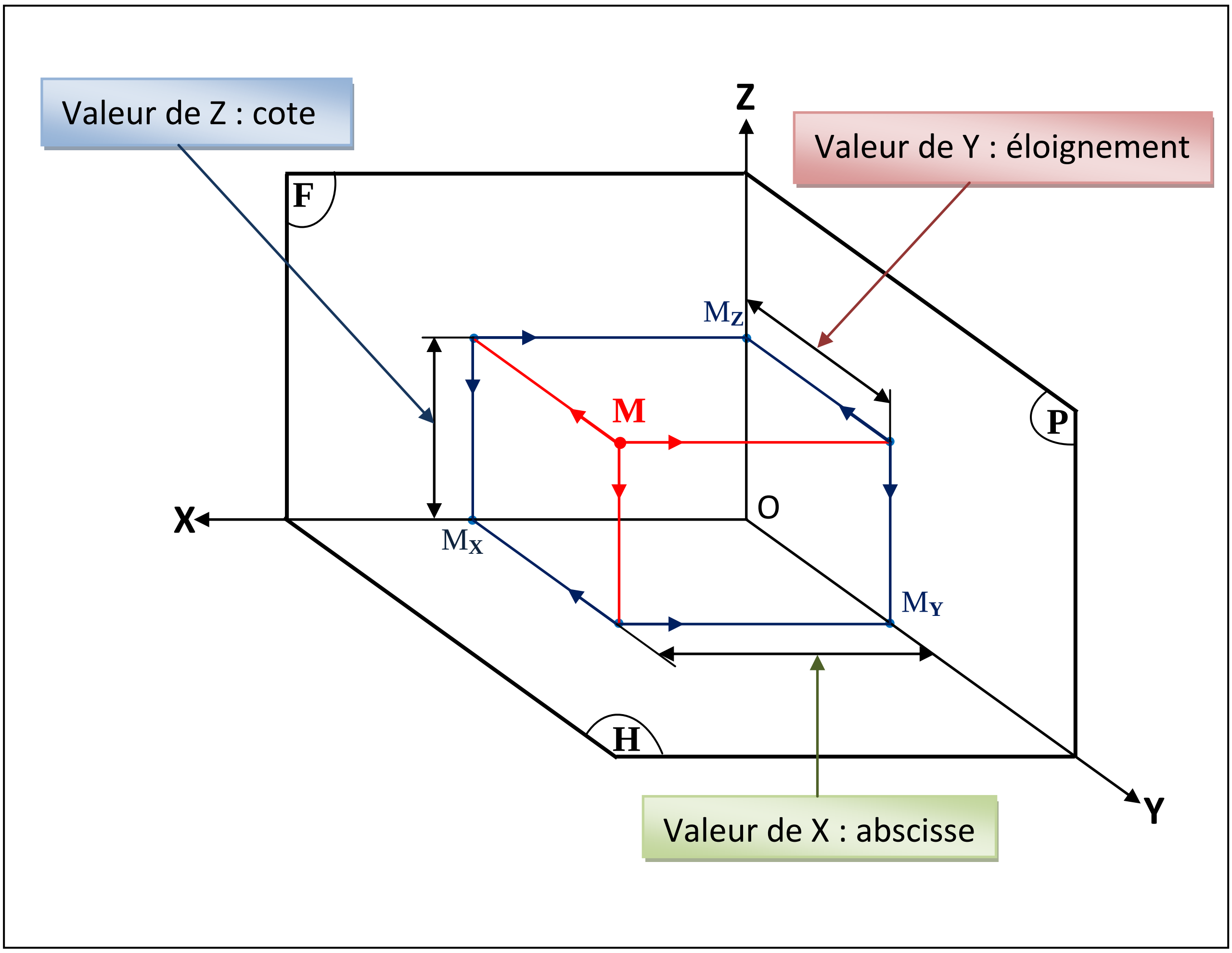
OX ⊥ OY ⊥ OZ → **F ⊥ H ⊥ P**

Pour définir la position d'un point **M** de l'espace par rapport au repère formé par le système (**O**, **X, Y, Z**), formant les trois plans de projection (F), (H) et (P), il suffit de donner ses coordonnées par rapport aux trois axes, **OX**, **OY** et **OZ**.

$\mathbf{M_X}$, $\mathbf{M_Y}$ et $\mathbf{M_Z}$ sont les coordonnées du point **M**.

En géométrie de l'espace, ces coordonnées sont nommées comme suite :

- **Abscisse :** coordonné par rapport à l'axe **(OX)**
- **Eloignement :** coordonné par rapport à l'axe **(OY)**
- **Cote :** coordonné par rapport à l'axe **(OZ)**



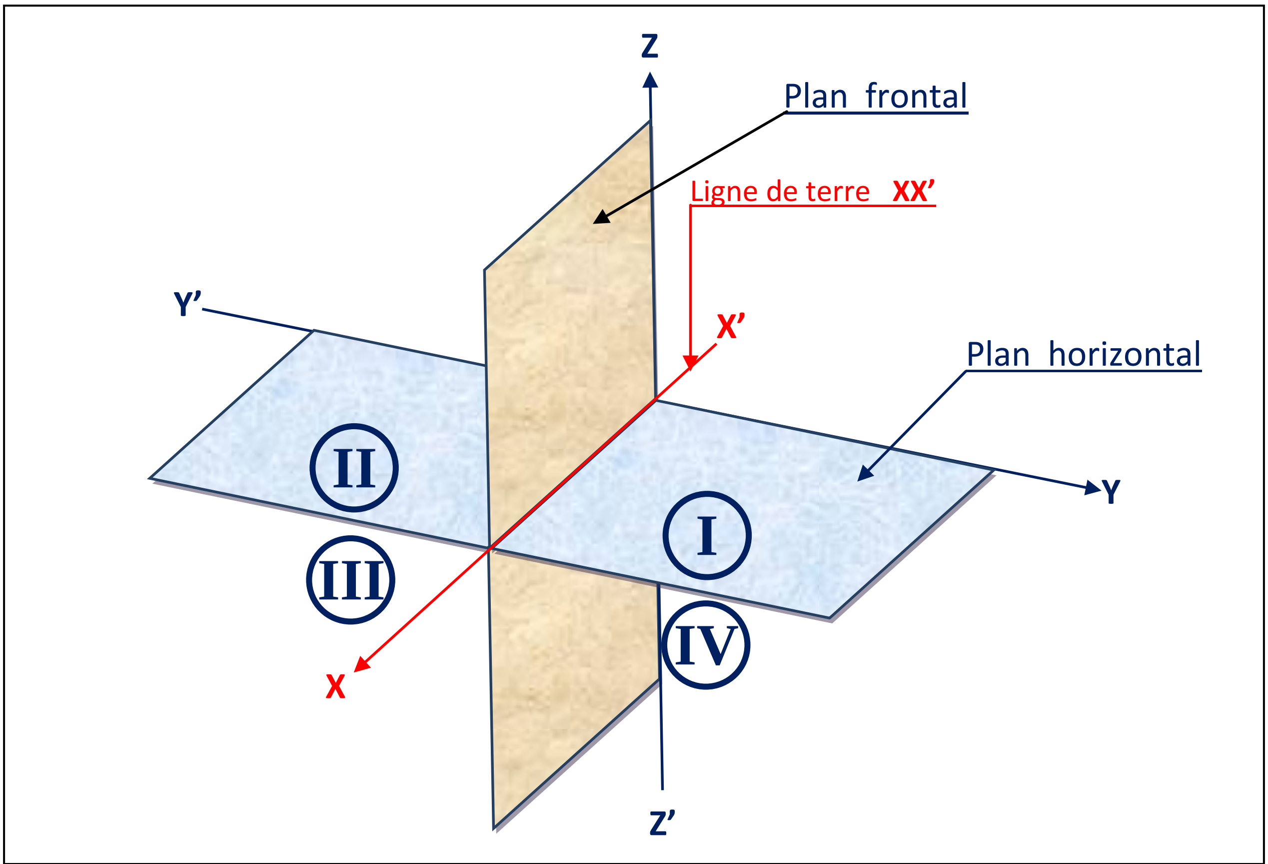
II.2.1. Système à deux plans de projection

Le système de projection à deux plans se compose du plan frontal (F) et du plan horizontal (H), le plan de profil (P) étant considéré comme un plan auxiliaire.

L'axe **XX'** qui est la ligne d'intersection entre le plan (F) et le plan (H) est appelée ligne de terre

La ligne de terre des deux plans (F) et (H) nous permet de diviser l'espace en quatre parties, nommées «***dièdres droits***» ou d'une façon plus général «***dièdres***».

Les dièdres sont repérés par les chiffres romains (**I**, **II**, **III** et **IV**).



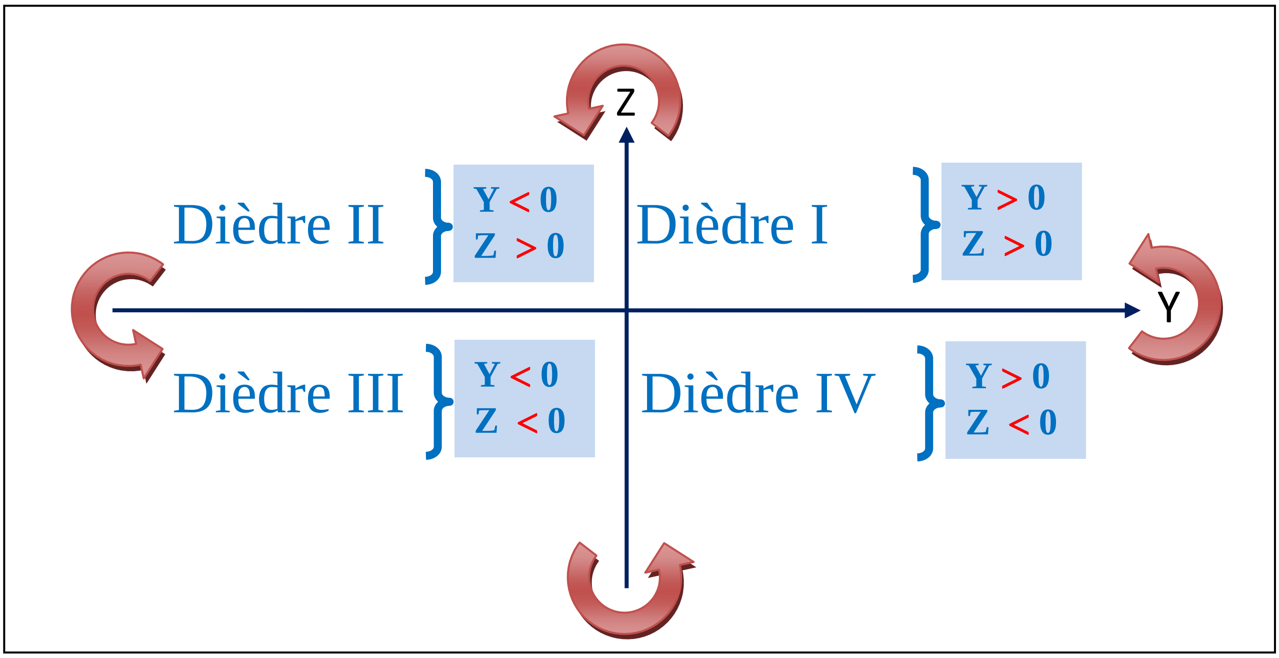
Les dièdres sont nommés par les chiffres romains (**I**, **II**, **III** et **IV**).

Par définition le numéro du dièdre dépend des signes de la valeur de **Y** et de **Z**.

- Premier dièdre ou dièdre **I :** **Y > 0 ; Z > 0**
- Deuxième dièdre ou dièdre **II :** **Y < 0 ; Z > 0**
- Troisième dièdre ou dièdre **III :** **Y < 0 ; Z < 0**
- Quatrième dièdre ou dièdre **IV :** **Y > 0 ; Z < 0**

Indépendamment de la valeur de l'abscisse, les signes de l'éloignement et de la cote d'un point définissent le dièdre dans lequel se trouve le point (Appartenance).

N° dièdre	I	II	II	IV
Signe de l'éloignement (Y)	+	-	-	+
Signe de la cote (Z)	+	+	-	-



Chapitre I

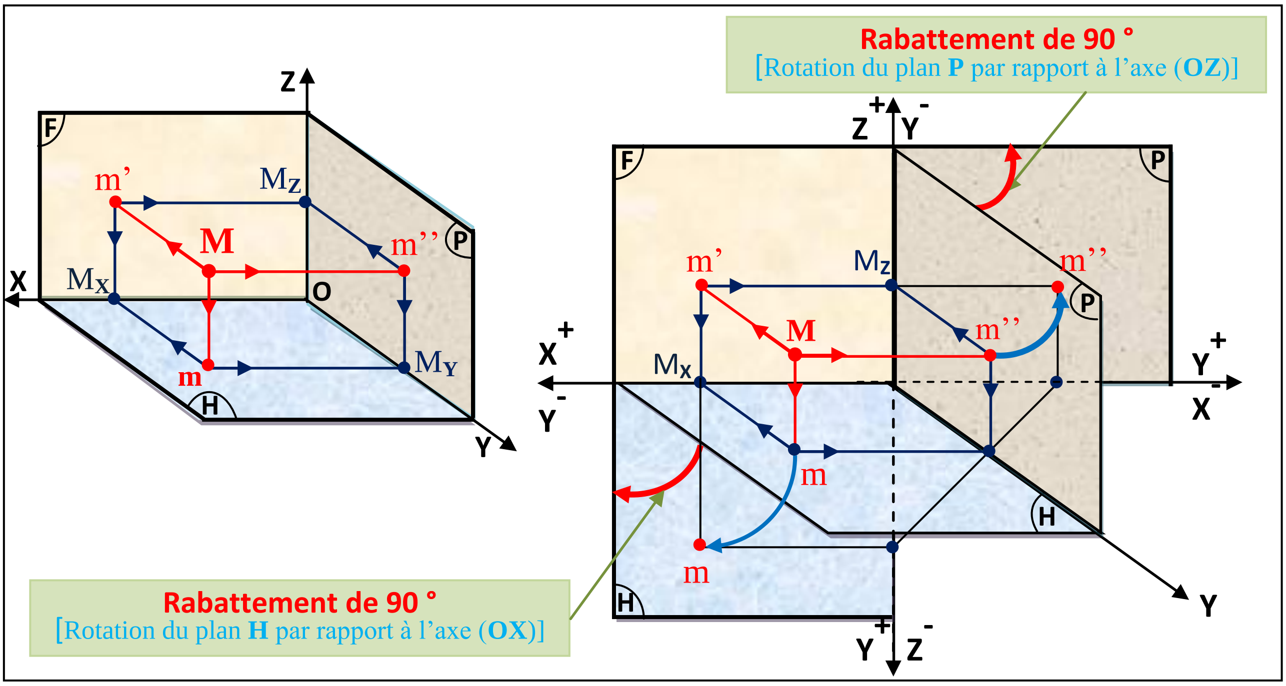
EPURE
DU POINT

I. Epure du point

Après avoir effectué les différentes projections du point **M** sur les trois plans de projection, on obtient par convention

- **m** : représente la projection horizontale sur le plan horizontal Ⓗ
- **m'** : représente la projection frontale sur le plan frontal Ⓕ
- **m''** : représente la projection de profil sur le plan de profil Ⓟ

Ensuite on effectue le rabattement des deux plans Ⓗ et Ⓟ par une rotation de **90°**, respectivement autour l'axe (**OX**) et l'axe (**OZ**), afin de les rendre alignés avec le plan Ⓕ afin d'obtenir l'épure du point **M**.

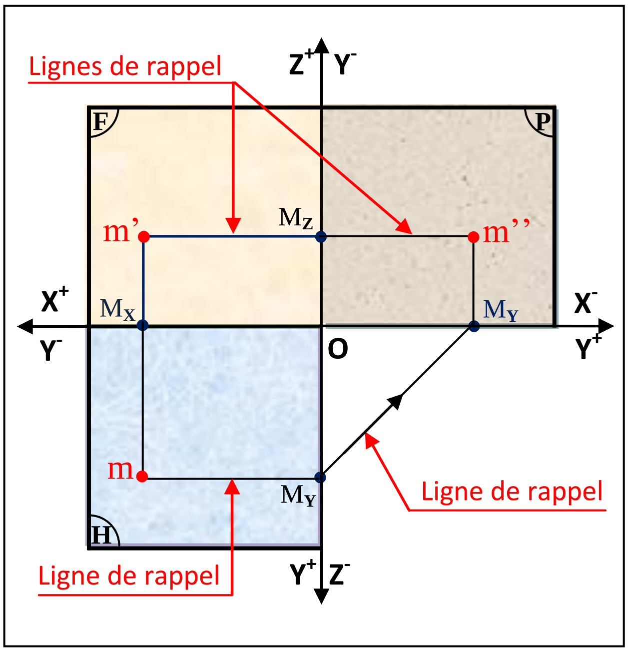


La représentation plane ainsi obtenue est dite ***épure*** du point **M**.

L'axe **YY'** est confondu à la fois avec l'axe **XX'** pour représenter le plan de profil et avec l'axe **ZZ'** pour représenter le plan horizontal mais ils sont de sens opposés.

Les projections sur Ⓕ et Ⓗ sont toujours en alignement vertical ; Les projections sur Ⓕ et Ⓟ sont toujours en alignement vertical

Les droites qui relient les différentes projections sont des lignes de rappel.



II. Application

Etant donné un point **A** dans l'espace, dont les coordonnées sont (**+60**, **+50**, **+40**).

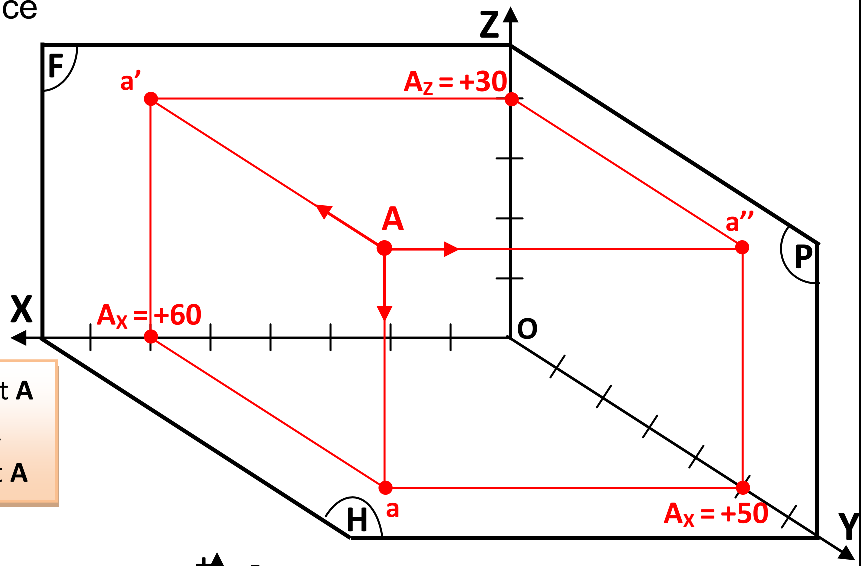
1. Tracer le point **A** dans l'espace représenté par le système (**O**, **X, Y, Z**)
2. Tracer l'épure de ce point
3. Citer le dièdre auquel appartient le point **A** et justifier votre réponse

2. Tracé de **A** dans l'espace

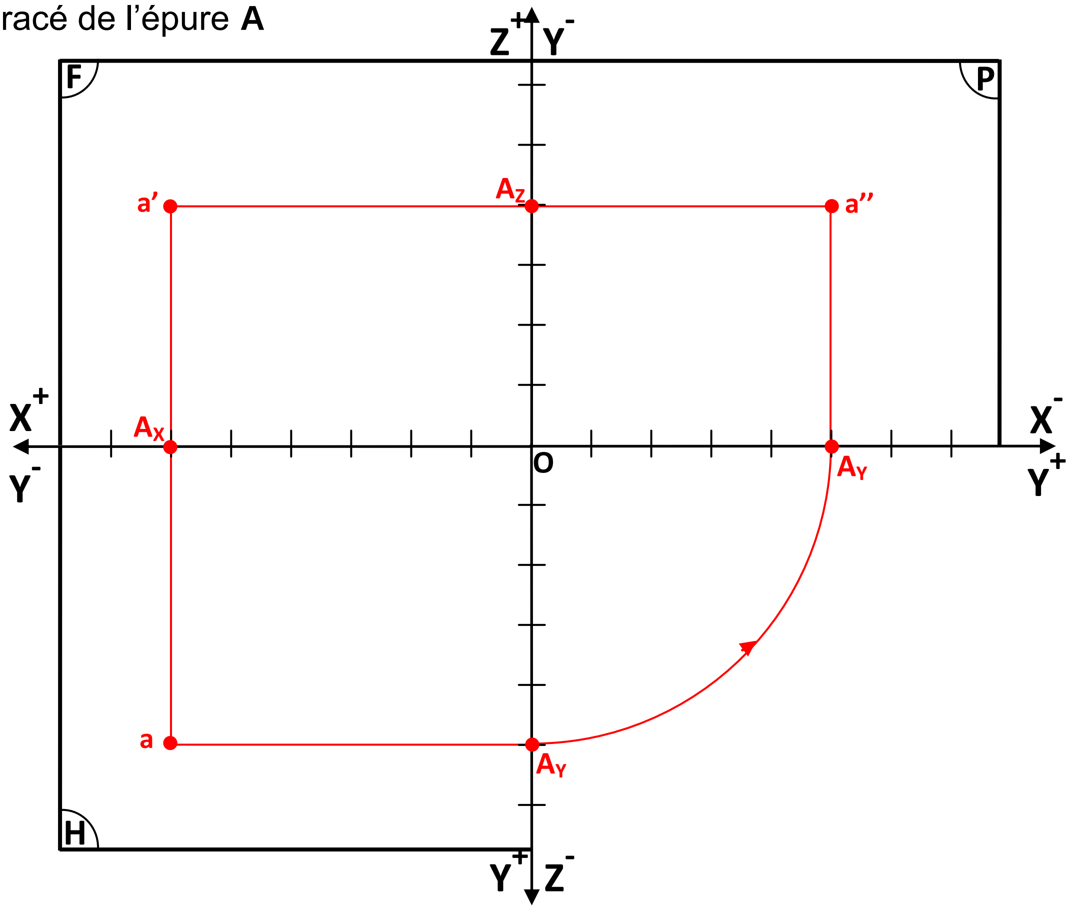
OA_X : Abscisse du point **A**
OA_Y : Eloignement du point **A**
OA_Z : Cote du point **A**

$OA_X = A_Za' = A_Ya = a''A$
$OA_Y = A_Xa = A_Za'' = a'A$
$OA_Z = A_Ya'' = A_Xa' = aA$

a : projection horizontal du point **A**
a' : projection frontal du point **A**
a'' : projection de profil du point **A**



2. Tracé de l'épure **A**



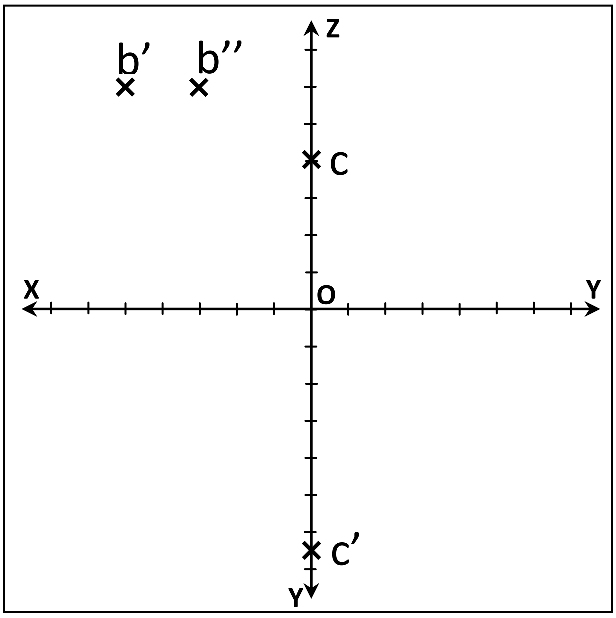
3. Le point **A** l'espace appartient au dièdre **I** ; $A_Y > 0$ et $A_Z > 0$

III. Exercice :

1. Tracer l’épure du point **A** (60, + 50, -30)

2. Déterminer la troisième projection des points **B** et **C**

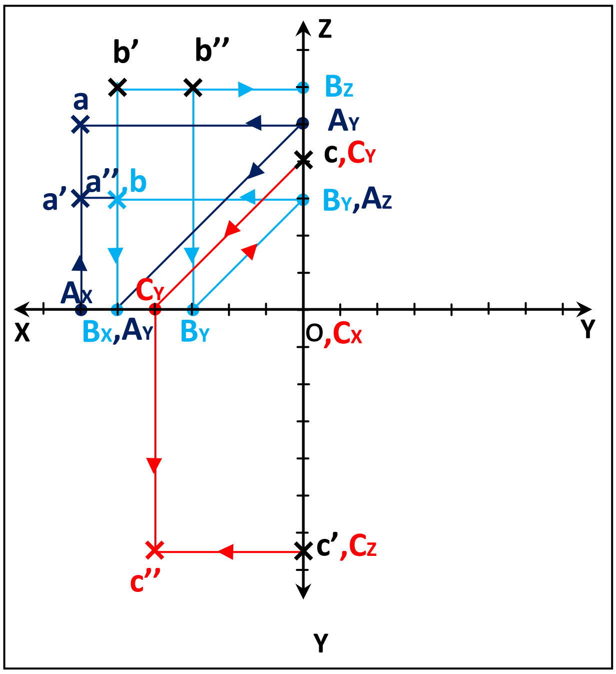
3. A quel dièdre appartiennent les points **A**, **B** et **C**



Réponses :

1. Le tracé de l’épure du point **A** se fait à partir des cordonnées (**60**, **+50**, **-30**).

2. Le tracé de l’épure des points **B** et **C** se fait à partir des lignes de rappel par **b’, b’’, c** et **c’**.



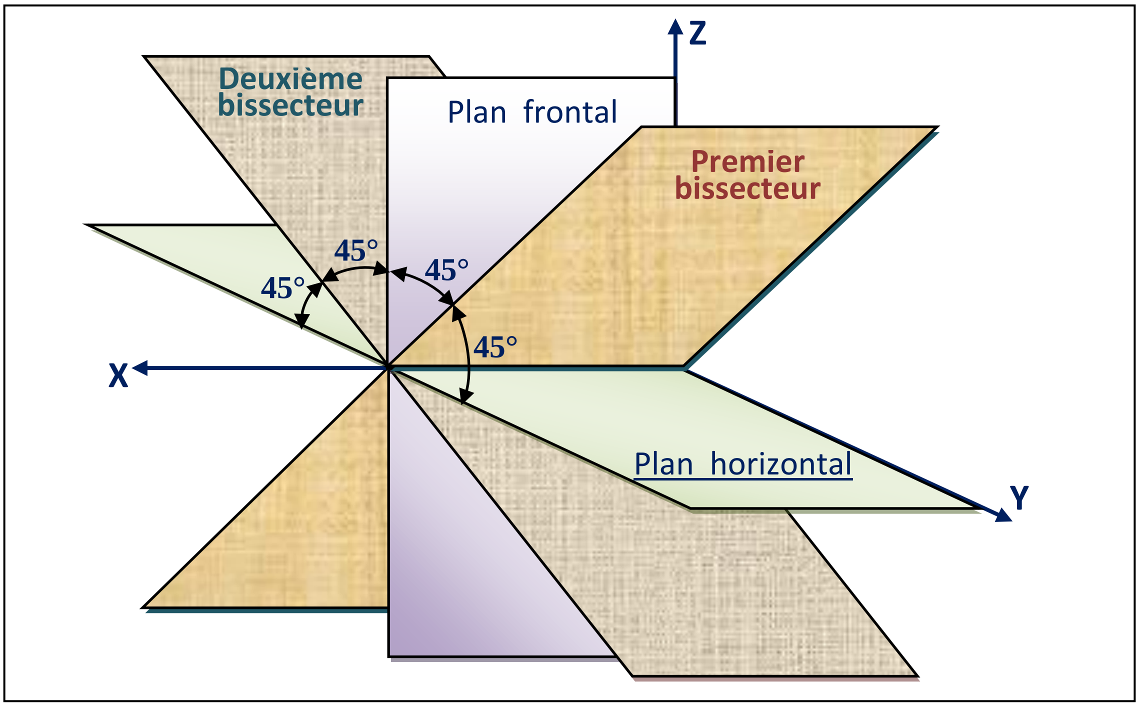
3. Les points A, B et C sont comme suite

	N° dièdre	Coordonnées
A Є au dièdre	**II**	(**A**$_Y$ < **0** ; **A**$_Z$ > **0**)
B Є au dièdre	**II**	(**B**$_Y$ < **0** ; **B**$_Z$ > **0**)
C Є au dièdre	**III**	(**C**$_Y$ < **0** ; **C**$_Z$ < **0**)

IV. Notion du bissecteur

IV.1. Définition

Le bissecteur est le plan qui divise le dièdre en deux parties égales, puisque l'espace peut être représenté par les deux plans Ⓗ et Ⓕ afin de diviser l'espace en quatre dièdres droits donc ils existent deux bissecteurs.



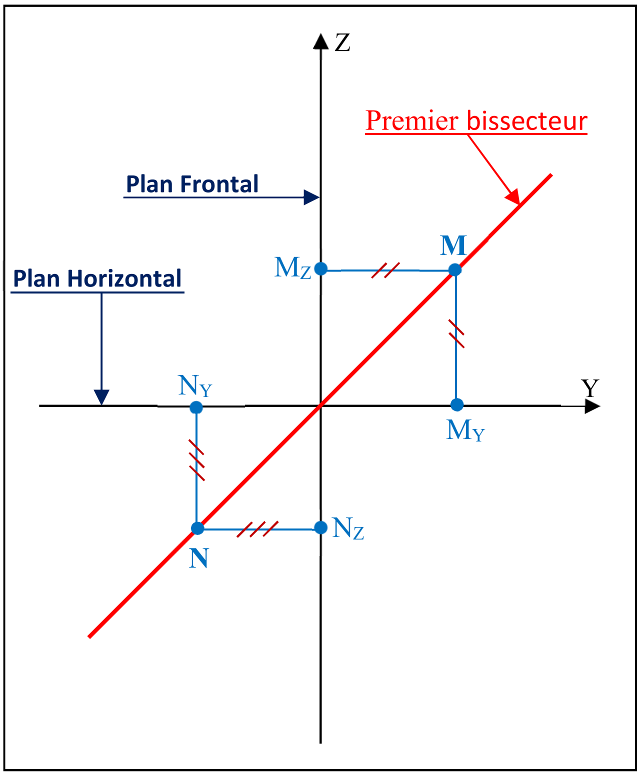
- Le premier bissecteur divise le dièdre **I** et le dièdre **III**
- Le deuxième bissecteur divise le dièdre **II** et le dièdre **IV**

IV.2. Propriétés

Toutes formes géométriques se trouvant sur le bissecteur se caractérisent par les propriétés suivantes ;

- Sur le premier bissecteur, leur éloignement et leur cote sont égales
  - Dans le dièdre **I**, les éloignements et les cotes sont tous deux positifs
  - Dans le dièdre **III**, les éloignements et les cotes sont tous deux négatifs
- Sur le deuxième bissecteur, leur éloignement et leur cote sont égales en valeurs absolues et en sens contraire.
  - Dans le dièdre **II**, les éloignements sont négatifs et les cotes sont positives
  - Dans le dièdre **IV**, les éloignements sont positifs et les cotes sont négatives

- La représentation ci-contre nous montre les positions des coordonnées du point **M** qui est situé sur le premier bissecteur dans la partie du dièdre **I**, et celle du point **N** qui est situé sur le premier bissecteur dans la partie du premier dièdre **III**.



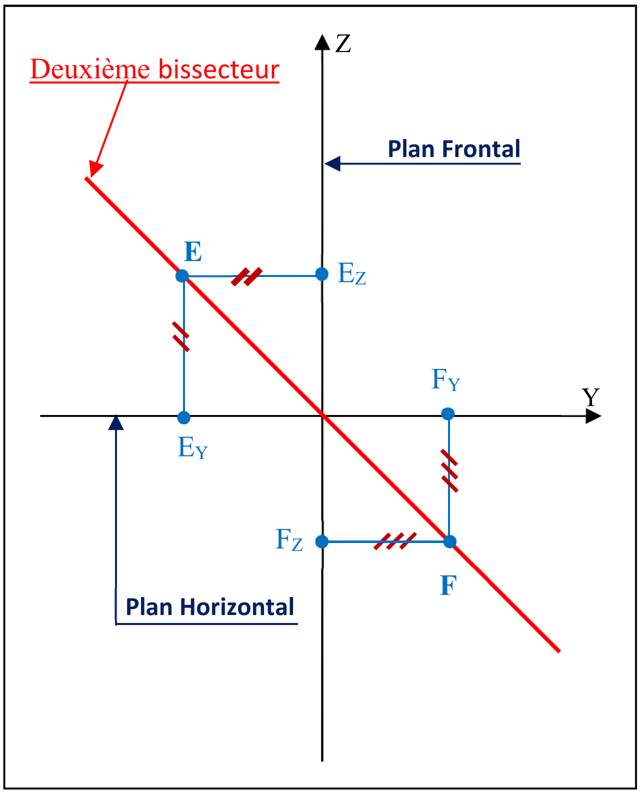
- L'éloignement de **M** : $M_Y > 0$
- La cote de **M** : $M_Z > 0$

$$\boxed{M_Y = M_Z}$$

- L'éloignement de **N** : $N_Y < 0$
- La cote de **N** : $N_Z < 0$

$$\boxed{N_Y = N_Z}$$

- La représentation ci-contre nous montre les positions des coordonnées du point **E** qui est situé sur le deuxième bissecteur dans la partie du dièdre **II**, et celle du point **F** qui est situé sur le deuxième bissecteur dans la partie du premier dièdre **IV**.



- L'éloignement de **E** : $E_Y < 0$
- La cote de **E** : $E_Z > 0$

$$\boxed{E_Y = -E_Z}$$

- L'éloignement de **F** : $F_Y > 0$
- La cote de **F** : $F_Z < 0$

$$\boxed{F_Y = -F_Z}$$

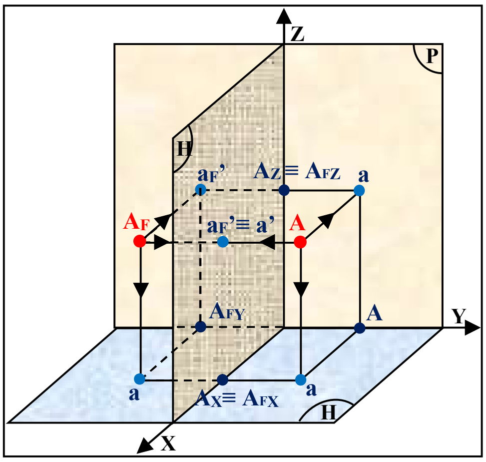
IV. Notion de symétrie

La symétrie est l'image d'un point considéré par rapport à une référence donnée, qui peut être un point, une ligne ou un plan.

VI.1. Symétrie par rapport au plan frontal

La symétrie d'un point **A** par rapport au plan frontal se caractérise par les relations suivantes :

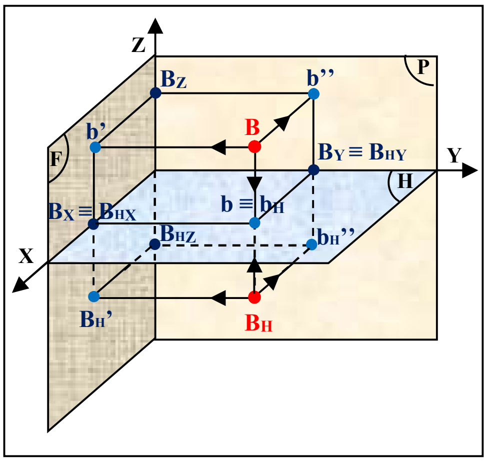
- L'abscisse du point **A** et l'abscisse de sa symétrie A_F sont égales. $A_X = A_{FX}$
- La cote du point **A** et la cote de sa symétrie A_F sont égales. $A_Z = A_{FZ}$
- L'éloignement du point **A** et l'éloignement de sa symétrie A_F sont égaux en valeur absolue, mais opposés en signe. $A_Y = -A_{FY}$



VI.2. Symétrie par rapport au plan horizontal

La symétrie d'un point **B** par rapport au plan horizontal nous donne les relations suivantes :

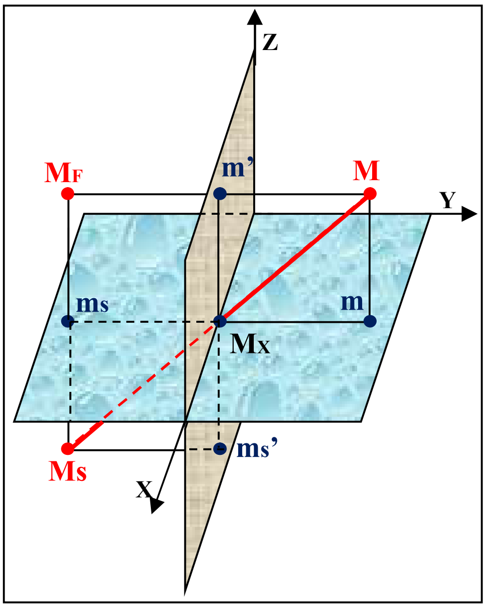
- L'abscisse du point **B** et l'abscisse de sa symétrie B_H sont égales. $B_X = B_{HX}$
- L'éloignement du point **B** et 'éloignement de sa symétrie B_H sont égales. $B_Y = B_{HY}$
- La cote du point **B** et la cote de sa symétrie B_H sont égaux en valeur absolue, mais opposés en signe. $B_Z = -B_{HZ}$



VI.3. Symétrie par rapport à la ligne de terre (XX')

La symétrie d'un point **M** par rapport à la ligne de terre (**XX'**) se caractérise par les relations entre ses coordonnées suivantes :

- L'abscisse du point **M** et l'abscisse de sa symétrie M_S sont égales. $M_X = M_{SX}$
- L'éloignement du point **M** et l'éloignement de sa symétrie M_S sont égaux en valeur absolue, mais opposés en signe. $M_Y = - M_{SY}$
- La cote du point **M** et la cote de sa symétrie M_S sont égales en valeur absolue, mais opposés en signe. $M_Z = - M_{SZ}$

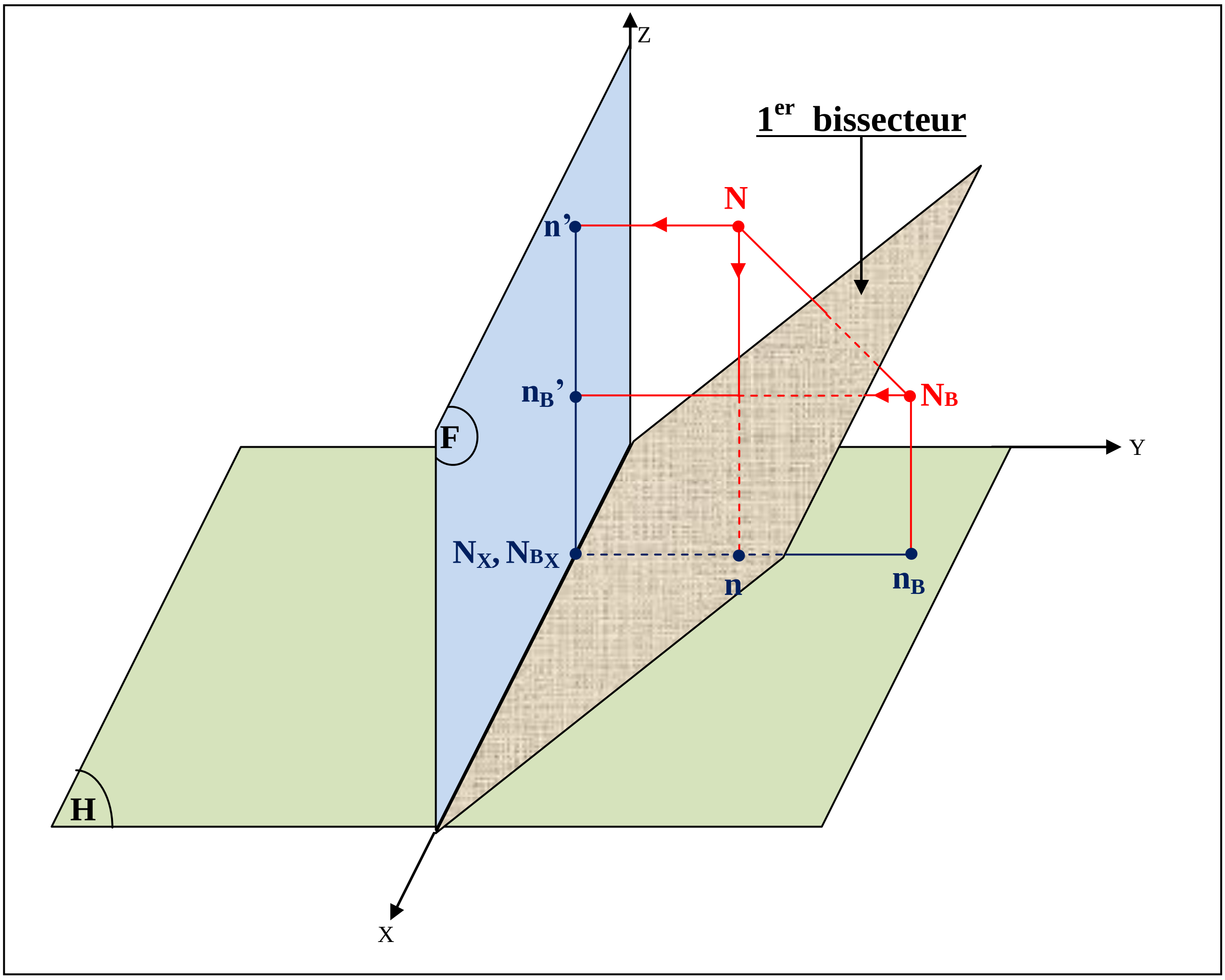


Remarque : le point symétrique par rapport à la ligne de terre est une double symétrie, l'une par rapport au plan frontal, l'autre par rapport au plan horizontal.

V.4. Symétrie par rapport au bissecteur

La symétrie par rapport au plan bissecteur diffère du premier bissecteur de celle du deuxième bissecteur.

V.4.1. Symétrie par rapport au premier bissecteur



La symétrie d'un point **N** par rapport au premier bissecteur se caractérise par les relations entre ses coordonnées suivantes :

- L'abscisse du point **N** et l'abscisse de sa symétrie **NB** sont égales.

$$N_X = NB_X$$

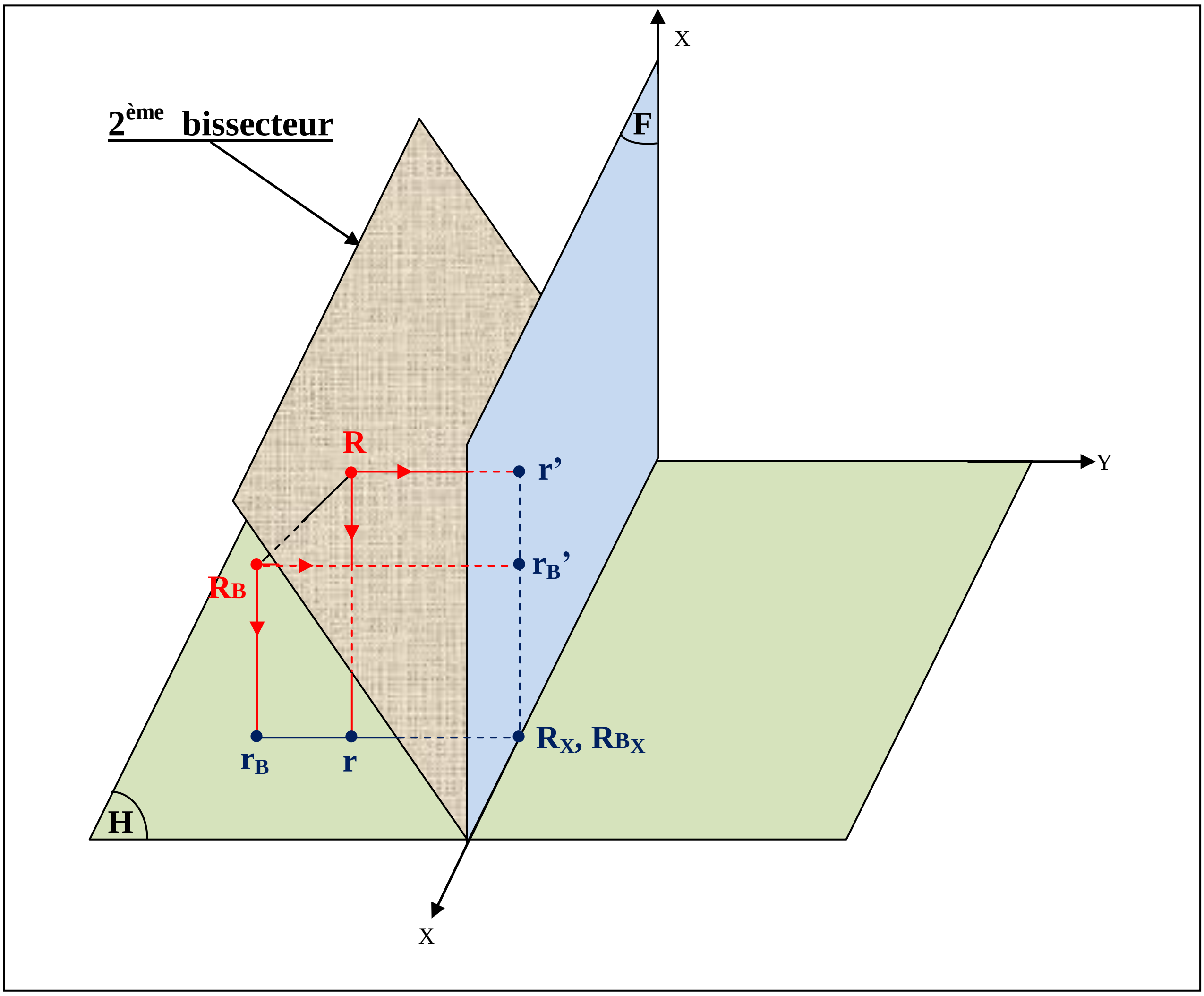
- L'éloignement N_Y et la cote NB_Z ont la même valeur et le même signe.

$$N_Y = NB_Z$$

- La cote N_Z et l'éloignement NB_Y ont la même valeur et le même signe.

$$N_Y = NB_Z$$

V.4.2. Symétrie par rapport au deuxième bissecteur



La symétrie d'un point **R** par rapport au deuxième bissecteur se caractérise par les relations entre ses coordonnées suivantes :

- L'abscisse du point **R** et l'abscisse de sa symétrie **RB** sont égales.

  $R_X = R\,B_X$

- L'éloignement R_Y et la cote RB_Z ont la même valeur absolue mais de signe contraire. $R_Y = -\,RB_Z$

- La cote R_Z et l'éloignement RB_Y ont la même valeur absolue mais de signe contraire. $R_Y = -\,RB_Z$

VI. Applications

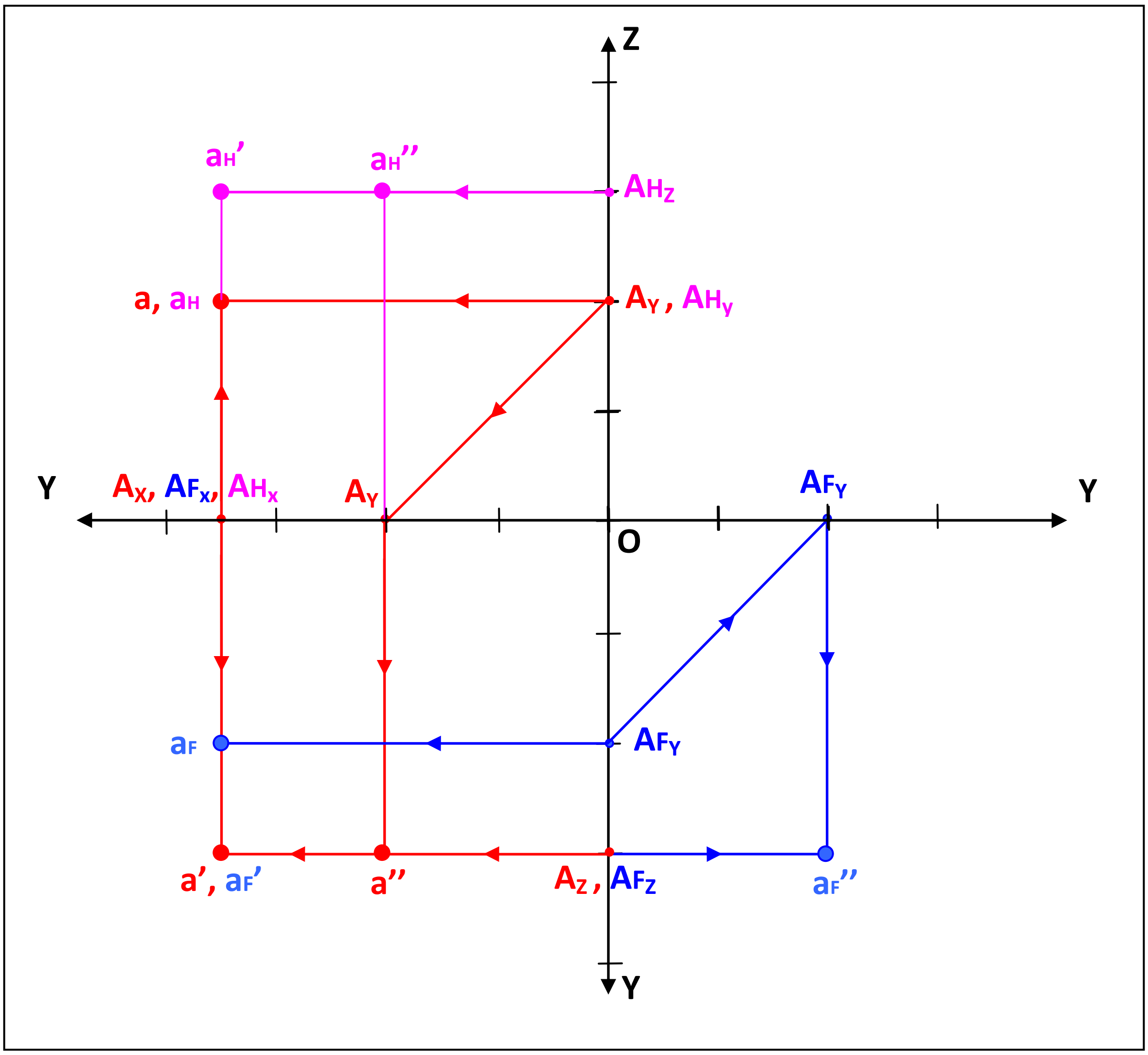
Exercice 1 :

Soit le point **A** de coordonnées (**+35, -20, -30**).

1. Tracez l'épure du point **A**.
2. Déterminez le point **AH** symétrique de **A** par rapport au plan horizontal
3. Déterminez le point **AF** symétrique de **A** par rapport au plan frontal

Réponse :

1. Tracé de l'épure du point **A** à partir des coordonnées (**+35, -20, -30**)
2. Détermination de l'épure du point **AH** en appliquant, $A_Y = AH_Y$ et $A_Z = -AH_Z$
3. Détermination de l'épure du point **AF** en appliquant, $A_Y = -AH_Y$ et $A_Z = AH_Z$



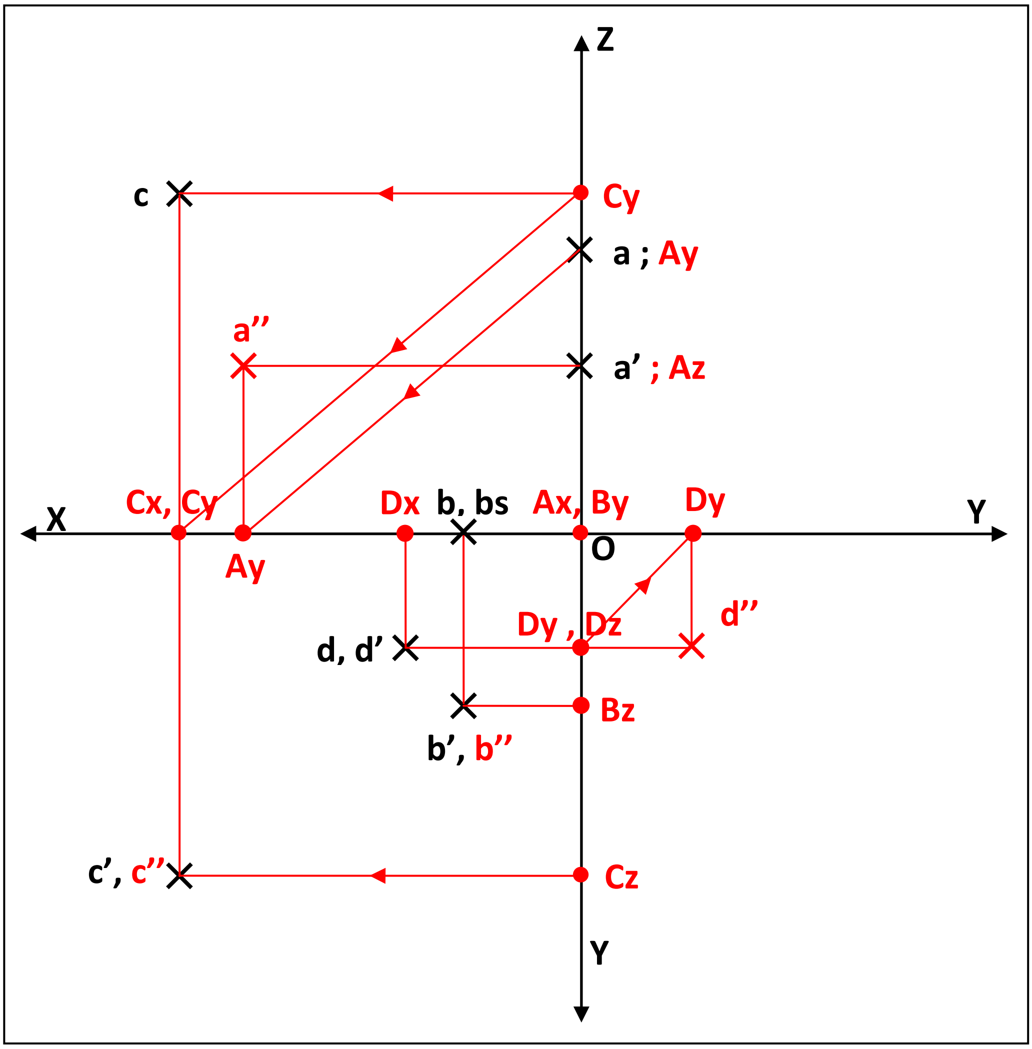
<u>Exercice 2</u> :

Soient les points **A**, **B**, **C** et **D** dont on connaît uniquement deux projections de chacun d'eux ;

1. Déterminez la troisième projection de chacun des quatre **A**, **B**, **C** et **D**
2. Construire le point **Bs**, symétrique de **B** par rapport au premier bissecteur
3. Construire le point **Cs**, symétrique de **C** par rapport à la ligne de terre

Réponse :

1. Détermination des épures des points **A**, **B**, **C** et **D**
2. Détermination de l'épure du point **Bs** en appliquant, $B_Y = - Bs_Z$ et $B_Z = - Bs_Y$
3. Détermination de l'épure du point **Cs** en appliquant, $C_Y = - Cs_Y$ et $C_Z = - Cs_Z$



Chapitre II

EPURE
DE LA DROITE

I. Introduction

Dans l'espace une droite est définie par deux points distincts.

Soit une droite (**Δ**) et deux points **A** et **B** lui appartenant ; pour déterminer les projections de cette droite sur les différents plans, il suffit de projeter ces deux points, ensuite joindre les deux projections sur chaque plan pour obtenir celle de la droite. *(Voir figure **1**)*

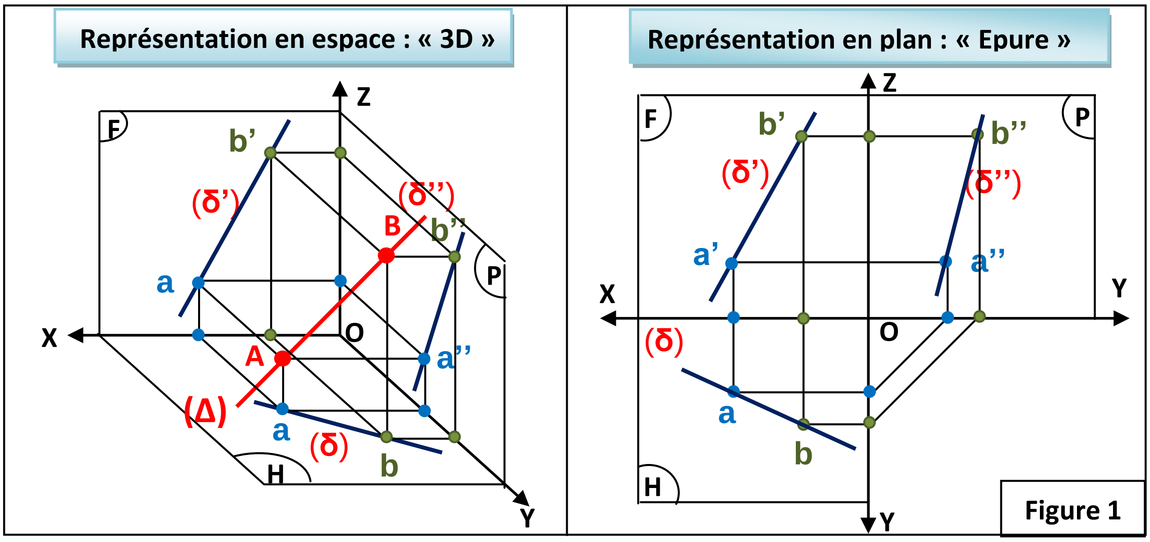


Figure 1

- (**ab**) correspondant à (**δ**)
- (**a'b'**) correspondant à (**δ'**)
- (**a''b''**) correspondant à (**δ''**)

APPARTENANCE D'UN POINT A UNE DROITE :

Si un point **M** appartient à une droite ; ces projections (**m**, **m'** et **m''**) doivent appartenir obligatoirement aux projections respectives (**δ**, **δ'** et **δ''**) *(voir figure **2**)*

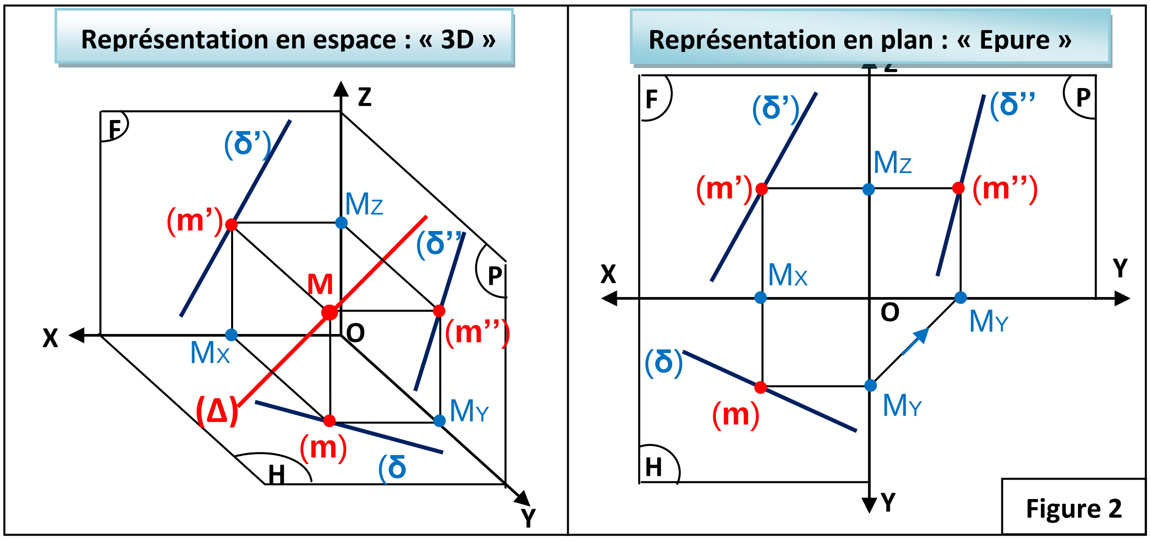


Figure 2

$$M \in (\Delta) \Rightarrow \begin{cases} m \in (\delta) \\ m' \in (\delta') \\ m'' \in (\delta'') \end{cases}$$

II. Droites remarquables

Les droites peuvent avoir des positions quelconques dans l'espace, donc plusieurs positions par rapport aux différents plans de projections frontal (F), horizontal (H) et de profil (P).

Elles sont dites remarquables si elles sont parallèles, perpendiculaires à l'un des plans de projection ; sinon elles sont quelconques.

Dans le cas ou les droites sont remarquables, alors cela faciliterai la détermination de leurs épures selon leur position par rapport aux plans de projection

II.1. Droite Verticale

a. Définition : Une droite verticale *(voir figure 3)* notée **(V)** est une droite perpendiculaire au plan de projection horizontal (H); donc parallèle au plan frontal (F) et au plan de profil (P).

b. Représentation en espace et en épure :

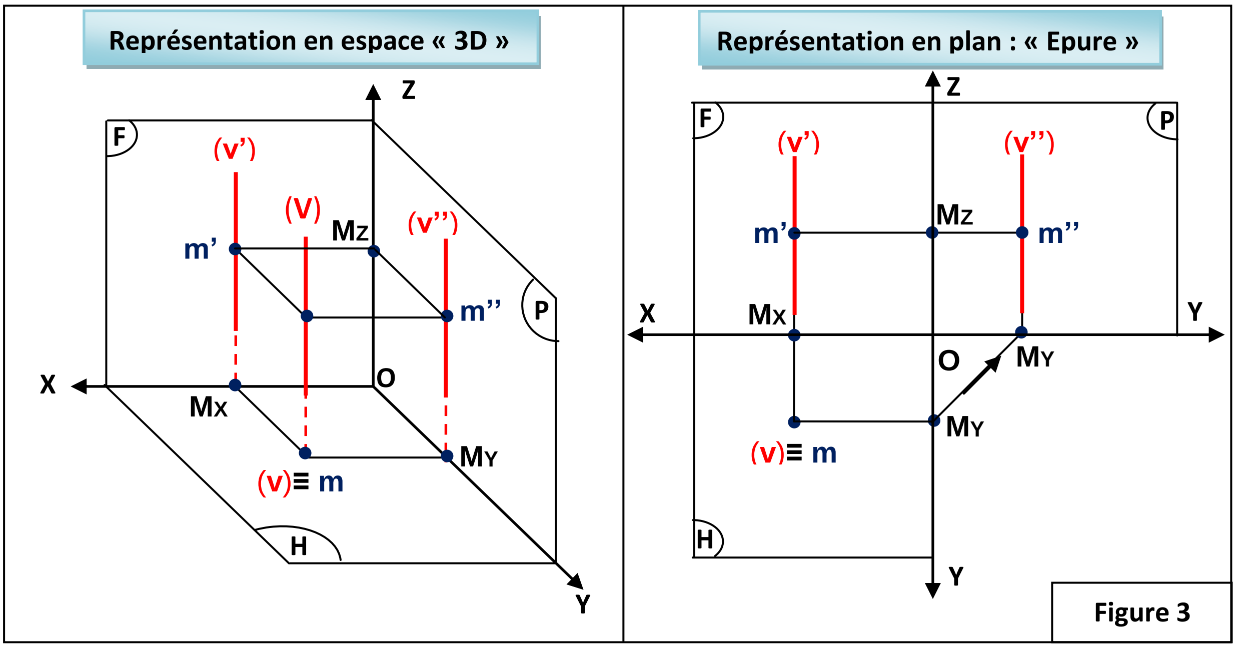


Figure 3

- La droite verticale se projette en un seul point sur le plan horizontal (H), qui nous permet de définir les cordonnées uniques de **X** et **Y**.
- La projection frontale (**v'**), est perpendiculaire à (**OX**) par l'abscisse **X**.
- La projection de profil (**v''**), est perpendiculaire à (**OY**) par l'éloignement **Y**.

Les deux projections (**v'**) et (**v''**) sont par conséquent parallèle à l'axe (**OZ**).

II.2. Droite De bout *(voir figure 4)*

a. Définition : Une droite de bout notée (**B**) est une droite perpendiculaire au plan de projection (F), donc parallèle au plan (H) et au plan (P).

b. Représentation en espace et en épure :

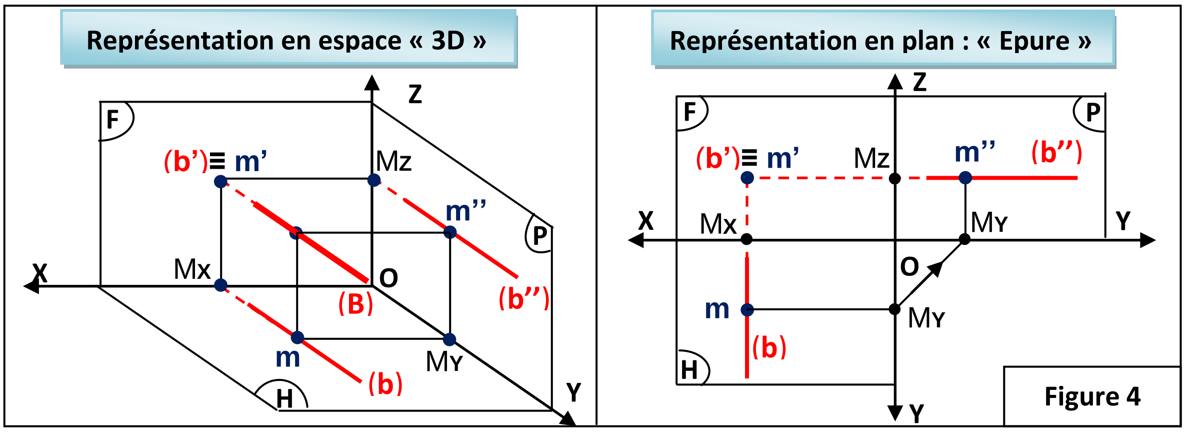


Figure 4

- La droite verticale se projette en un seul point sur le plan horizontal (F), qui nous permet de définir les cordonnées uniques de **X** et **Z**.
- La projection horizontale (**b**), est perpendiculaire à (**OX**) par l'abscisse **X**.
- La projection de profil (**b''**), est perpendiculaire à (**OZ**) par la cote **Z**.

Les deux projections (**b'**) et (**b''**) sont par conséquent parallèle à l'axe (**OZ**).

II.3. Droite Parallèle à la ligne de terre (OX) - [Fronto-horizontale] *(voir figure 5)*

a. Définition : Une droite parallèle à la ligne de terre notée (**L**) est une droite perpendiculaire au plan (F), donc parallèle au plan (H) et au plan (P).

b. Représentation en espace et en épure :

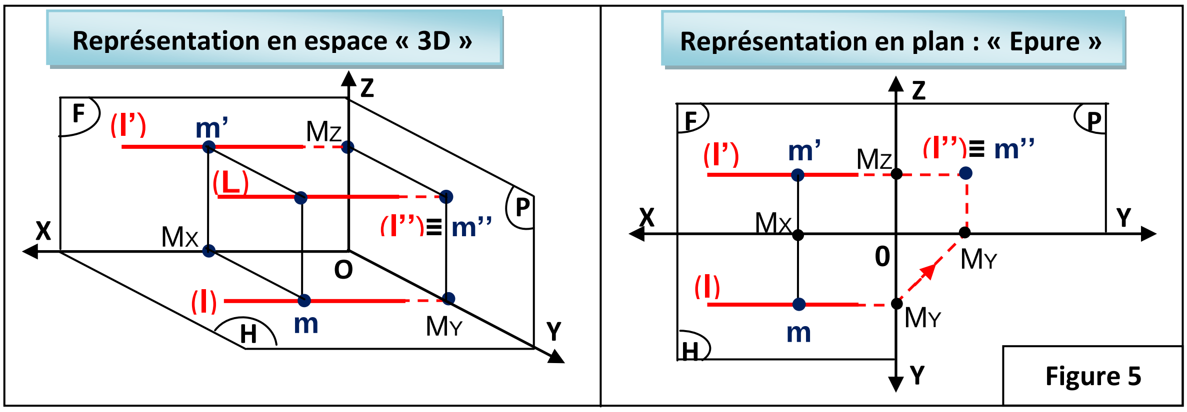


Figure 5

- La droite parallèle à la ligne se projette en un seul point sur le plan de profil (P), qui nous permet de définir les cordonnées uniques de **Y** et **Z**.
- La projection horizontale (**l**), est perpendiculaire à (**OY**) par l'éloignement **Y**.
- La projection de profil (**l''**), est perpendiculaire à (**OZ**) par la cote **Z**.

Les deux projections (**l**) et (**l''**) sont par conséquent parallèle à l'axe (**OX**).

II.4. Applications

1. Cas d'une droite verticale :

Tracer l'épure d'une droite verticale passant le point **M** (**+35**, **+40**, **+45**)

Réponse : *(voir figure **6**)*

Nous commençons par tracer l'épure du point **M**.

- La projection horizontale **m** concorde avec la projection (**v**).
- A partir de la projection frontale **m'**, nous traçons la projection frontale (**v'**) qui sera perpendiculaire à (**OX**) sur l'abscisse (**M**x = **+35**).
- A partir de la projection de profil **m''**, nous traçons la projection de profil (**v''**) qui sera perpendiculaire à (**Oy**) sur l'éloignement (**M**Y = **+40**).

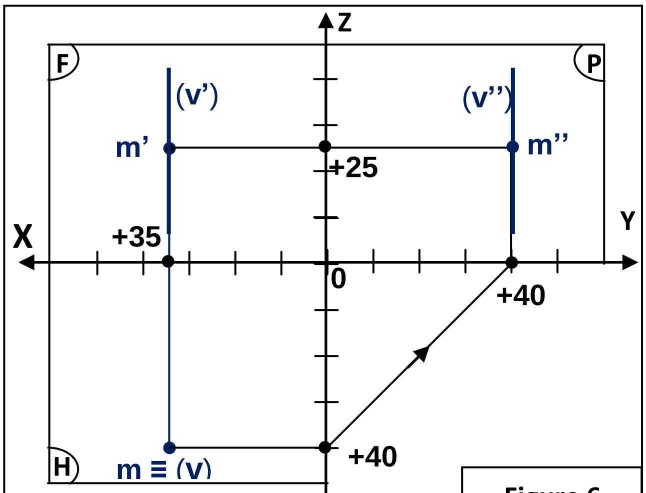


Figure 6

2. Cas d'une droite de bout :

Tracer l'épure d'une droite debout connaissant deux projections d'un point **N** (**n**, **?**, **n''**) lui appartient.

Réponse : *(voir figure **7**)*

Comme nous avons deux projections de **N** qui sont connues, la troisième est directement obtenue par les lignes de rappel

- La projection frontale **n'** concorde avec la projection (**b'**).
- A partir de la projection horizontale **n**, nous traçons projection horizontale (**b**) perpendiculaire à (**N**x = **OX**).
- A partir de la projection de profil **n''**, nous traçons projection de profil (**b''**) perpendiculaire à (**N**Y = **OY**).

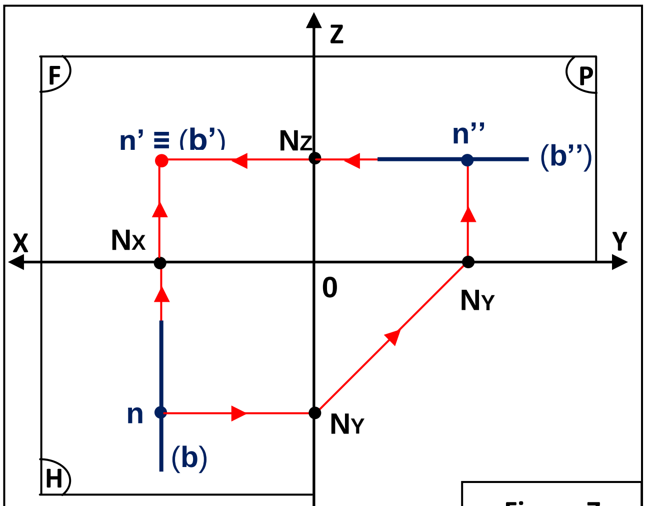


Figure 7

3. Cas d'une droite parallèle à la ligne de terre :

Tracer l'épure d'une droite parallèle à la ligne de terre, sachant qu'elle passe par un point **G** dont on connait uniquement sa projection de profil.

Réponse : *(voir figure **8**)*

La projection de profil **g''** nous permet de définir les deux coordonnées **GY** et **GZ** ; et par définition :

- La projection de profil **(l'')** est confondue avec la projection de profil **g''**.
- A partir de la coordonnée **GY** par une de rappel, nous traçons la projection horizontale (**l**) perpendiculaire à (**OY**).
- A partir de la coordonnée **GZ**, par une de rappel, nous traçons la projection frontale (**l'**) perpendiculaire à (**OZ**).

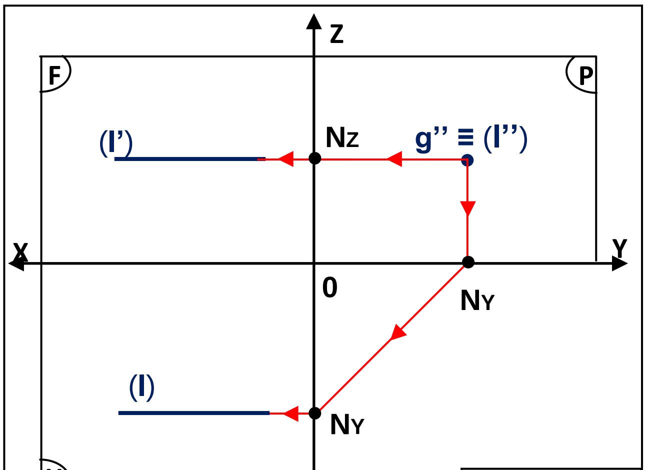


Figure 8

II.5. Droite Horizontale *(voir figure **9**)*

a. Définition : Une droite horizontale (figure 9) notée **(H)** est une droite parallèle au plan de projection horizontal Ⓗ; elle forme un angle **α** avec le plan frontal Ⓕ et un angle **β** avec le plan de profil Ⓟ.

Elle a la particularité que tous ses points ont la même cote (**Z**).

b. Représentation en espace et en épure :

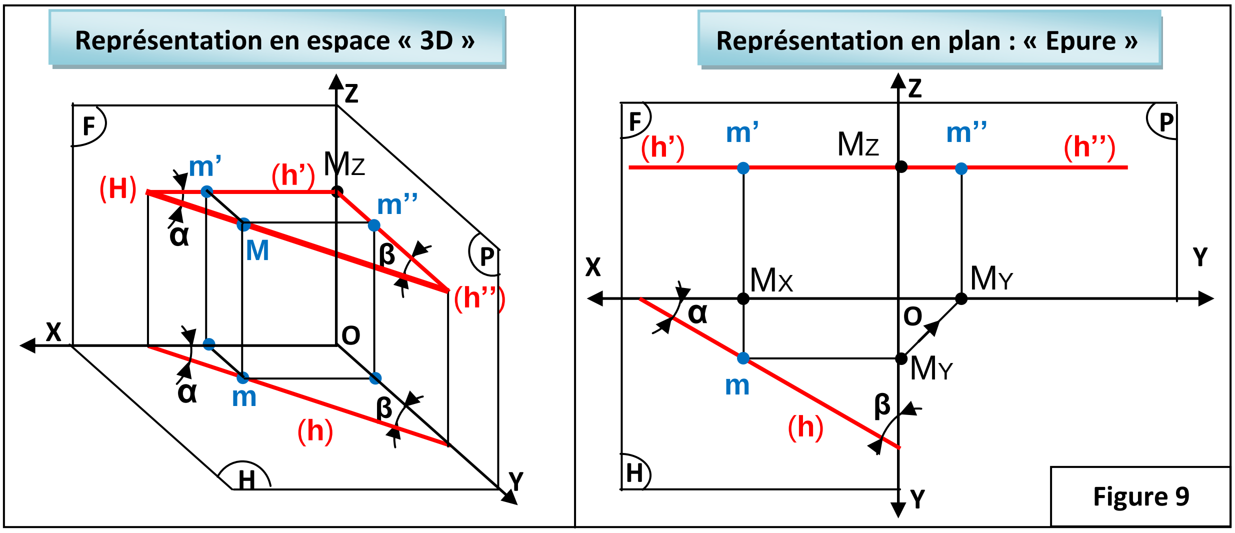


Figure 9

Une droite horizontale se caractérise par la même cote **Z** de tous ses points.

Sa projection par rapport :

- Au plan horizontal : (**h**) en vraie grandeur et parallèle à la droite (**H**) ; en formant le même angle **α** avec l'axe (**OX**) et le même angle **β** avec l'axe (**OX**).
- Au plan frontal : **(h')** est parallèle à l'axe **(OX)** et perpendiculaire à **(OZ)**.
- Au plan de profil : (**h''**) est parallèle à l'axe (**OY**) et perpendiculaire à (**OZ**).

Pour tracer l'épure d'une droite horizontale il est nécessaire et suffisant de connaître :

- Les projections d'un point lui appartenant
- La valeur de l'angle **α**, ou celle de **β**.

Ou bien

- Les projections de deux points lui appartenant

c. Application :

Tracer l'épure d'une droite horizontale (**H**) formant un angle (**α=40°**) avec le plan frontal et qu'elle contient un point **M (+20**, **+25**, **+30**).

Réponse : *(voir figure **10**)*

1. On doit d'abord placer l'épure du point **M** ; trouver **m**, **m'** et **m''**
2. Ensuite par sa projection horizontal **m**, on fait mener une droite qui forme un angle (**α=40°**) avec l'axe (**OX**), ce qui représente ainsi la projection horizontale
3. La projection frontale (**h'**) d'une droite horizontale est toujours perpendiculaire à l'axe (**OZ**); donc par la cote **(MZ** = **+30**), nous traçons (**h'**) perpendiculaire à (**OZ**).
4. La projection de profil (**h''**) d'une droite horizontale est toujours perpendiculaire à l'axe (**OZ**); donc par la cote **(MZ** = **+30**), nous traçons (**h''**) perpendiculaire à (**OZ**).

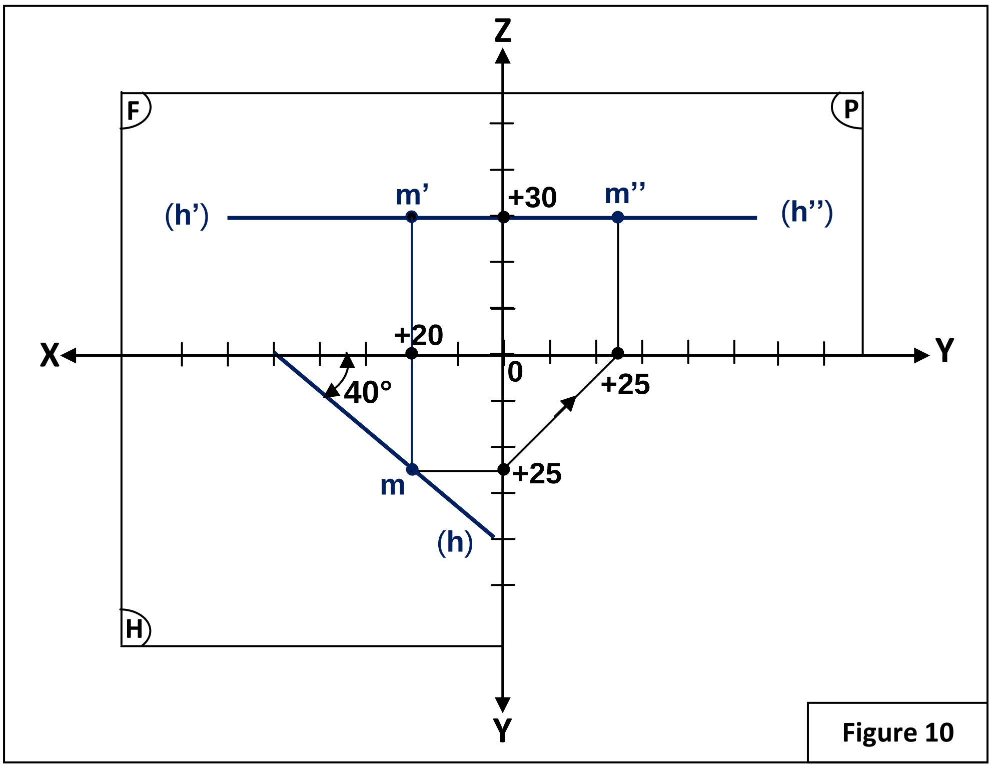


Figure 10

II.6. Droite Frontale

a. Définition : Une droite frontale *(figure **11**)* notée **(F)** est une droite parallèle au plan de projection frontal F; elle forme un angle **α** avec le plan horizontal H et un angle **β** avec le plan de profil P.

Elle a la particularité que tous ses points ont le même éloignement (**Y**).

b. Représentation en espace et en épure :

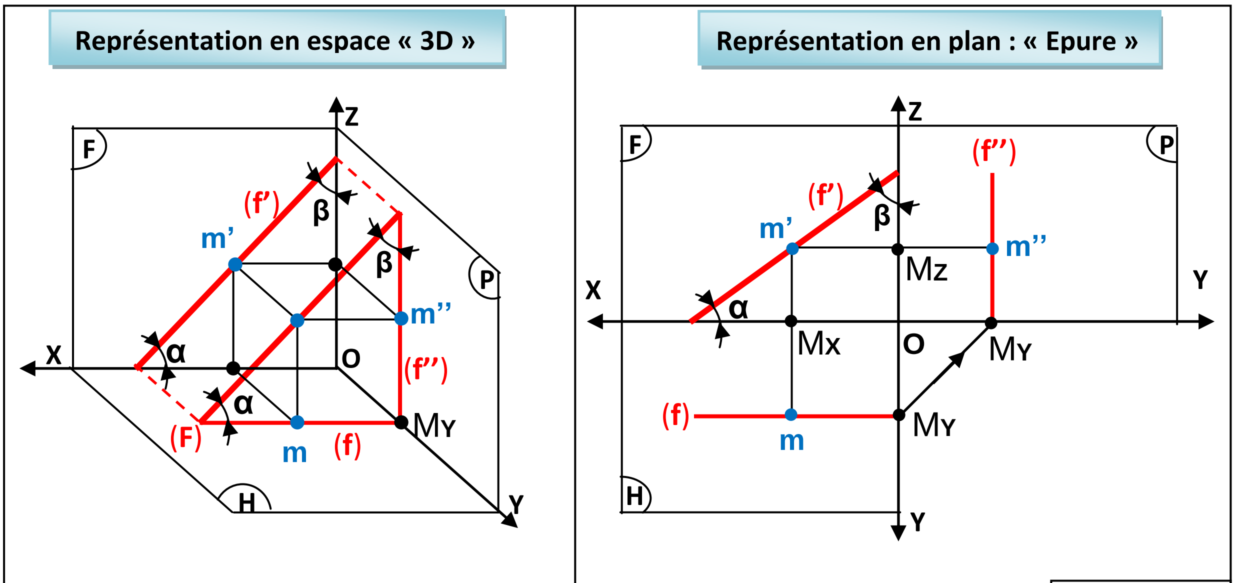


Figure 11

Une droite frontale à la caractéristique que tous ses points ont le même éloignement **Y**.

Sa projection par rapport :

- Au plan frontal : (**f'**) en vraie grandeur et parallèle à la droite (**F**) ; en formant le même angle **α** avec l'axe (**OX**) et le même angle **β** avec l'axe (**OZ**).
- u plan horizontal : (**f**) parallèle à l'axe (**OX**) et perpendiculaire à (**OY**).
- Au plan de profil : (**f''**) parallèle à l'axe (**OZ**) et perpendiculaire à (**OY**).

Pour tracer l'épure d'une droite frontale il est nécessaire et suffisant de connaître :

- Les projections d'un point lui appartenant
- La valeur de l'angle **α**, ou celle de **β**.

c. Application :

Tracer l'épure d'une droite frontale (**F**) passant par les points :

- **M (+20**, **+25**, **+30**)
- **N (+35**, **?**, **+15**).

Réponse : *(voir figure **12**)*

1. Nous traçons l'épure des points **M** et **N** en sachant que par définition, ils ont tous deux le même éloignement ;
2. Ensuite nous traçons la projection frontale (**f'**) passant par **m'** et **n'**
3. Puis, d'après la définition de la droite frontale, nous traçons les projections (**f**) et (**f''**) toutes deux perpendiculaires à (**OY**) sur (**MY** = **MY** = **+25**)

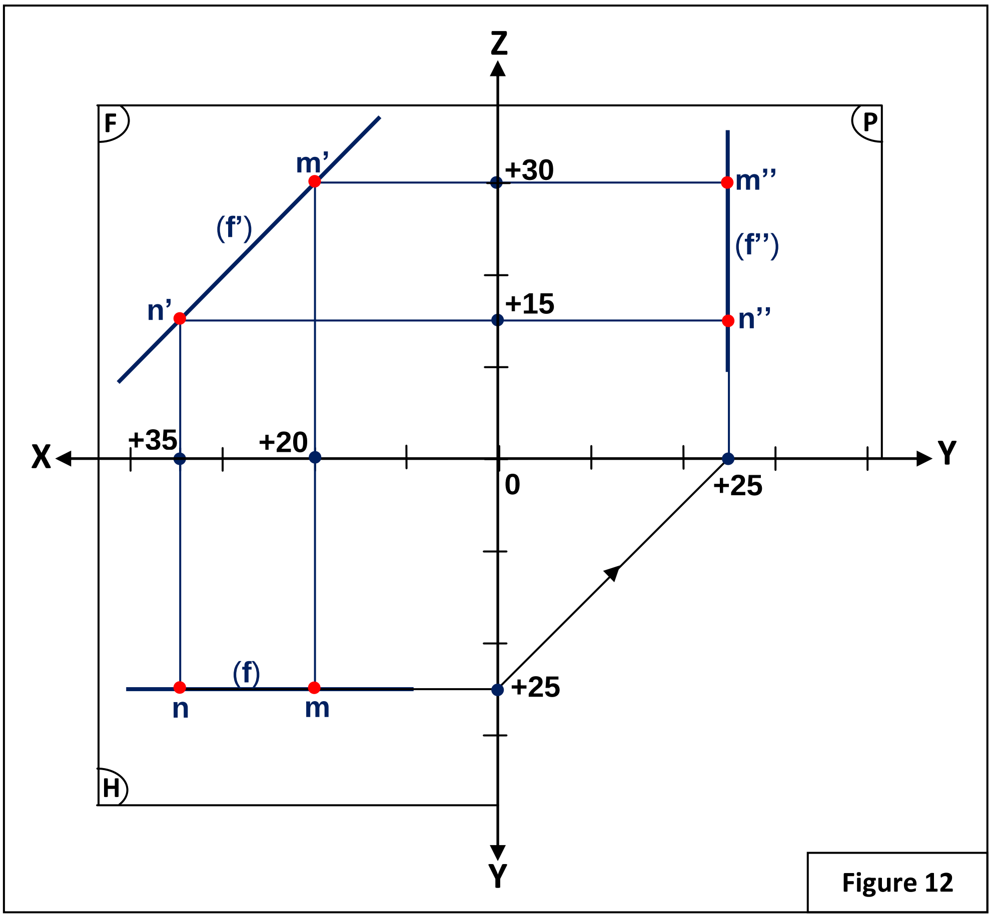


Figure 12

II.7. Droite de Profil *(voir figure **13**)*

c. Définition : Une droite de profil notée **(P)** est une droite parallèle au plan de projection de profil Ⓟ; elle forme un angle **α** avec le plan horizontal Ⓗ et un angle **β** avec le plan frontal Ⓕ.

Elle a la particularité que tous ses points ont la même abscisse (**X**).

d. Représentation en espace et en épure :

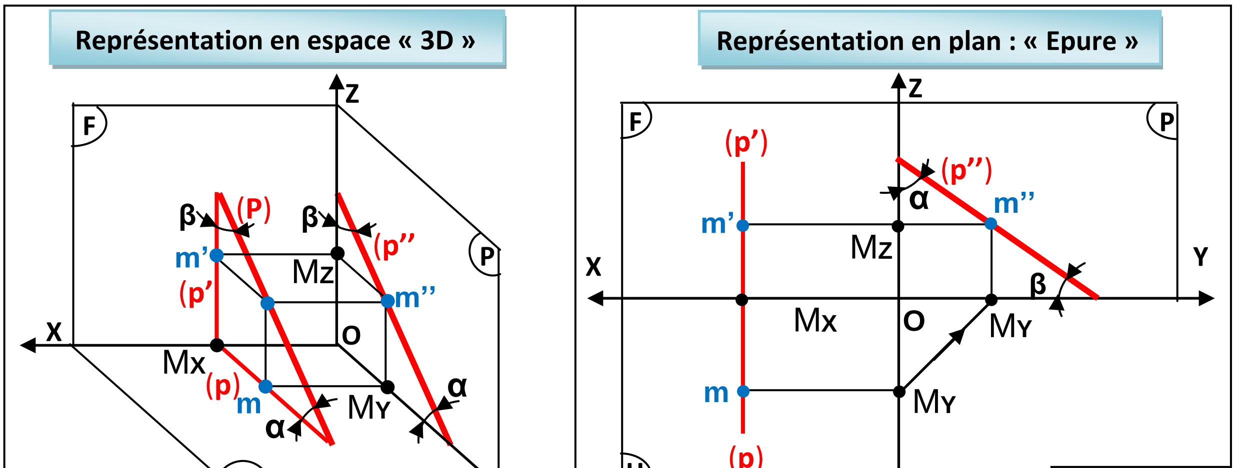


Figure 13

Une droite de profil à la caractéristique que tous ses points ont le même éloignement **Y**.

Sa projection par rapport :

- Au plan de profil : (**p''**) est en vraie grandeur et parallèle à la droite (**P**) ; en formant le même angle **α** avec l'axe (**OY**) et le même angle **β** avec l'axe (**OZ**).
- Au plan horizontal : (**p**) est parallèle à l'axe (**OY**) et est perpendiculaire à (**OX**).
- Au plan frontal : (**p'**) est parallèle à l'axe (**OZ**) et est perpendiculaire à (**OX**).

Pour tracer l'épure d'une droite de profil, il est nécessaire et suffisant de connaître :

- Les projections d'un point lui appartenant
- La valeur de l'angle **α**, ou celle de **β**.

d. Application :

Tracer l'épure d'une droite de profil (**P**) passant par un point dont son abscisse est nulle, son éloignement est égal à (**+30**) et sa cote est égale à (**+35**).

Réponse : *(voir figure **14**)*

- Par définition la projection (**p**) est parallèle à (**OX**) passant l'éloignement (**+30**) qui est unique pour toute la droite.
- La projection (**p'**) est parallèle à (**OX**) passant la cote (**+35**) qui est unique pour toute la droite.
- La projection (**p''**) est en vraie grandeur et passe par l'éloignement (**+30**) et la cote (**+35**).

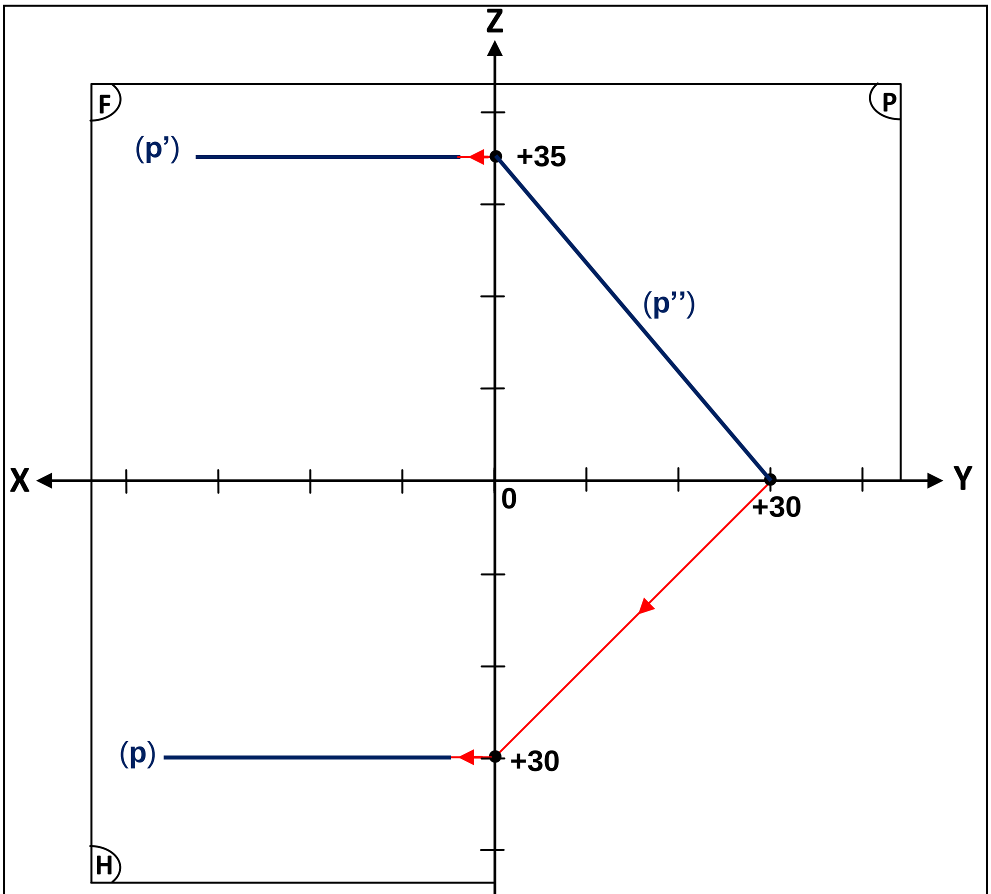


Figure 14

II.8. Droites Concourantes *(voir figure **15**)*

a. Définition : Pour que deux droites soient concourantes, il faut et il suffit qu'elles possèdent un point commun.

Les projections de même nom de ces deux droites se coupent sur la même de rappel deux à deux.

b. Représentation en espace et en épure : Considérons deux droites ($\boldsymbol{\Delta_1}$) et ($\boldsymbol{\Delta_2}$) concourantes au point **I**, déterminer leurs projections en espace et en épure.

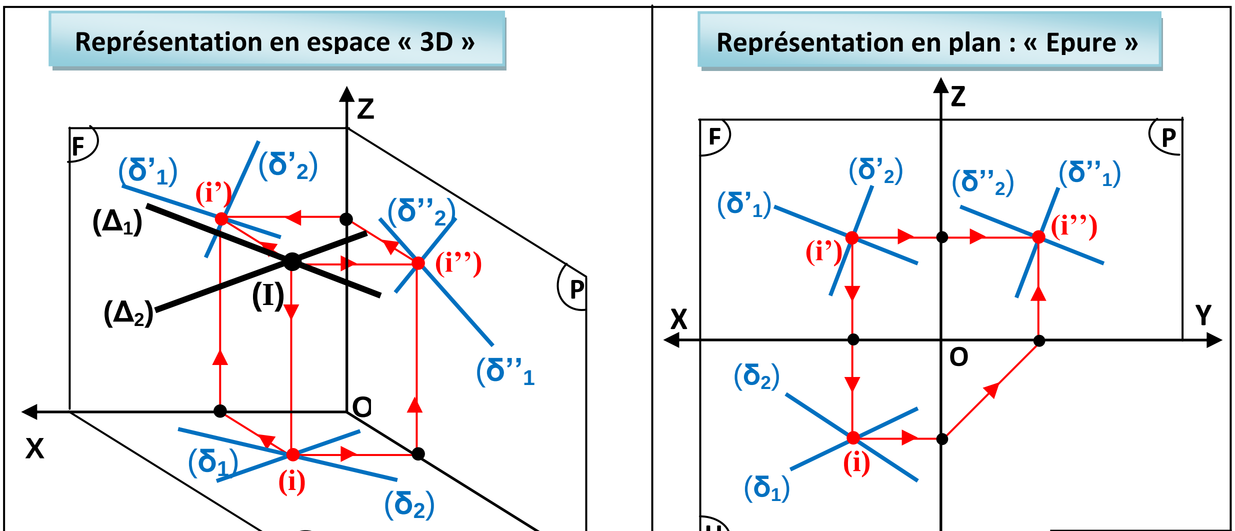


Figure 15

Remarque : Dans l'exemple suivant, les points d'intersection sur les trois plans sont différents, donc cela veut dire que les deux droites ne sont pas concourantes. *(Voir figure **16**)*

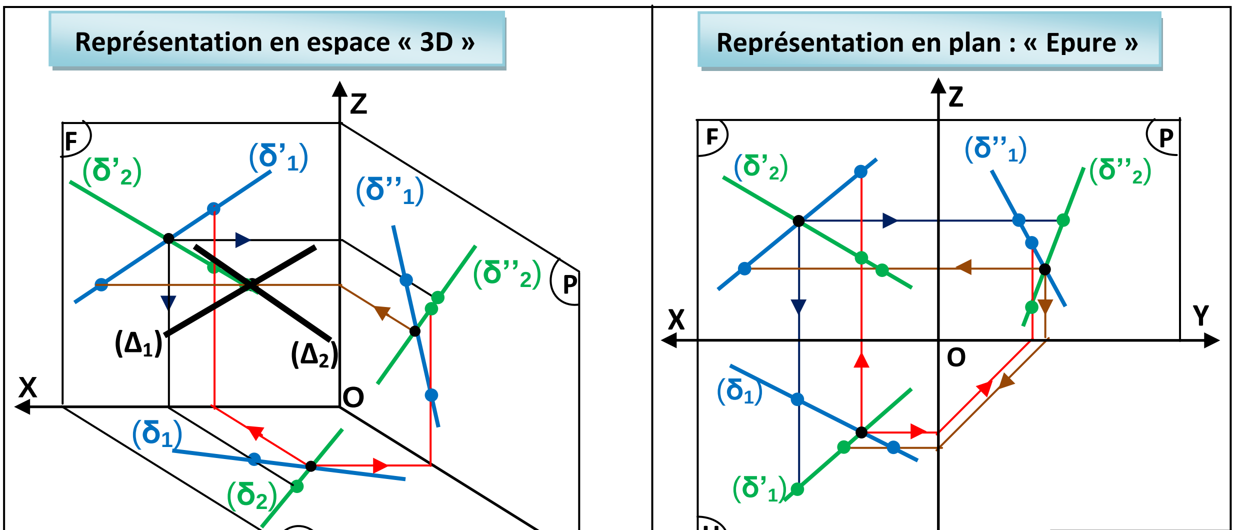


Figure 16

c. Application :

Tracer l'épure d'une droite horizontale (**H**) concourante avec une droite quelconque (**Δ**) donné au point **I** dont on connait uniquement la valeur de son abscisse (**I**$_X$ = **+30**) **;** tel que (**Δ**) (**δ, δ', δ''**) est complètement définie et la droite horizontale (**H**) qui passe par un point **M** avec la valeur les valeurs de son abscisse et sa cote son connus, (**M**$_X$ = **+20**) et (**M**$_Y$ = **+25**)

Réponse :

- A partir de (**I**$_X$ = **+30**), et à l'aide des lignes de rappel sur les projections (**δ**), (**δ'**) et (**δ''**), nous déterminons l'épure du point **I (+30, +20, +25)**
- Puisque les deux droites sont concourantes au point **I**, donc par **i'** nous traçons la projection frontale (**h'**) de (**H**) en sachant que par définition elle doit être parallèle à (**OX**) et perpendiculaire à (**OZ**) sur la cote unique qui concorde avec (**I**$_Z$ = **+25)**.
- Puisque la projection **m** est connue, donc par les lignes de rappel sur la projection (**h'**), et sachant que c'est une droite horizontale, nous avons une valeur de la cote unique ; (**M**$_Z$ = **+25**)
- De même, par **i''** nous traçons la projection frontale (**h''**) de (**H**) en sachant que par définition elle doit être parallèle à (**OY**) et perpendiculaire à (**OZ**) sur la cote unique qui concorde elle aussi avec (**I**$_Z$ = **+25)**.
- a projection horizontale (**h**) de (**H**) se trace en joignons **i** et **m**.

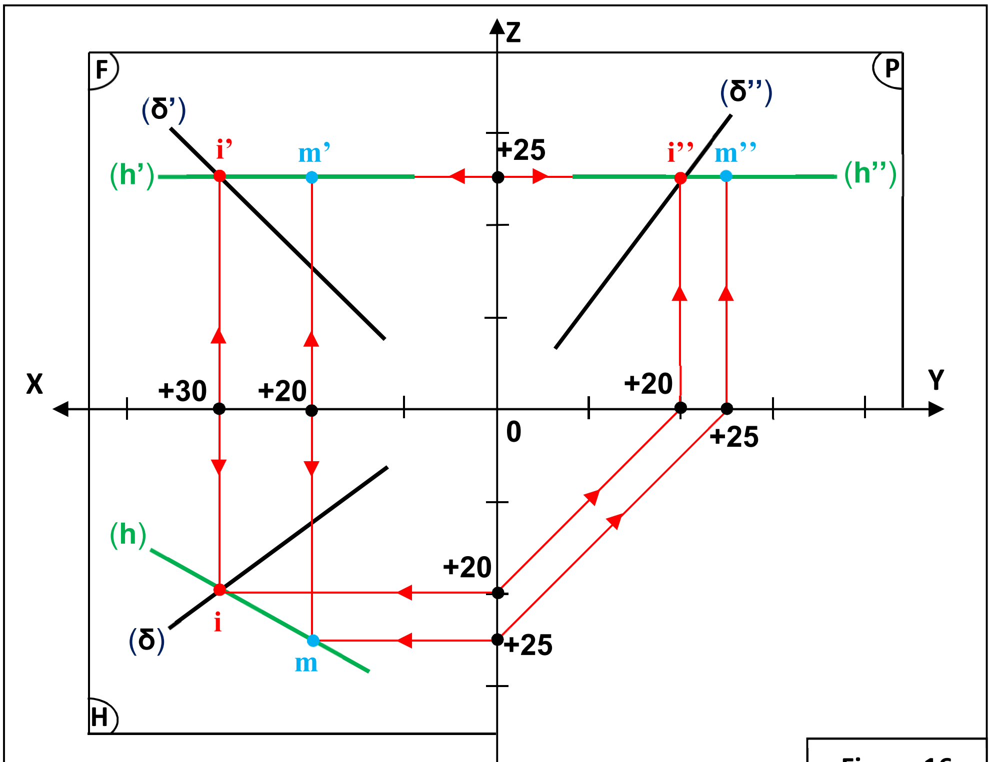


Figure 16

II.9. Droites Parallèles

a. Définition :

Pour que deux droites soient parallèles, il faut que les projections de même nom de ces deux droites soient parallèles entre elles.

- Sur le plan horizontal (H) les projections des deux droites doivent être parallèles.
- Sur le plan frontal (F), les projections des deux droites doivent être parallèles.
- Sur le plan de profil (P), les projections des deux droites doivent être parallèles.

b. Représentation en espace et en épure :

Considérons deux droites (Δ_1) et (Δ_2) parallèles entre elles dans l'espace. Déterminer leurs projections en espace et en épure.

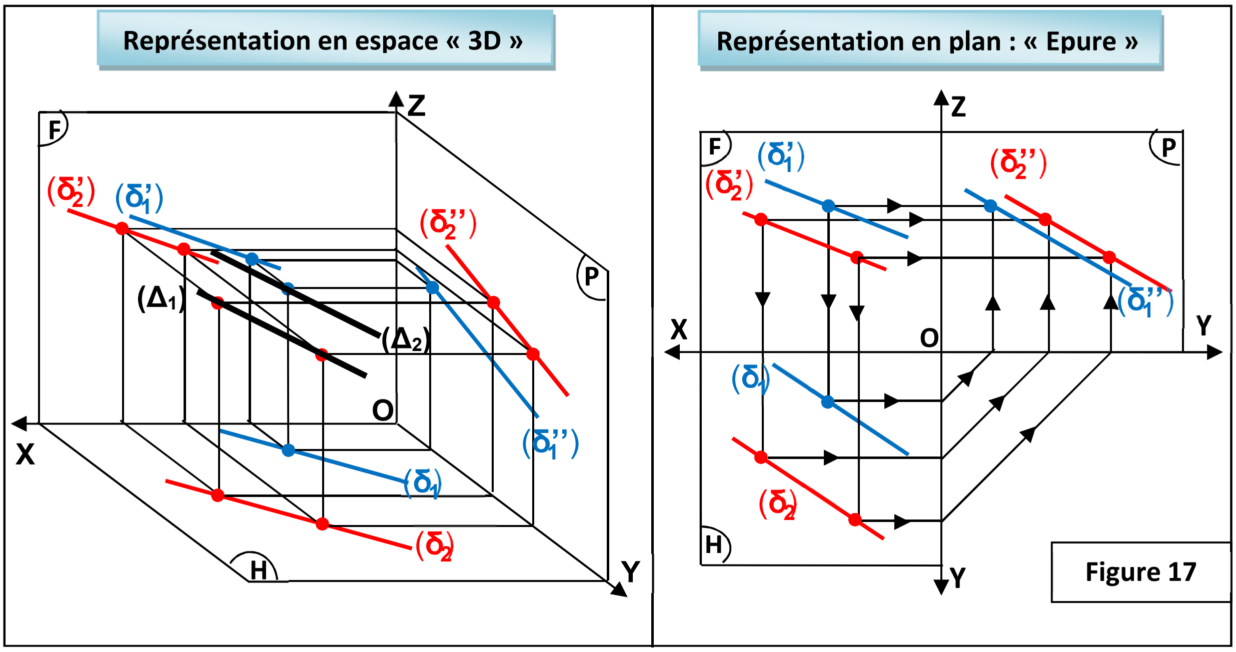


Figure 17

$$(\Delta_1) \parallel (\Delta_2) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (\delta_1) \parallel (\delta_2) \\ (\delta_1') \parallel (\delta_2') \\ (\delta_1'') \parallel (\delta_2'') \end{array} \right\}$$

c. Application :

Etant donné l'épure d'une droite (**Δ_1**) (**δ_1, δ_1', δ_1''**).

Question :

Par un point **I** (**+40, +15, +25**) donné, tracer l'épure de la droite (**Δ_2**), parallèle à la droite (**Δ_1**) (**δ_1, δ_1', δ_1''**) donnée.

Réponse : *(voir figure **19**)*

1. Nous traçons en premier lieu l'épure du point **I (+40, +15, +25)**
2. Par **i** nous traçons la projection horizontale (**δ_2**) parallèle à (**δ_1**).
3. Par **i'** nous traçons la projection frontale (**δ_2'**) parallèle à (**δ_1'**).
4. Par **i''** nous traçons la projection frontale (**δ_2''**) parallèle à (**δ_1''**).

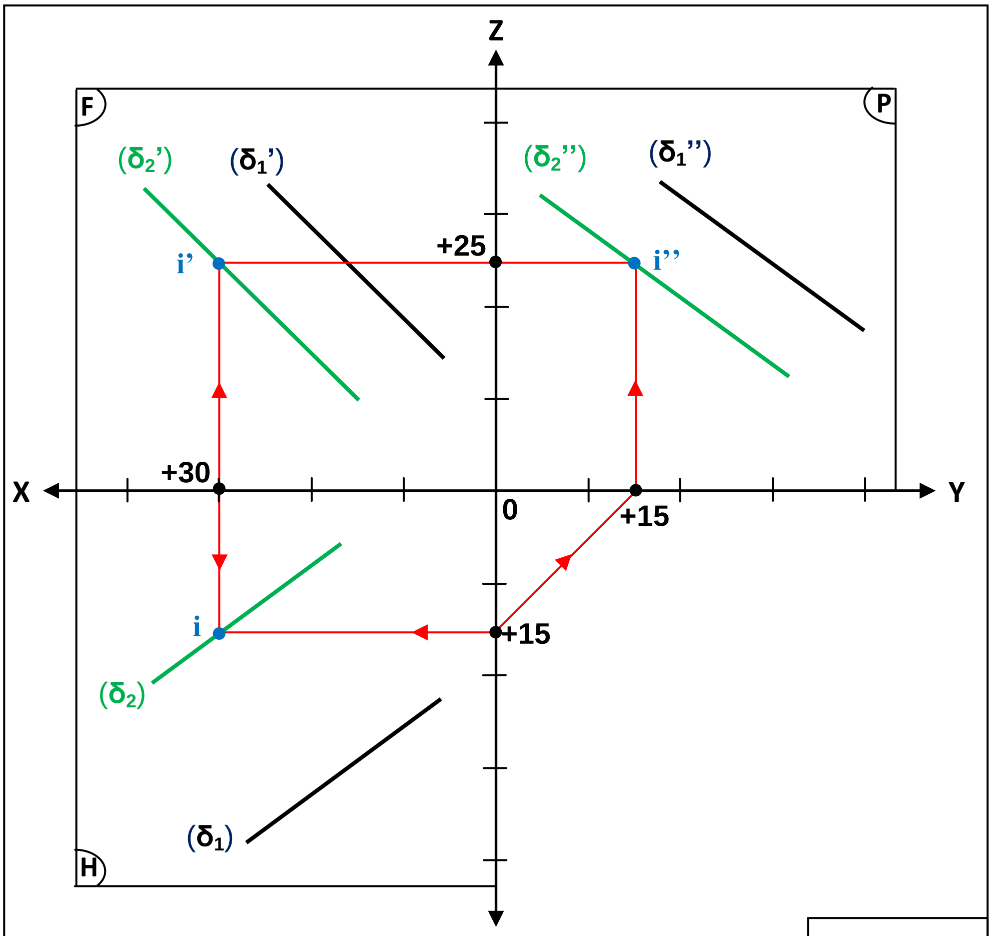


Figure 19

II.10. Exercice sur les droites

Soit la figure **20** suivante, sur laquelle sont représentés un ensemble de droites (**D_1**), (**D_2**) et (**D_3**).

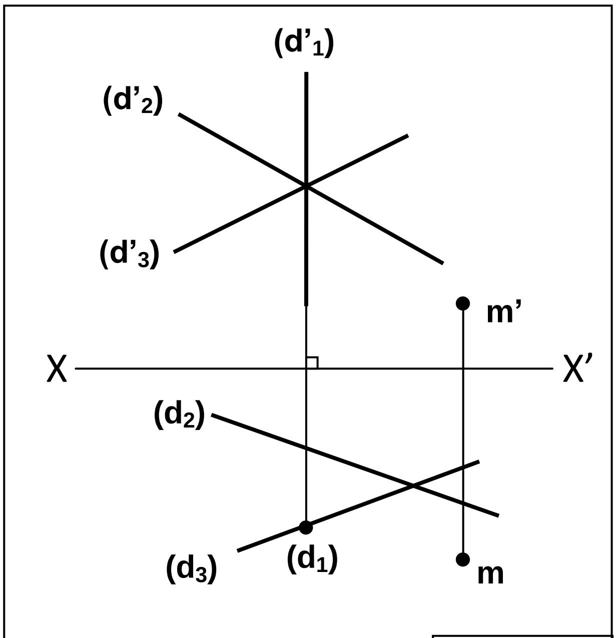


Figure 20

Questions

1. Les droites (**D_1**) et (**D_2**) sont elles concourantes ? justifier votre réponse
2. Les droites (**D_1**) et (**D_3**) sont elles concourantes ? justifier votre réponse
3. Tracer la droite (**L_1**) parallèle à (**D_1**) et passant par le point **M**
4. Tracer la droite (**L_2**) perpendiculaire à (**D_1**) et passant par le point **M**
5. Tracer la droite (**L_3**) parallèle à (**D_3**) et passant par le point **M**

Réponses : *(voir figure **21**)*

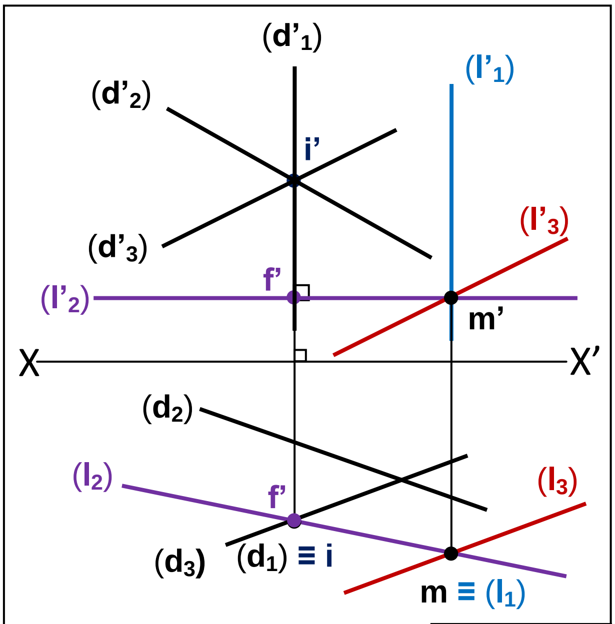


Figure 21

1. Les droites (**D_1**) et (**D_2**) sont concourantes car le point d'intersection sur le plan frontal et le plan horizontal.

2. Les droites (**D_1**) et (**D_2**) ne sont concourantes car le point d'intersection sur le plan frontal est différent que celui sur le plan horizontal.

3. Pour que (**L_1**) soit parallèle à (**D_1**), il faut que leurs projections frontales et horizontales soient respectivement parallèles entre elles.

(**l_1**)// (**d_1**) et (**l'_1**)// (**d'_1**)

4. Pour que (**L_3**) soit parallèle à (**D_3**), il faut que leurs projections frontales et horizontales soient respectivement parallèles entre elles.

(**l_3**)// (**d_3**) et (**l'_3**)// (**d'_3**)

5. Pour que (**L_3**) soit parallèle à (**D_3**), il faut que leurs projections respectives frontales et horizontales soient parallèles entre elles. (**l_3**)// (**d_3**) et (**l'_3**)// (**d'_3**)

III. Traces d'une Droite

III.1. Définition : *(figure 22)*

Les traces d'une droite sont les points d'intersection de cette droite avec les différents plans de projection, horizontal (H), frontal (F) et de profil (P).

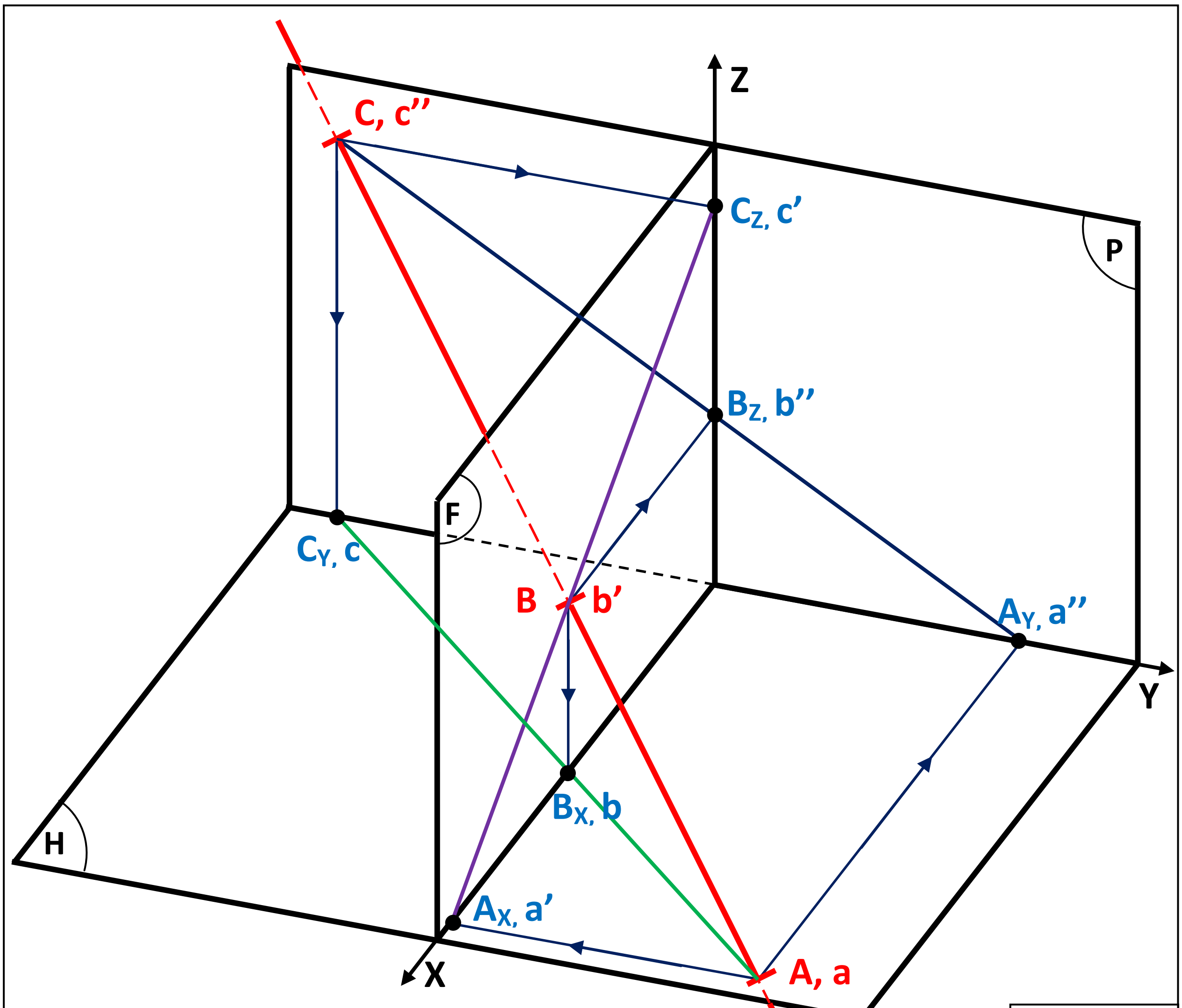


Figure 22

La trace d'une droite est un point qui fait partie à la fois de cette droite et du plan avec qui il est en intersection.

Par convention l'intersection avec,

- le plan horizontal (H) est nommée trace horizontale et est désignée par la lettre «**A**»
- Le plan frontal (F) est nommée trace frontale et est désignée par la lettre «**B**»
- Le plan de profil (P) est nommée trace de profil et est désignée par la lettre «**C**»

III.2. Epure de la droite et ses traces : *(figure **23**)*

Les traces d'une droite sont des points qui appartiennent à la fois à la droite et aux trois plans de projection ; donc ils sont respectivement confondues avec la projection sur le plan ou ils se touvent.

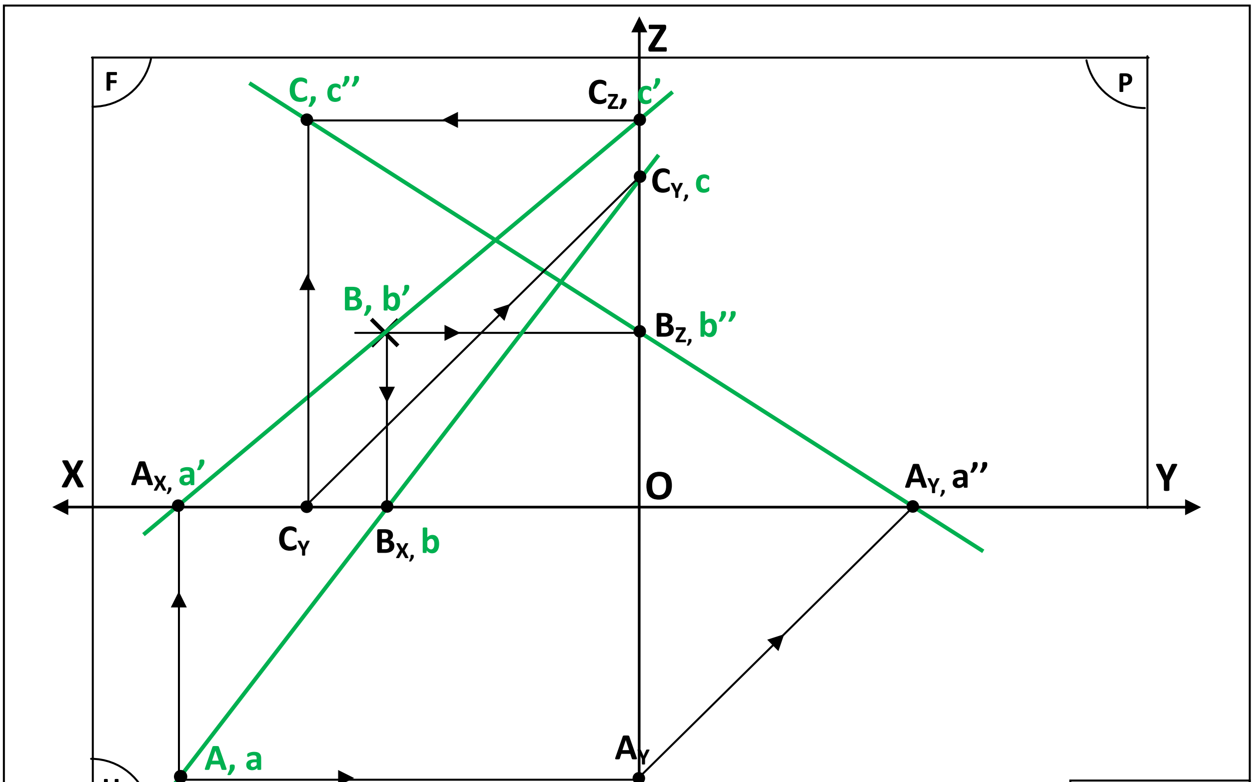


Figure 23

III.3. Conclusion :

- La trace horizontale **A**, a toujours comme
  - Projection horizontale **a**, confondue avec le point lui même **A**
  - Projection frontale **a'**, confondue avec l'abscisse **A_X**
  - Projection de profil **a''**, confondue avec l'éloignement **A_Y**

- La trace frontale **B**, a toujours comme
  - Projection horizontale **b**, confondue avec l'abscisse **B_X**
  - Projection frontale **b'**, confondue avec le point lui même **B**
  - Projection de profil **b''**, confondue avec la cote **B_Z**

- La trace de profil **C**, a toujours comme
  - Projection horizontale **c**, confondue avec l'éloignement **C_Y**
  - Projection frontale **c'**, confondue avec la cote **C_Z**
  - Projection de profil **c''**, confondue avec le point lui même **C**

III.4. Applications :

Exercice 1 :

Etant donné une droite (**D**), dont on connait uniquement sa projection frontale (**d'**) et sa projection de profil (**d''**).

Questions :

1. Définir les traces **A**, **B** et **C** de la droite (**D**).
2. Tracer la projection horizontale (**d'**) de cette droite

Réponse : *(voir figure **24**)*

1. Pour définir les traces, on doit trouver les points d'intersection des projections des droites avec les axes

- La projection frontale **a'** : intersection de (**d'**) avec (**OX**)
- La projection frontale **c'** : intersection de (**d'**) avec (**OZ**)
- La projection de profil **a''**: intersection de (**d''**) avec (**OY**)
- La projection de profil **b''**: intersection de (**d''**) avec (**OZ**)

Ensuite par les lignes de rappel, nous déterminons ;

- La projection horizontale **a** : à partir de **a'** et **A**$_Y$, et par conséquent la trace horizontale **A**
- La projection de profil **c''** : à partir de **c'** et **C**$_Y$, et par conséquent la trace de profil **C**
- La projection de profil **b'** : à partir de **b** et **b''**, et par conséquent la trace frontale **B**

2. Les points (**abc**) nous donnent directement la projection horizontale (**d**) de (**D**).

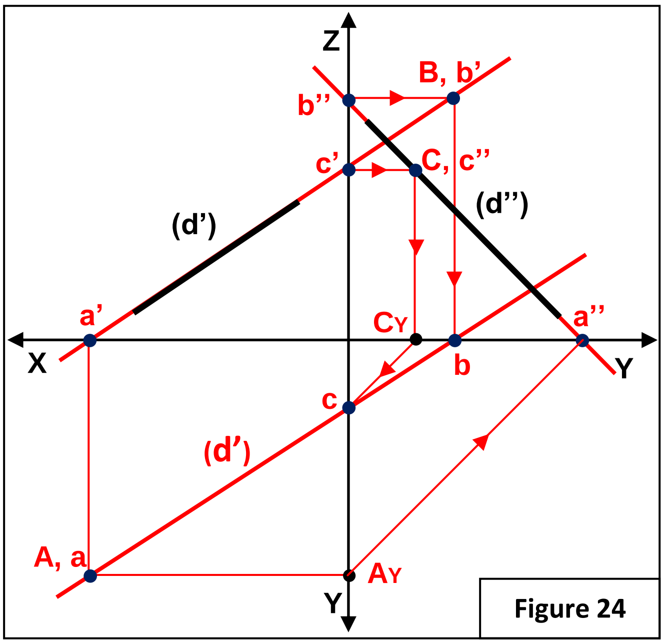


Figure 24

Exercice 2 : Etant donnés les points **A** et **B** qui représentent respectivement les traces horizontale et frontale d'une droite (**D**).

Réponse : Déterminer les projections (**d**, **d'**, **d''**) de la droite (**D**), en déduire la trace **C**.

Réponse : *(voir figure **25**)*

- A partir de la trace horizontale **A**, nous déterminons
  - La projection horizontale **a**, confondue avec la trace **A**
  - La projection frontale **a'**, par la ligne de rappel sur l'axe (**OX**)
  - La projection de profil **a''**, par la ligne de rappel sur l'axe (**OY**)
- A partir de la trace frontale **B**, nous déterminons
  - La projection frontale **b'**, confondue avec la trace **B**
  - La projection horizontale **b**, par la ligne de rappel sur l'axe (**OX**)
  - La projection de profil **b''**, par la ligne de rappel sur l'axe (**OZ**)
- Le tracé des projections (**d**, **d'**, **d''**) se fait à partir
  - L'alignement **a** et **b**, nous la projection horizontale (**d**) de (**D**)
  - L'alignement **a'** et **b'**, nous la projection frontale (**d'**) de (**D**)
  - L'alignement **a'** et **b''**, nous la projection de profil (**d''**) de (**D**)
- L'intersection des projections de (**D**) selon l'ordre suivant
  - La projection horizontale (**d**) avec (**OY**), nous donne la projection horizontale **c**
  - La projection frontale (**d'**) avec (**OZ**), nous donne la projection frontale **c'**
- La projection de profil **c''**, est obtenue à partir de la ligne de rappel de **c'** jusqu'à la projection de la droite (**d''**)
- La trace de profil **C**, est confondue avec sa projection **c''**

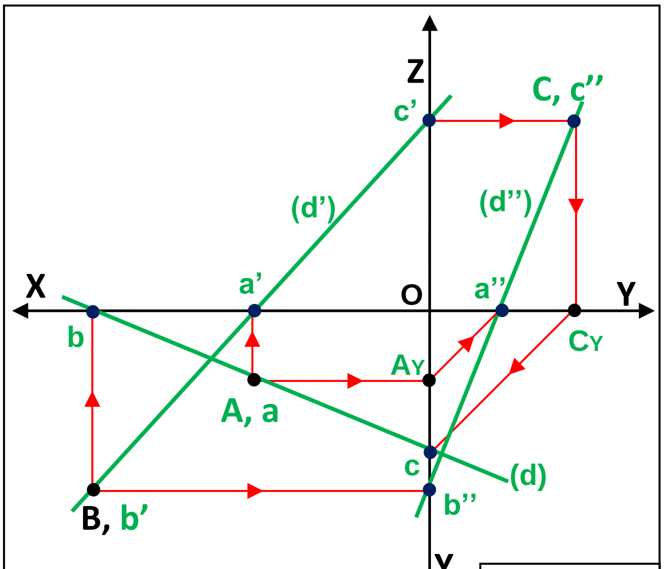


Figure 25

Chapitre III

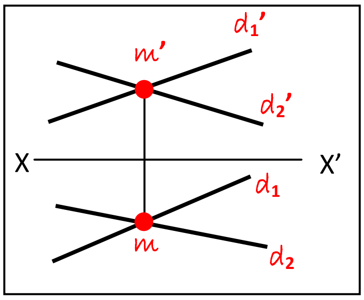
EPURE
DU PLAN

I. Définition du plan

Un plan peut être défini par différentes de plusieurs manières

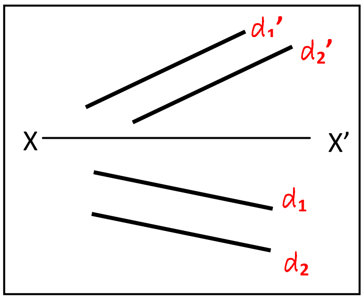
I.1. Par deux droites concourantes :

Par deux droites concourantes, on ne peut faire passer qu'un seul plan ; donc un plan peut être représenté par l'épure de deux droites concourantes.



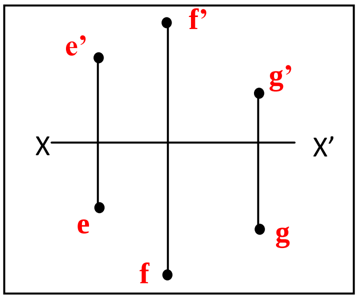
I.2. Par deux droites parallèles :

Par deux droites parallèles, on ne peut faire passer qu'un seul plan ; donc un plan peut être représenté par l'épure de deux droites parallèles.



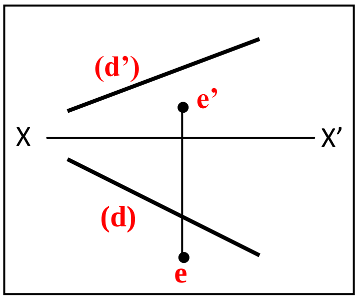
I.3. Par trois points non alignés

Trois points non alignés forment automatiquement des droites concourantes, donc un plan par conséquent un plan peut être représenté par l'épure de trois points non alignés.



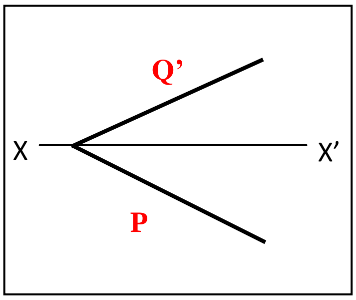
I.4. Par une droite et un point n'appartenant pas à cette droite :

Une droite et un point distincts peuvent former deux droites concourantes ou deux droites parallèles, donc ils ne forment qu'un seul plan ; donc un plan peut être représenté par l'épure d'une droite et un point distincts.



I.5. Par ses traces :

Les traces d'un plan sont des droites de ce même plan ; ils représentent l'intersection de ce plan avec les plans de projection.



II. Trace d'un plan :

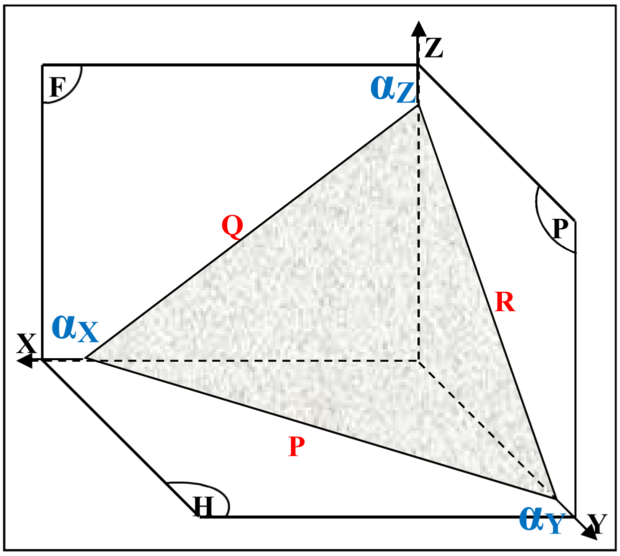
Les traces d'un plan sont les droites d'intersection de ce plan avec les différents plans de projection Ⓗ, Ⓕ et Ⓟ.

Un plan quelconque dans l'espace possède généralement trois traces, **P**, **Q'** et **R''**.

P : trace horizontale ;

Q' : trace frontale ;

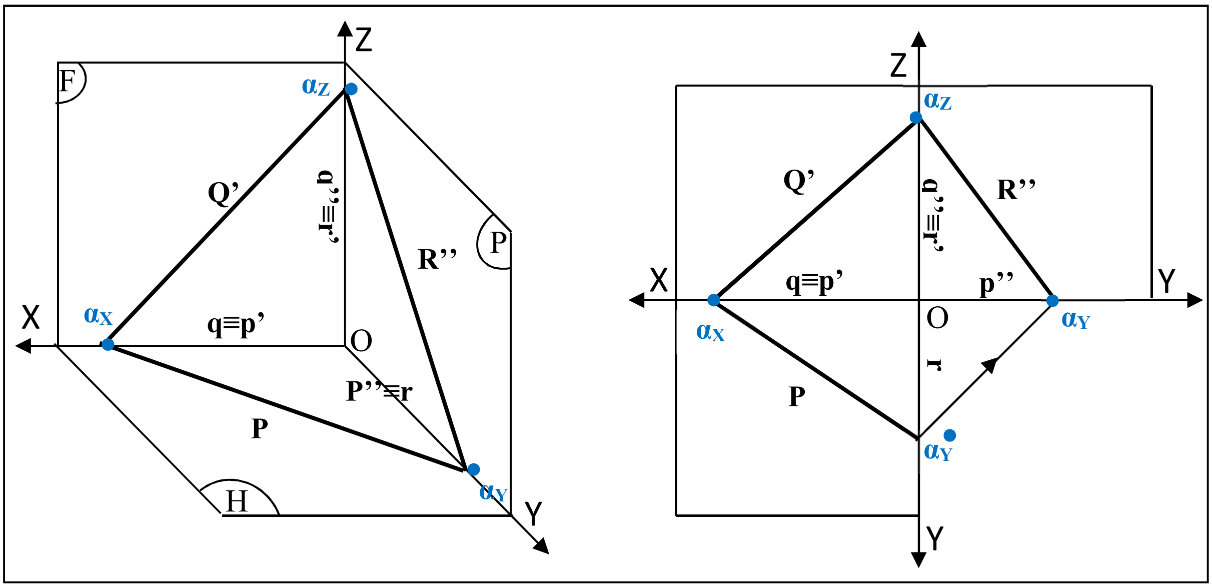
R'' : Trace de profil



P : c'est la droite d'intersection de ce plan avec le plan de projection Ⓗ.

Q' : c'est la droite d'intersection de ce plan avec le plan de projection Ⓕ.

R'' : c'est la droite d'intersection de ce plan avec le plan de projection Ⓟ.



p' : projection frontale de la trace **P** ; **p''** : projection de profil de la trace **P**

q : projection horizontale de la trace **Q'** ; **q''** : projection de profil de la trace **Q'**

r : projection horizontale de la trace **R''** ; **r'** : projection frontale de la trace **P**

III. Droites remarquables d'un plan :

III.1. Définition :

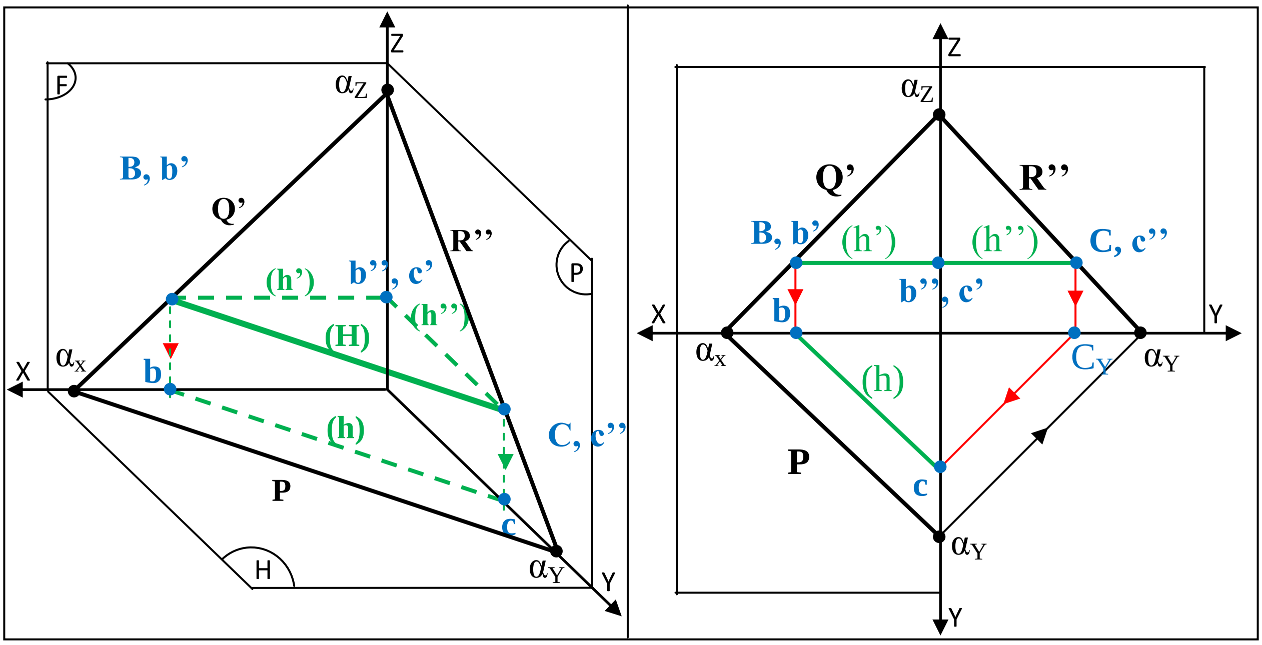
Les droites remarquables d'un plan sont les droites de ce même plan et qui sont parallèles soit au plan horizontal, soit au plan frontal ou soit au plan de profil.

Les droites remarquables d'un plan sont au nombre de trois ;

- Horizontale d'un plan
- Frontale d'un plan
- Droite de profil d'un plan

III.2 .Horizontales d'un plan :

Une horizontale d'un plan est une droite horizontale appartenant à un plan donné, et qui est parallèle au plan de projection horizontal H ; elle est donc parallèle à la trace horizontale de ce même plan.



Une horizontale d'un plan a les mêmes caractéristiques qu'une droite horizontale donc elle se projette de la façon suivante ;

- Sur le plan F perpendiculairement à l'axe (**OZ**)
- Sur le plan P perpendiculairement à l'axe (**OZ**)
- Sur le plan H en vraie parallèlement à la droite (**H**) donc parallèlement à la trace **P**

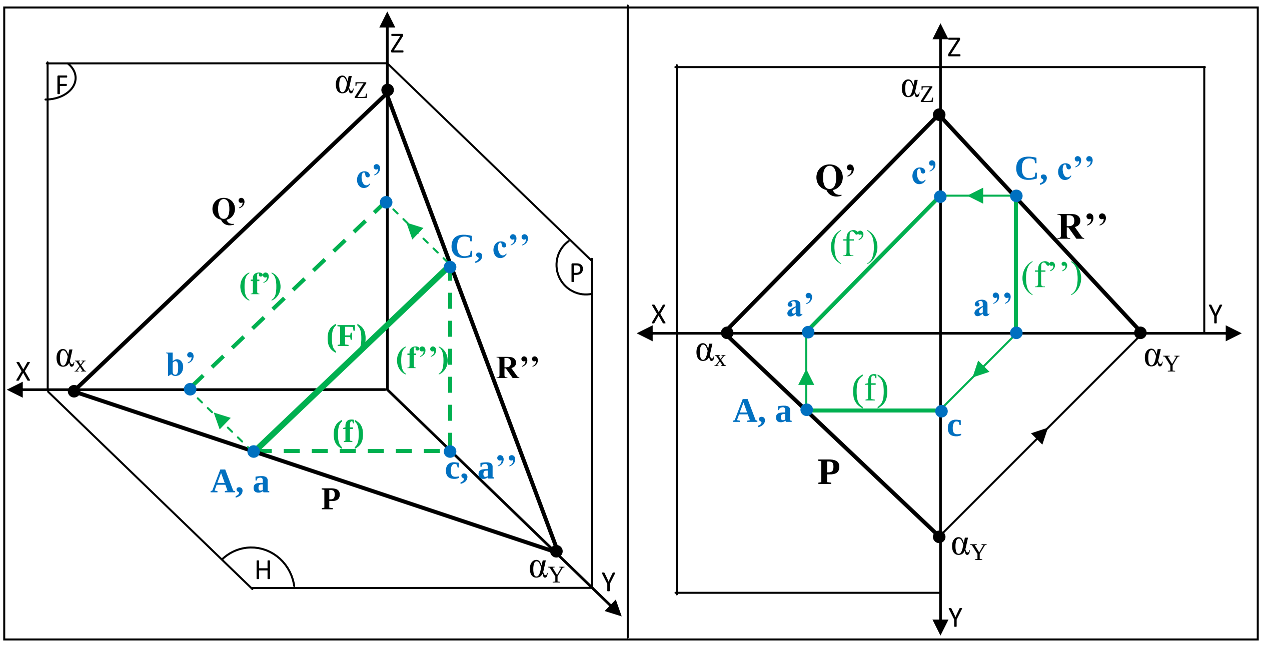
CONCLUSION

(H) // P // (h)

(h') et (h'') $\perp$ **(OZ)** sur la même cote

III.3. Frontales d'un plan :

Une frontale d'un plan est une droite frontale appartenant à un plan donné ; elle est donc parallèle au plan de projection frontal (F); et donc, elle est parallèle à la trace frontale qui elle-même appartient au plan de projection (F).



Une frontale d'un plan a les mêmes caractéristiques qu'une droite frontale donc elle se projette de la façon suivante ;

- Sur le plan (H) perpendiculairement à l'axe (**OY**)
- Sur le plan (P) perpendiculairement à l'axe (**OY**)
- Sur le plan (F) en vraie parallèlement à la droite (**F**) donc parallèlement à la trace **Q'**

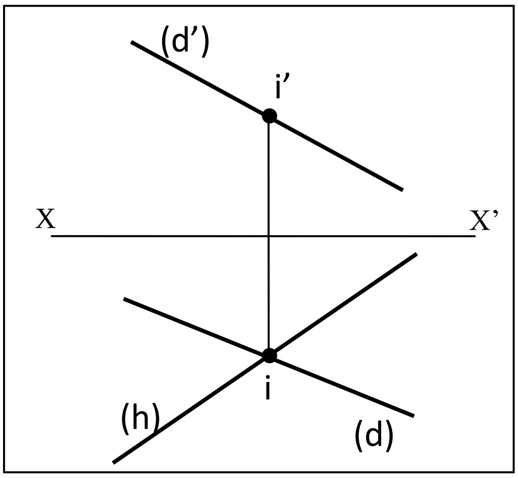
CONCLUSION

(F) // Q' // (f')

(f) et (f'') $\perp$ (OY) sur le même éloignement

III.3. Applications :

Exercice 1 : Soient deux droites (**D**) et (**H**) concourantes au point I (**i**, **i'**) et tel que (**H**) est une droite horizontale et (**D**) (**d**, **d'**) et (**H**) (**h ; ?**).



Questions :

1. Déterminer la projection frontale (**h'**).
2. Déterminer les traces **P** et **Q'**

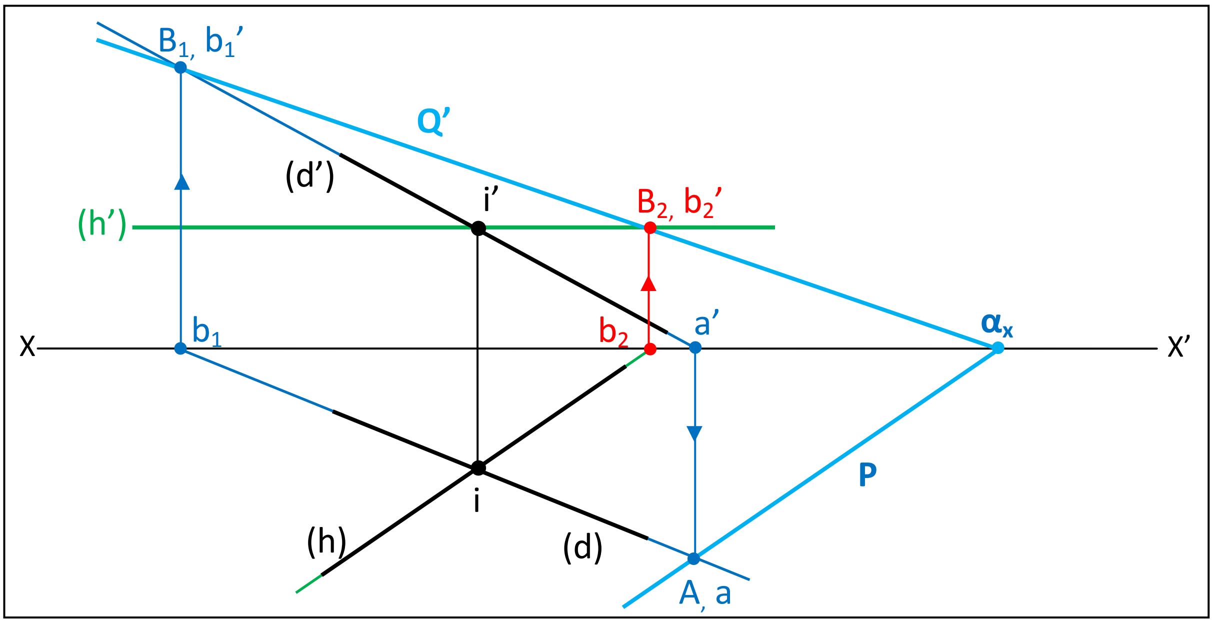
Réponse :

1. Par définition, la projection frontale d'une droite horizontale est toujours parallèle à la ligne de terre (**XX'**).

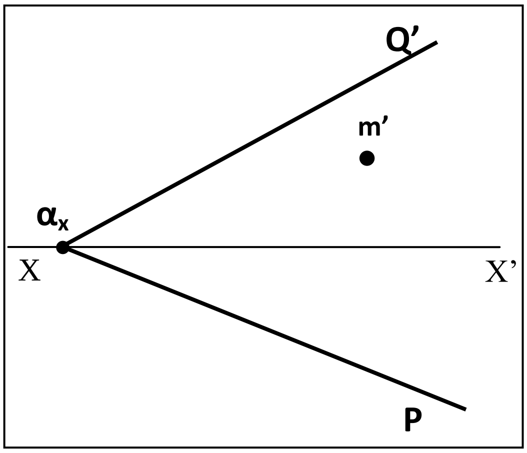
Nous menons donc **(h')** parallèle à la ligne de terre **(XX')** et passant par la projection frontale **i** du point d'intersection **I**.

2. L'intersection de **(d')** avec l'axe **(XX')** représente la projection **a'** de la trace **A** qui appartient à la fois à la projection **(d)** et la trace **P**.

- Par définition, la trace **P** est toujours parallèle à la projection horizontale d'une droite horizontale ; donc **P** est parallèle à **(h)** et passant par le point **A**.
- L'intersection de **(d)** avec l'axe **(XX')** représente la projection **b** de la trace **B** qui appartient à la fois à la projection **(d')** et la trace **Q'**.
- **Q'** passe par la trace **B** et le point α_x



Exercice 2 : Soit un plan π défini par ses traces **P** et **Q**' et un point **M** $\in \pi$ dont on connaît sa projection frontale **m'**



Question :

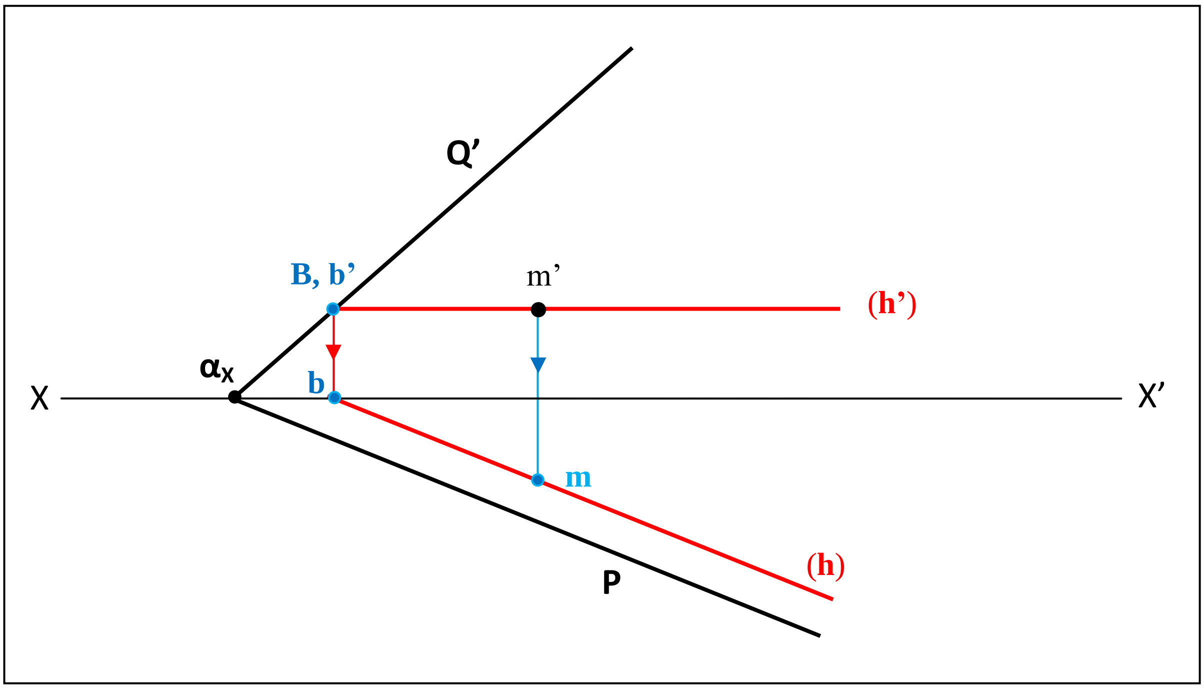
Déterminer la projection horizontale **m** en utilisant une droite remarquable du plan.

Réponse :

Pour déterminer la projection horizontale **m** nous avons deux méthodes.

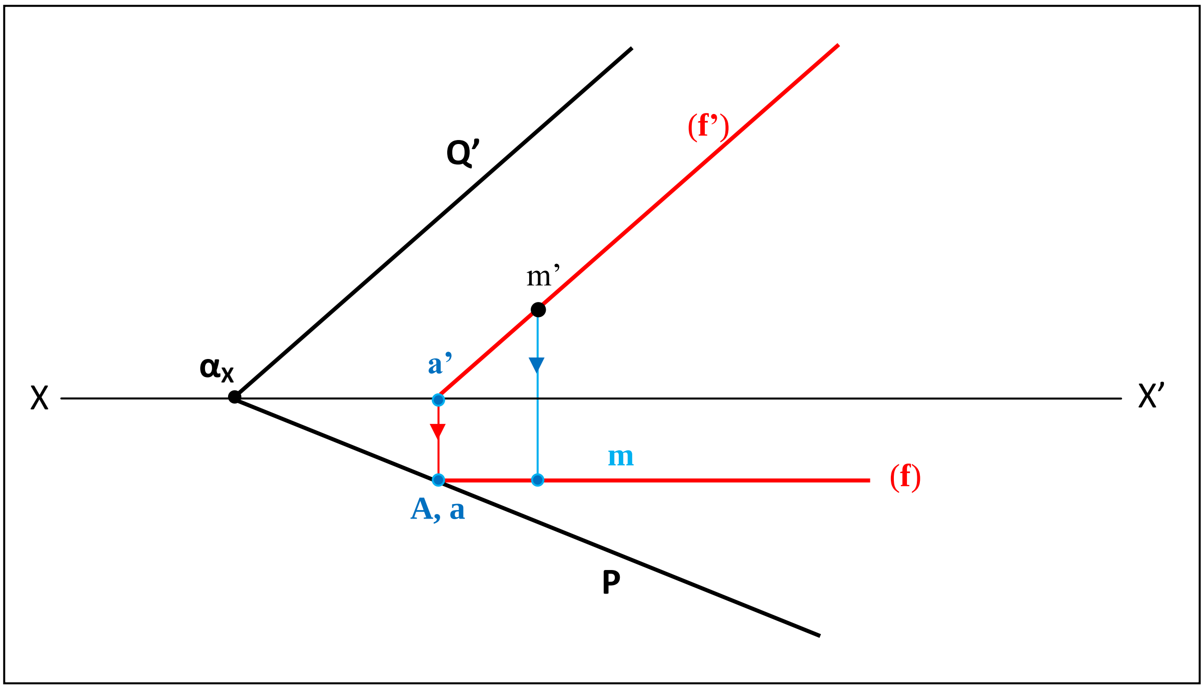
Première méthode : *En utilisant une droite horizontale du plan*

- Par définition la projection frontale **(h')** de la droite horizontale **(H)** est parallèle à l'axe **(XX')** et passe par la projection **m'** du point **M**, ce qui nous permet de trouver la trace **B** et sa projection **b'** confondues avec la trace **Q'**
- La projection **b'** nous permet de déterminer la projection **b** confondue sur l'axe **(XX')**
- Par **b** on représente la projection horizontale **(h)** parallèle à la trace **P**.
- A partir de **m'**, par la ligne de rappel nous déterminons la projection horizontale **m** confondue sur **(h)**



Deuxième méthode : *En utilisant une droite frontale du plan*

- Par définition la projection frontale **(f')** de la droite frontale **(F)** est parallèle à la trace **Q'** et passe par la projection frontale **m'** du point **M**
- La projection **a'** appartient à **(f')**, et elle nous permet de déterminer la projection **a** et donc la trace **A**.
- Par **A** et **a** on fait passer la projection frontale **(f)** parallèle à **(XX')**.
- A partir de **m'**, par la ligne de rappel nous déterminons la projection horizontale **m'**



IV. Plans remarquables :

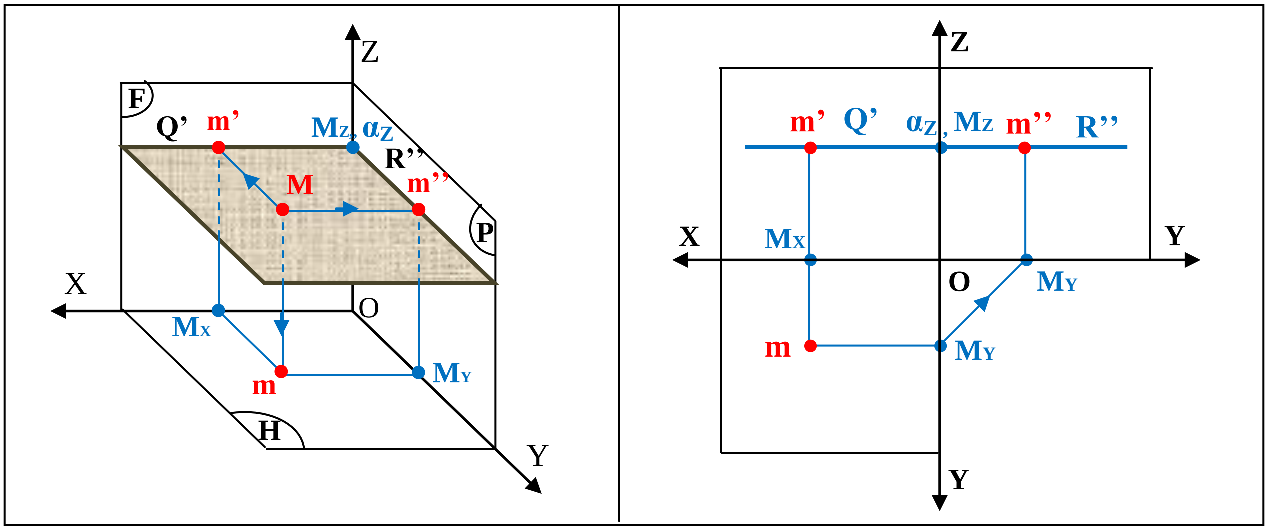
Un plan peut prendre plusieurs positions dans l'espace, il est dit remarquable s'il est perpendiculaire ou parallèle à l'un des plans de projection (H), (F) et (P), sinon on dit qu'il est quelconque.

Les plans remarquables sont nommés en fonction de sa position par rapport à l'un des plans de projection

IV.1. Plan horizontal

IV.1.1. Définition :

Un plan horizontal qu'on nomme généralement par la lettre (H) est un plan parallèle au plan horizontal (H) de projection, il est donc perpendiculaire par rapport aux deux plans de projection (F) et (P).



IV.1.2. Propriétés :

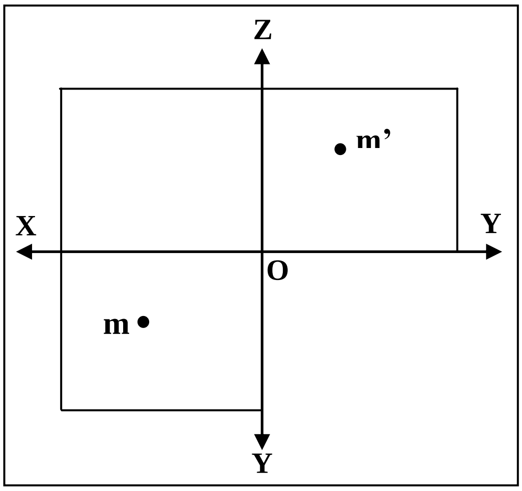
Toute figure géométrique appartenant au plan horizontal (H), se projette en vraie grandeur sur le plan (H) de projection ; par contre ses projections sur les deux plans de projection frontal et de profil sont confondues respectivement sur la trace **Q'** et la trace **R''**.

Les traces **Q'** et **R''** sont tous deux perpendiculaire à (**OZ**) sur une cote commune et unique de tout le plan (H).

- La projection **m** du point **M** sur le plan (H) est quelconque et différente de la trace **P**
- La projection **m'** du point **M** sur le plan (F) est confondue sur **Q'**
- La projection **m''** du point **M** sur le plan (P) est confondue sur **R''**

IV.1.3. Application :

Etant donné un point **M** dont on ne connait que ses projections horizontale **m** et de profil **m''**.

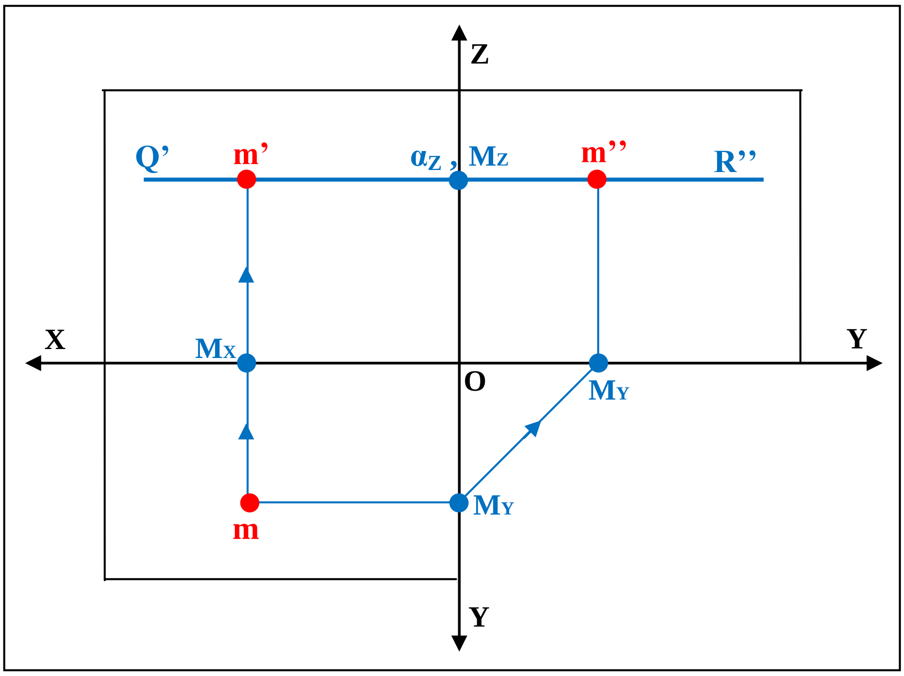


Questions :

Tracer un plan horizontal H contenant le point **M**.

Réponse :

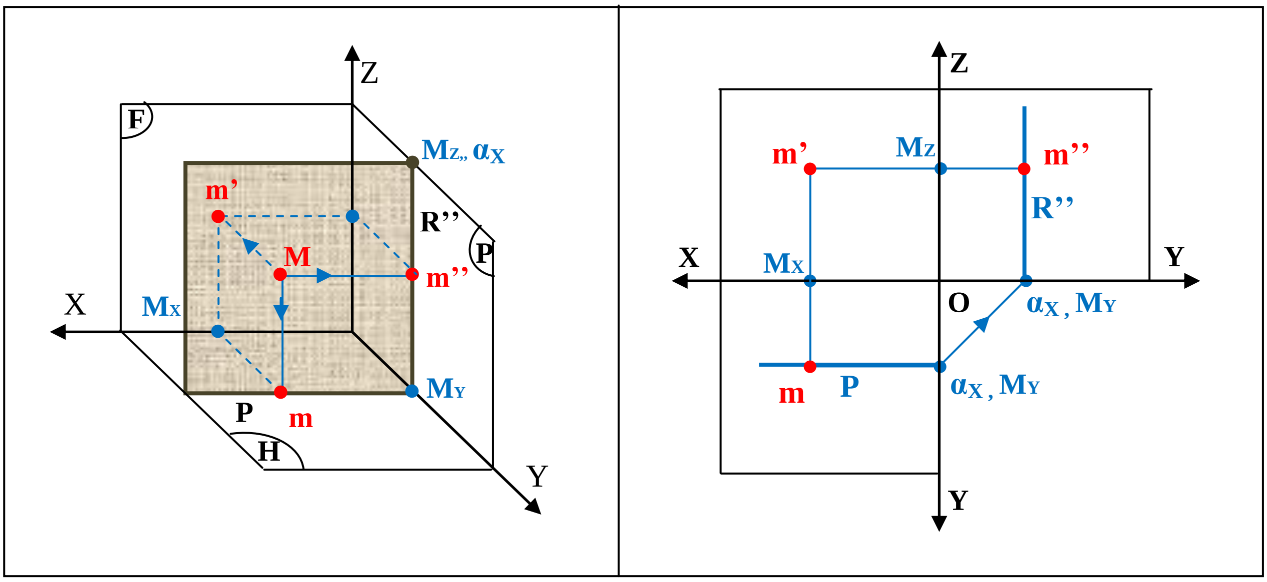
1. Nous déterminons d'abords la troisième projection **m'**, à partir des lignes de rappel de la projection horizontale **m** et la projection de profil **m''**.
2. Ensuite d'après la définition du plan horizontal, tout point lui appartenant se projette;
   - Sur le plan frontal F, **m'** confondu avec **Q'**
   - Sur le plan de profil P, **m''** confondu **R''**



IV.2. Plan frontal

IV.2.1. Définition :

Un plan frontal nommé généralement par la lettre F est un plan parallèle au plan horizontal de projection, il est donc perpendiculaire par rapport aux deux plans de projection H et P.



IV.2.2. Propriétés :

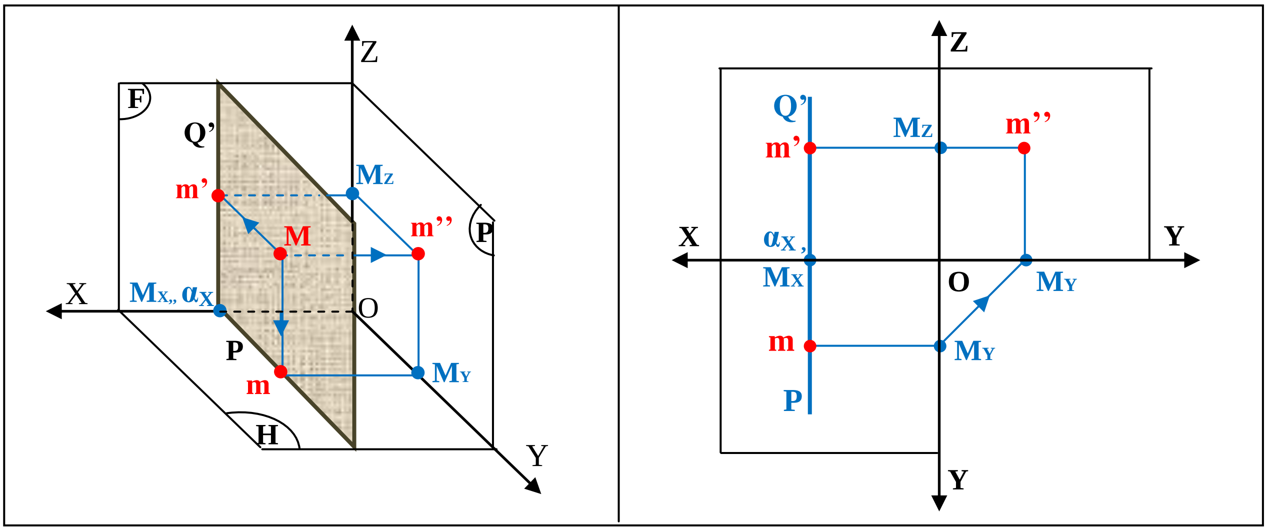
Toute figure appartenant au plan horizontal F, se projette en vraie grandeur sur le plan F de projection ; ses projections sur les deux plans de projection frontal et de profil sont confondues respectivement sur la trace **Q'** et la trace **R''** qui sont perpendiculaires sur (**OY**) sur un éloignement unique.

- La projection **m'** du point **M** sur le plan de projection F est quelconque et différent de la trace **Q'**.
- La projection **m** du point **M** sur le plan de projection H est toujours confondue avec la trace **P**
- La projection **m''** du point **M** sur P est confondue avec la trace **R''**

IV.3. Plan de profil

IV.3.1. Définition :

Un plan vertical nommé généralement par la lettre P est un plan parallèle au plan de profil P de projection, il est donc perpendiculaire par rapport aux deux plans de projection H et F.



IV.3.2. Propriétés :

Toute figure appartenant au plan horizontal F, se projette en vraie grandeur sur le plan F de projection ; ses projections sur les deux plans de projection frontal et de profil sont confondues respectivement sur la trace **Q'** et la trace **R''** qui sont perpendiculaires sur (**OY**) sur un éloignement unique.

- La projection **m'** du point **M** sur le plan F est quelconque et différent de **Q'**
- La projection **m** du point **M** sur le plan H est confondue avec **P**
- La projection **m''** du point **M** sur le plan P est confondue avec **R''**

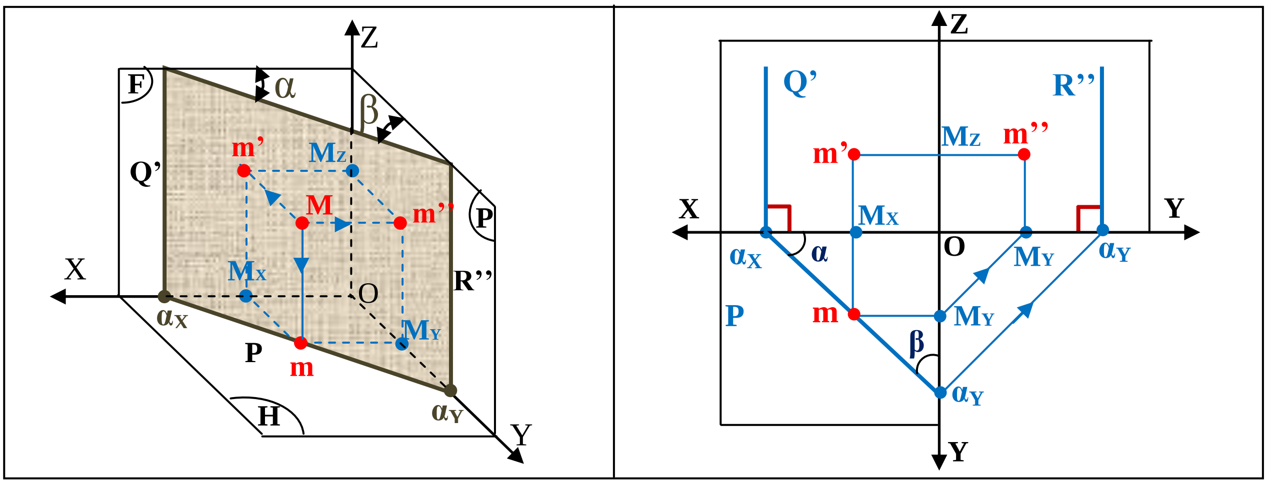
Remarque :

Pour déterminer l'épure des plans Horizontal, Frontal ou de Profil, il est nécessaire et suffisant de connaitre l'épure d'un seul point appartenant à l'un de ses plans.

IV.4. Plan vertical

IV.4.1. Définition :

Un plan vertical nommé généralement par la lettre V , est par définition perpendiculaire au plan horizontal de projection, et en même temps, il forme un angle **α** avec le plan frontal F et un angle **β** avec le plan de profil P.



IV.4.2. Propriétés :

Toute figure géométrique appartenant au plan vertical V, se projette confondue avec sa trace **P** sur le plan H de projection.

- La trace **P** forme le même angle **α** avec (**OX**) et le même angle **β** avec (**OY**) ; elle représente la projection horizontale du plan V.
- La trace **Q'** est toujours perpendiculaire à (**OX**), et parallèle à (**OZ**).
- La trace **R''** est toujours perpendiculaire à (**OY**), donc parallèle à (**OZ**).
- La projection **m** du point **M** sur le plan H est confondue avec la trace **P**
- La projection **m'** du point **M** sur le plan F est différente de la trace **Q'**
- La projection **m''** du point **M** sur le plan P est différente de la trace **R''**

Remarque :

Pour déterminer l'épure du plan Vertical, il est nécessaire de connaitre l'une des conditions suivantes :

- *L'épure d'un point appartenant à ce plan et en même temps, soit l'angle α, soit l'angle β*
- *l'épure de deux points appartenant à ce plan*

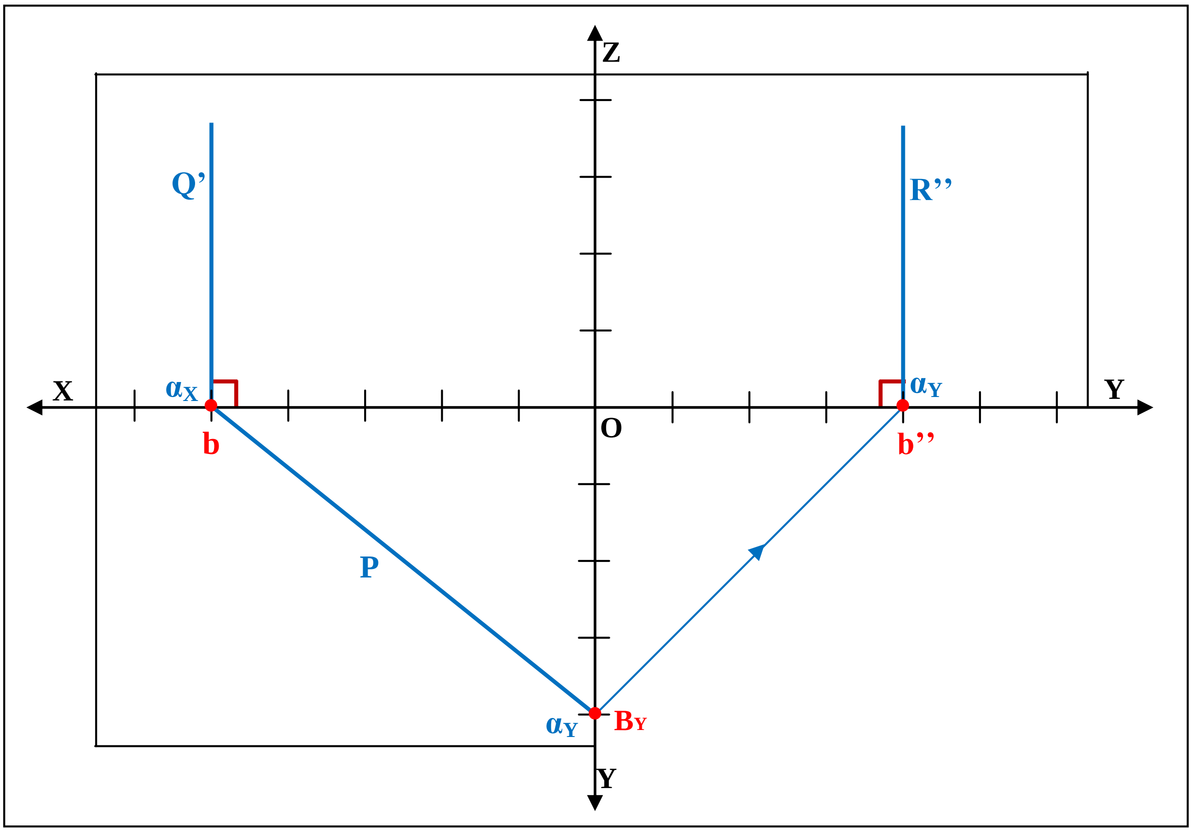
IV.4.3. Application :

Représentez les traces d'un plan vertical contenant une droite dont ses traces frontale **B** et de profil **C** ont les caractéristiques suivantes :

- $\mathbf{B_X} = +40$
- $\mathbf{C_Y} = +30$

Réponse :

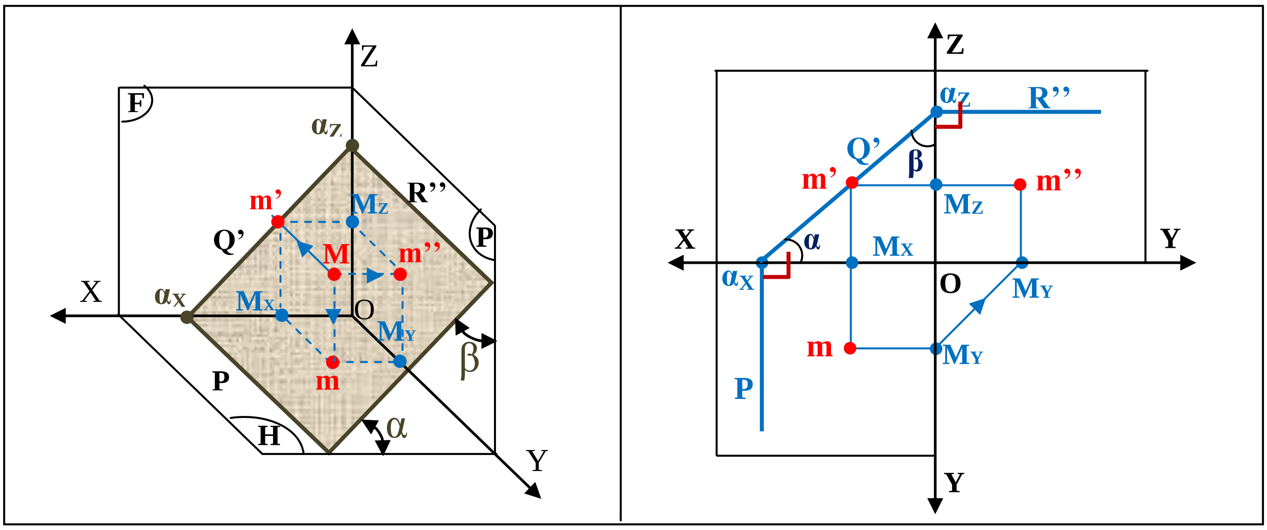
- La trace **B** ne peut pas être définie complètement, mais en connaissant $\mathbf{B_X}$ nous pouvons déterminer la projection horizontale **b** qui est confondue avec α_X.
- La trace **C** ne peut pas être aussi définie complètement, mais en connaissant $\mathbf{C_Y}$ nous pouvons déterminer la projection de profil **c''** qui est confondue avec α_Y.
- Par α_X, nous traçons la trace **Q'** perpendiculaire à (**OX**)
- Par α_Y, nous traçons la trace **R''** perpendiculaire à (**OY**)
- Nous traçons la trace P, en joignons α_X avec α_Y



IV.5. Plan de bout

IV.5.1. Définition :

Un plan de bout nommé généralement par la lettre B, est par définition perpendiculaire au plan frontal de projection, et en même temps, il forme un angle **α** avec le plan horizontal H et un angle **β** avec le plan de profil P.



IV.5.2. Propriétés :

Toute figure géométrique appartenant au plan de bout V, se projette confondue avec sa trace **P** sur le plan H de projection.

- La trace **P** forme le même angle **α** avec l'axe (**OX**) et le même angle **β** avec l'axe (**OY**) ; elle représente la projection horizontale du plan V.
- La trace **Q'** est toujours perpendiculaire à l'axe (**OX**), donc parallèle à l'axe (**OZ**).
- La trace **R''** est toujours perpendiculaire à l'axe (**OY**), donc parallèle à l'axe (**OZ**).

- La projection **m** du point **M** sur le plan H est confondue avec la trace **P**
- La projection **m'** du point **M** sur le plan F est différente de la trace **Q'**
- La projection **m''** du point **M** sur le plan P est différente de la trace **R''**

IV.5.3. Application :

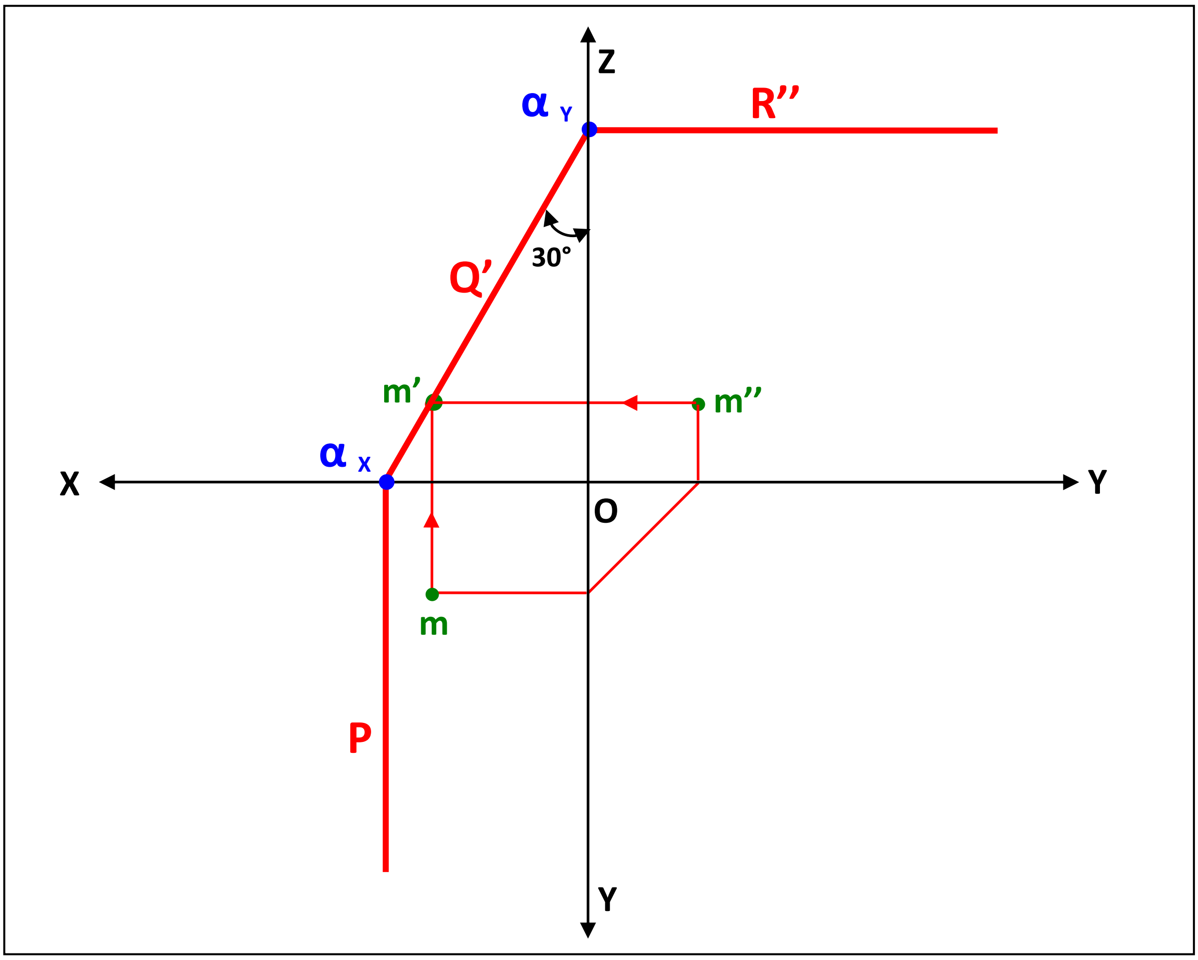
Représentez les traces d'un plan debout auquel appartient un point **M** (**m**, **?**, **m''**) donné, et formant avec le plan de profil, un angle **α** égal à **30°**

Questions :

1. Tracer la 3ème projection **m'** du point **M**
2. Tracer l'épure du plan

Réponse :

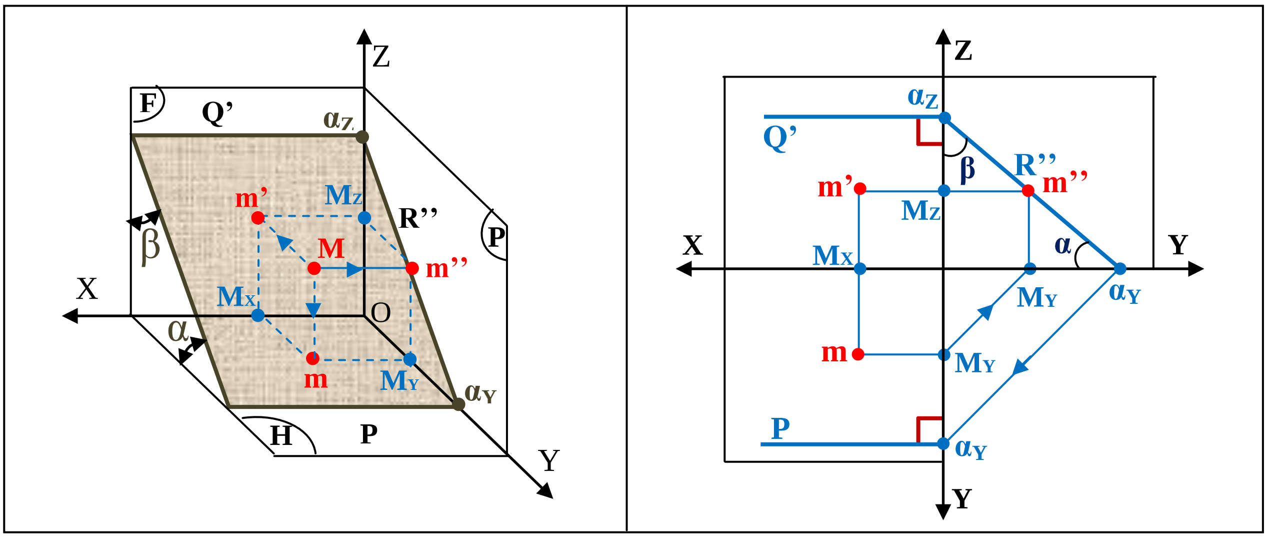
1. A partir des projections **m** et **m''**, et par les lignes de rappel nous déterminons la 3ème projection **m'**
2. A partir de **m'**, nous menons la trace **Q'** formant un angle de **30°** avec l'axe (**OZ**) ; ensuite par les points α_X et α_Z, nous traçons respectivement **P** et **R''** perpendiculaire à (**OX**) et (**OZ**)



V.6. Plan parallèle à la ligne de terre

V.6.1. Définition :

Un plan de bout nommé généralement **T**, est par définition perpendiculaire au plan de profil de projection, et en même temps, il forme un angle **α** avec le plan horizontal **H** et un angle **β** avec le plan frontal **F** .



IV.6.2. Propriétés :

Toute figure géométrique appartenant au plan vertical **V**, se projette confondue avec sa trace **P** sur le plan **H** de projection.

- La trace **P** forme le même angle **α** avec l'axe (**OX**) et le même angle **β** avec l'axe (**OY**) ; elle représente la projection horizontale du plan **V**.
- La trace **Q'** est toujours perpendiculaire à l'axe (**OX**), donc parallèle à l'axe (**OZ**).
- La trace **R''** est toujours perpendiculaire à l'axe (**OY**), donc parallèle à l'axe (**OZ**).

- La projection **m** du point **M** sur H est confondue avec la trace **P**
- La projection **m'** du point **M** sur F est différente de la trace **Q'**
- La projection **m''** du point **M** sur P est différente de la trace **R''**

IV.6.3. Application :

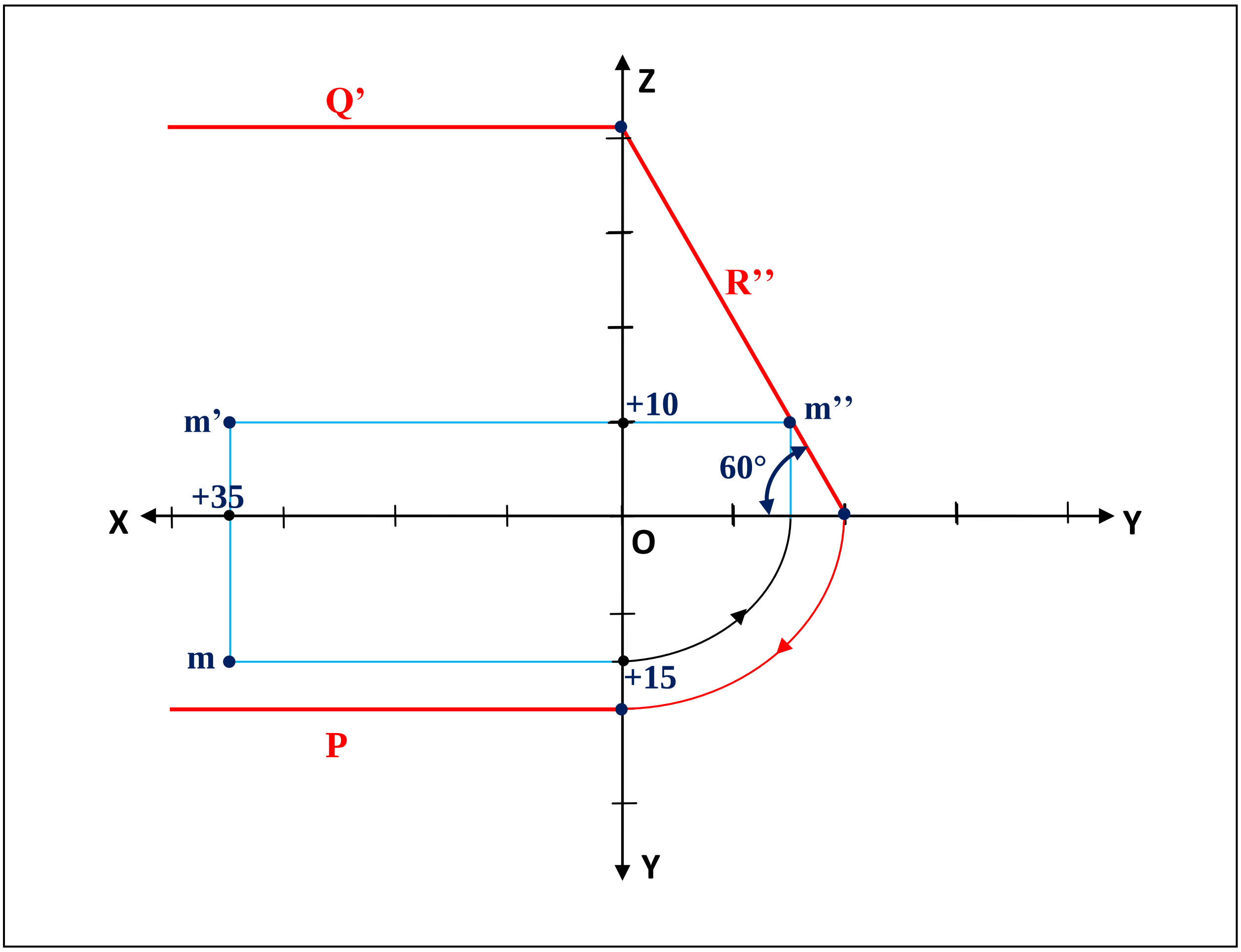
Soit un plan parallèle à la ligne de terre et formant un angle **α** de **60°** avec le plan horizontal et passant par un point **M** (**+35**, **+15**, **+10**)

Questions :

3. Tracer l'épure du point **M**
4. Tracer l'épure du plan

Réponse :

1. A partir des coordonnées du point **A**, nous traçons son épure
2. Le tracé du plan parallèle à la ligne de terre se fait de la sorte suivante :
   - Par la projection de profil **m''**, nous traçons la trace de profil **R''** formant un angle de **60°** avec l'axe des éloignements (**OY**).
   - Ensuite nous traçons la trace **P** perpendiculaire à (**OY**) par le point α_Y
   - Et enfin nous traçons la trace **Q'** perpendiculaire à (**OZ**) par le point α_Z



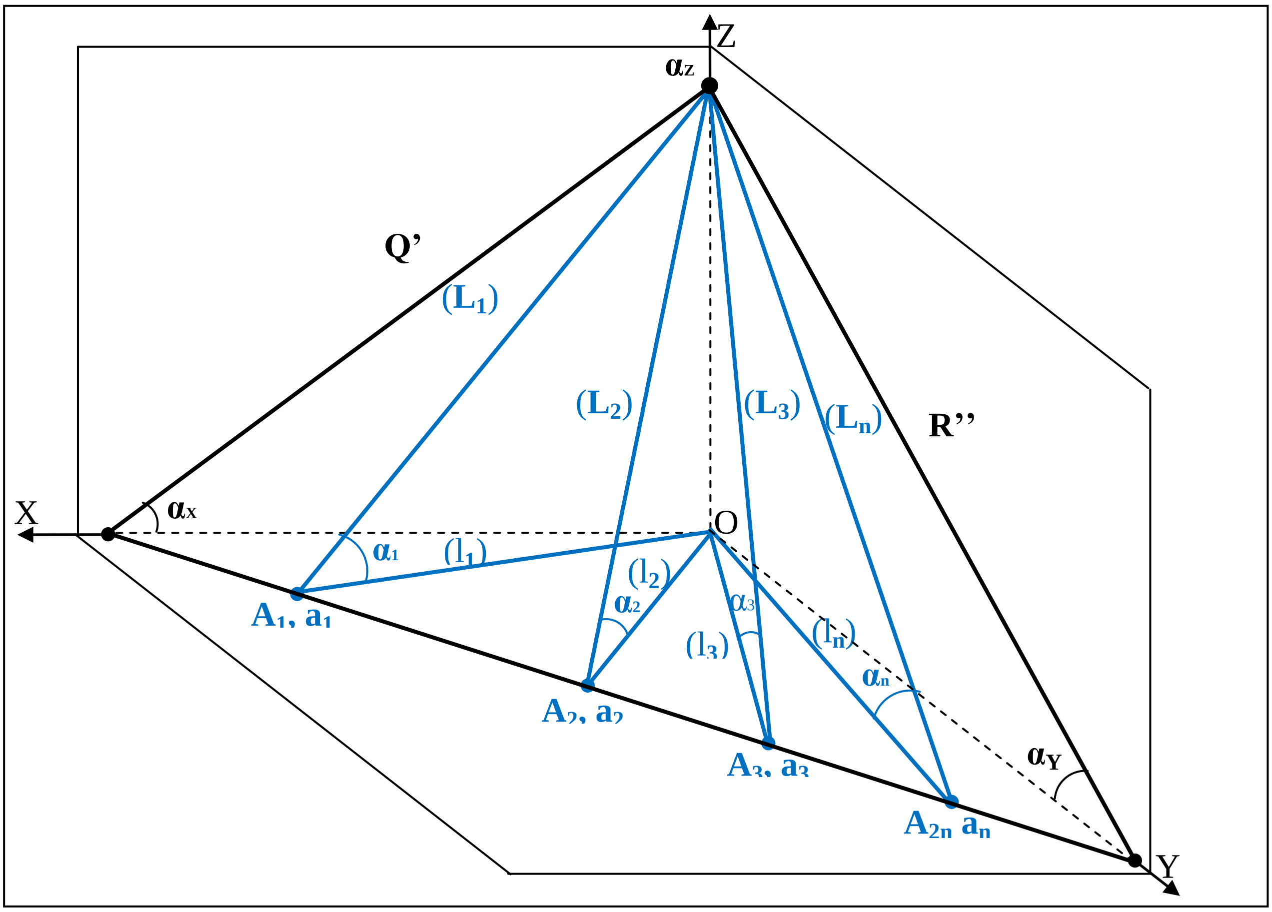
Chapitre IV

LIGNES
DE PLUS GRANDE PENTE
D'UN PLAN

I. Généralités :

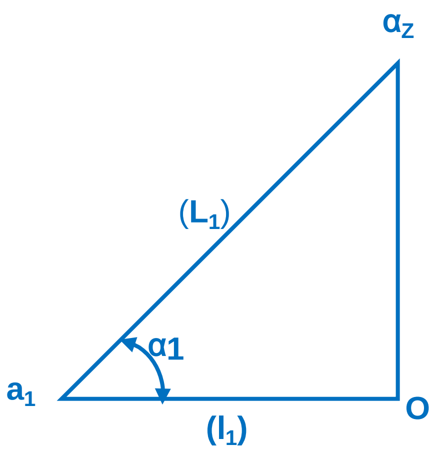
La pente d'une droite est désignée par la tangente de l'angle **α** formé entre cette droite et sa projection horizontale.

Pour déterminer la valeur de la pente d'une droite, il suffit de connaitre la valeur de l'angle **α**, qui est une droite de ce plan et sa projection horizontale.



Nous considérons (L_1), (L_2), …………., (L_n) des droites d'un plan passant par le même point α_Z ; les pentes de ces droites sont les angles entre la droite et sa projection horizontale. Nous considérons les triangles

- $tg\alpha_1 = \frac{(o\alpha_Z)}{l_1}$
- $tg\alpha_2 = \frac{(o\alpha_Z)}{l_2}$
- $tg\alpha_3 = \frac{(o\alpha_Z)}{l_3}$
- $tg\alpha_n = \frac{(o\alpha_Z)}{l_n}$
- $tg\alpha_X = \frac{(o\alpha_Z)}{Q'}$
- $tg\alpha_Y = \frac{(o\alpha_Z)}{R''}$

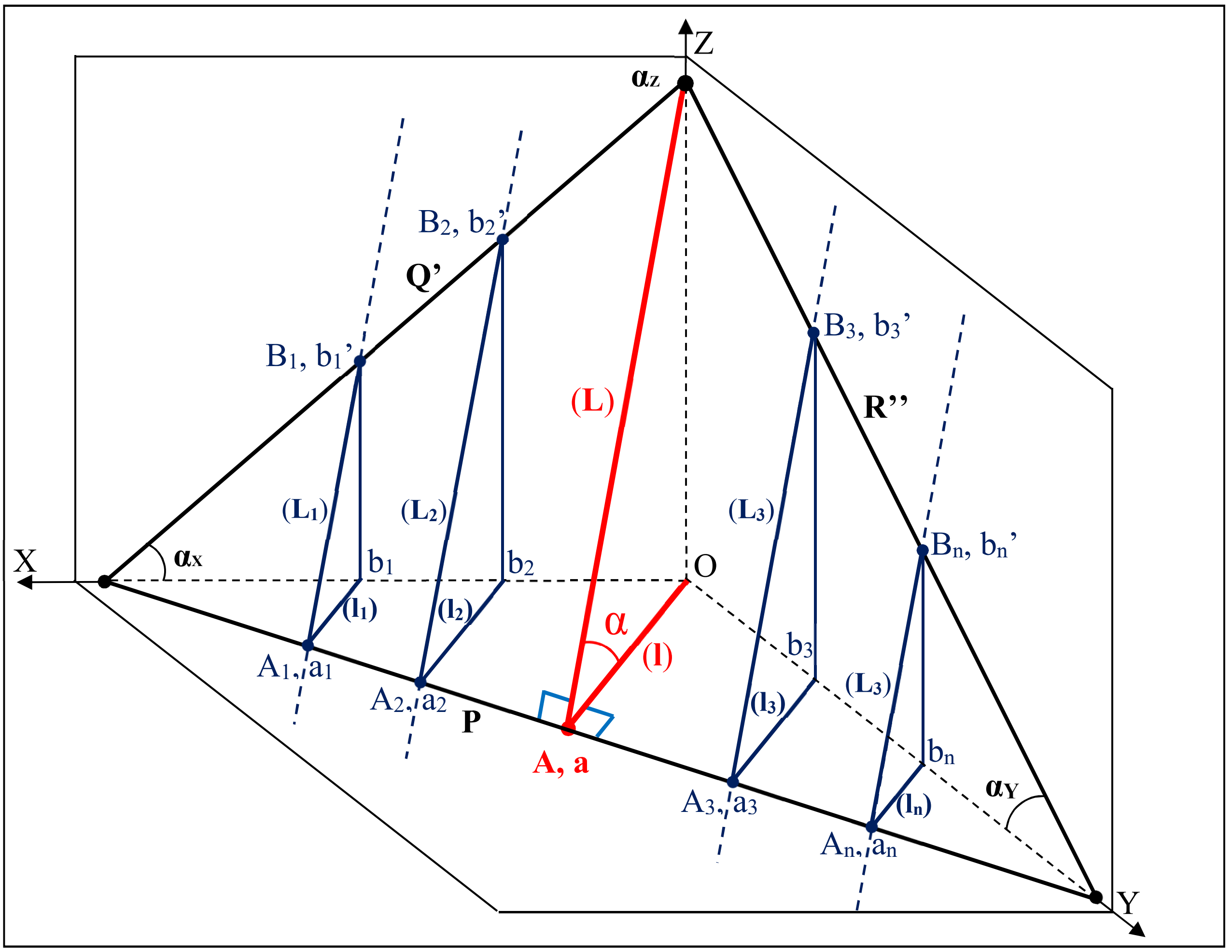


Dans les équations antérieures l'angle opposé est le même ; donc pour avoir le plus petit angle α, il faut que l'angle adjacent soit le plus possible.

Pour que l'angle adjacent (l) qui représente la projection horizontale de la droite (L) soit le plus petit possible, il faut qu'elle soit perpendiculaire à la trace P.

II. Définition :

Les lignes de plus grande pente d'un plan quelconque sont toutes les droites qui forment le plus grand angle possible avec le plan horizontal.



<u>Remarque</u> :

La ligne de plus grande pente d'un plan est celle dont la projection horizontale est le plus petit possible, donc celle qui est perpendiculaire à la trace horizontale **P** de ce même plan.

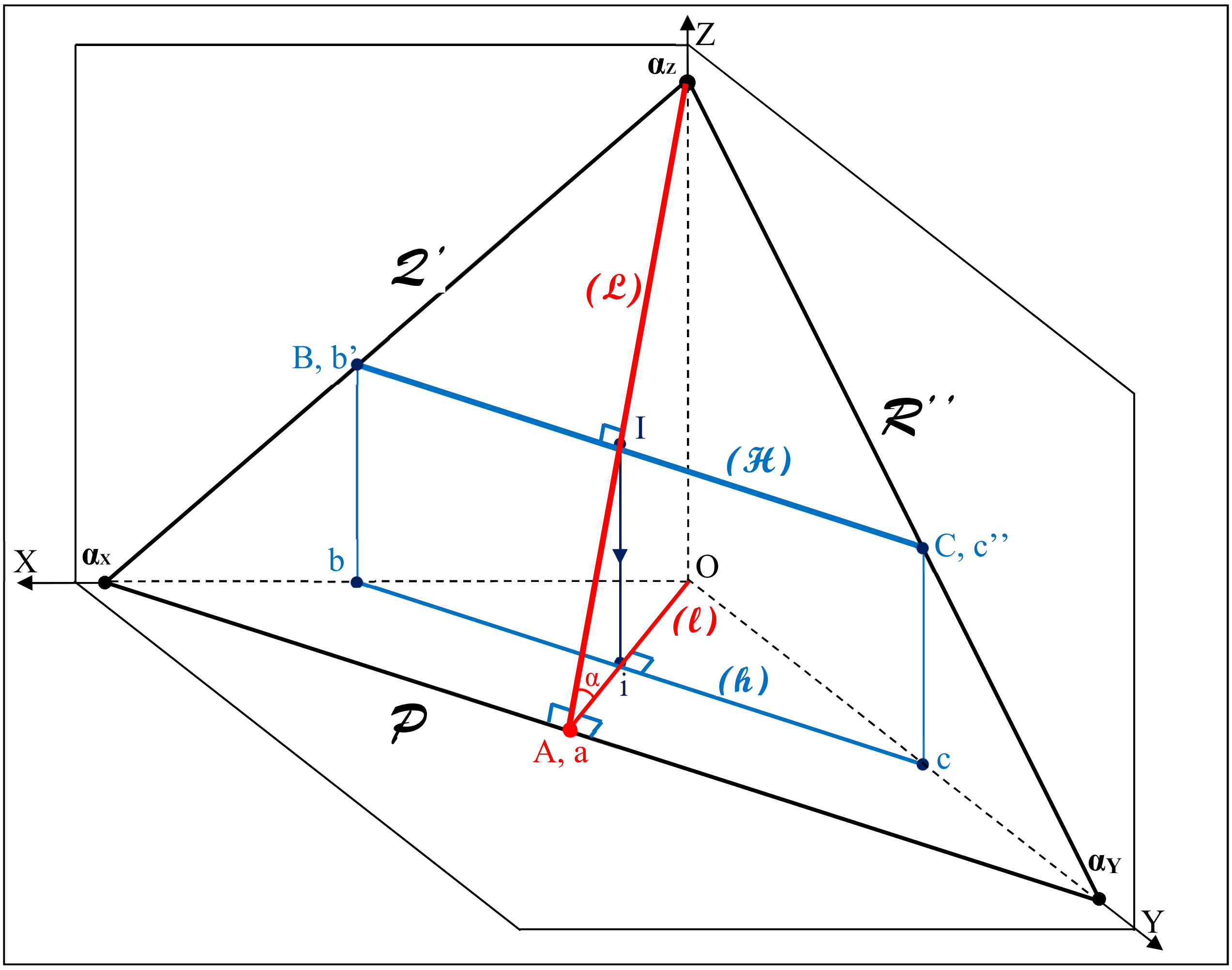
Toutes les droites d'un plan et qui sont parallèles à la ligne de plus grande pente d'un plan (**L**) sont également des lignes de plus grande pente de ce même plan.

CONCLUSION

$P \perp (L)$ et $P \perp (l)$; $P \perp (L_1)$ et $P \perp (l_1)$;……… ; $P \perp (L_n)$ et $P \perp (l_n)$

III. Propriétés :

Les lignes de plus grande pente d'un plan sont toujours perpendiculaires aux horizontales de ce plan d'une façon générale et à la trace **P** en particulier.



La trace $\mathcal{P}$ est elle-même une horizontale du plan, donc elle est parallèle à toutes les horizontales de ce même plan ; En conséquence elle est aussi parallèle en même temps aux projections horizontales de toutes les horizontales.

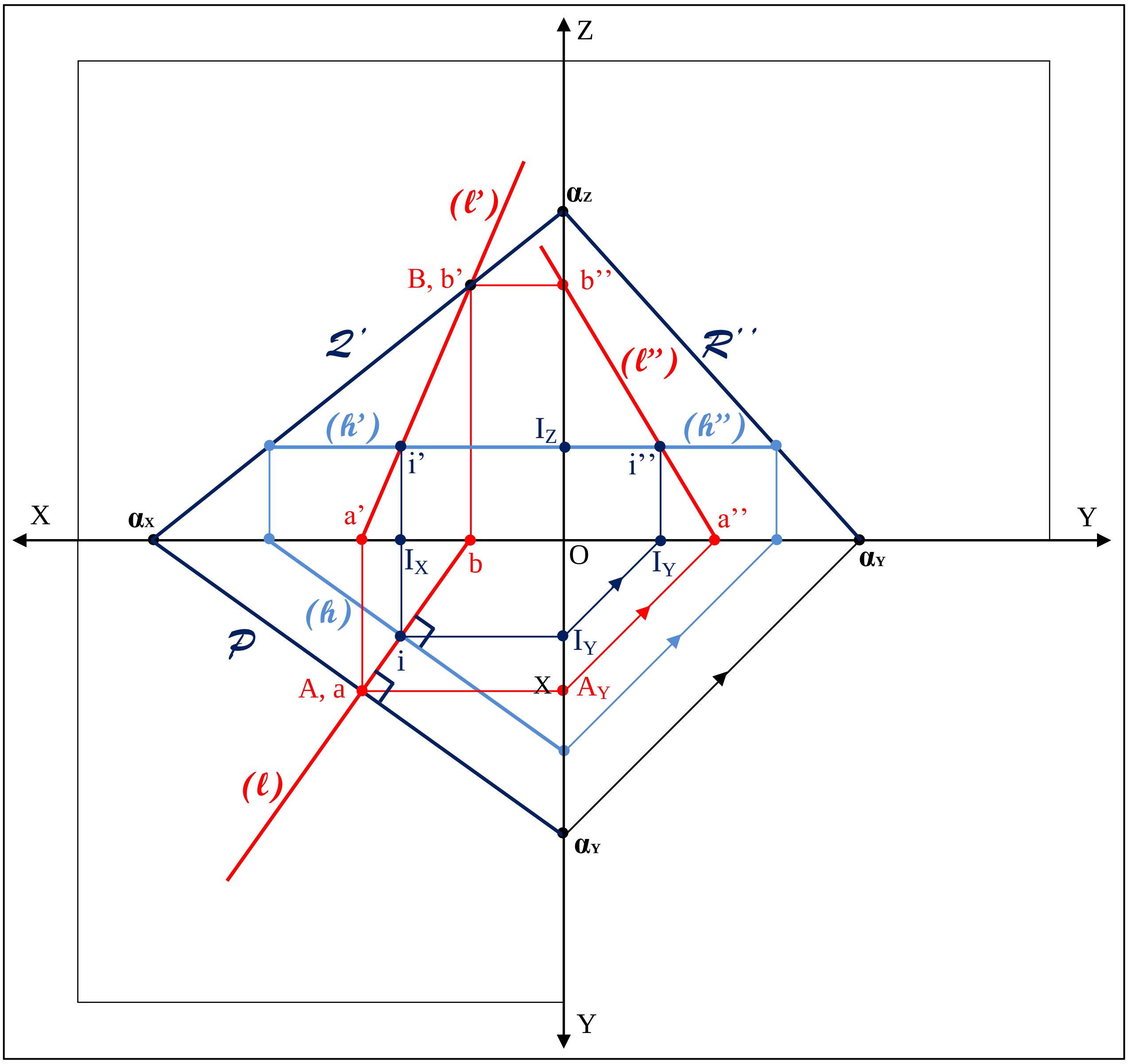
CONCLUSION :

$$\mathcal{P} \perp (\mathcal{L}) \text{ et } \mathcal{P} \perp (\ell)$$

$$\mathcal{P} \,//\, (\mathcal{H}), \text{ donc } (\mathcal{H}) \perp (\mathcal{L}) \text{ et } (h) \perp (\ell)$$

IV. Représentation en épure :

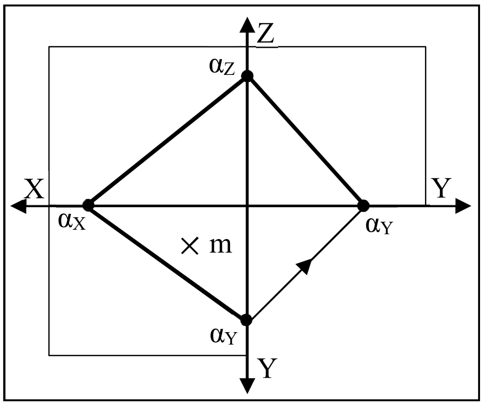
Nous représentons comme application l'épure d'une ligne de plus grande pente (ℒ) quelconque qui ne passe pas par le point α_Z.



Le tracé de l'épure d'une ligne de plus grande pente d'un plan doit suivre les démarches suivantes :

- Connaître l'épure d'un point lui appartenant ;
- Par la projection horizontale de ce point, nous traçons *(ℓ)*, la projection horizontale de la ligne de plus grande pente du plan perpendiculaire soit,
  - A la trace horizontale *P* du plan
  - A la projection horizontale *Q'* du plan
- Ensuite tracer les deux autres projections *(ℓ')* et *(ℓ'')*

V. Applications :

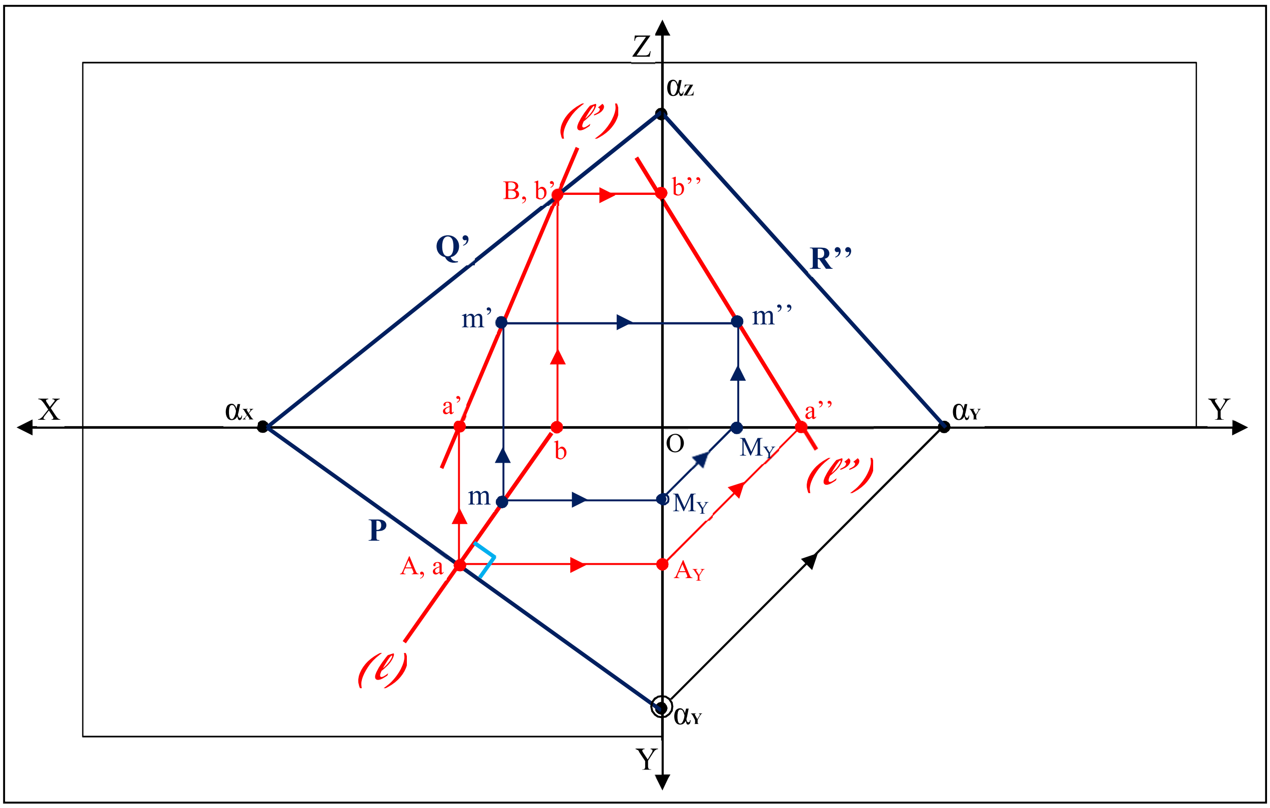


Exercice 1 :

Tracer l'épure de la ligne de plus grande pente d'un plan **π** défini par ses traces (**P**, **Q'**, **R''**) et passant par un point **M** dont on ne connait que sa projection Horizontale **m**.

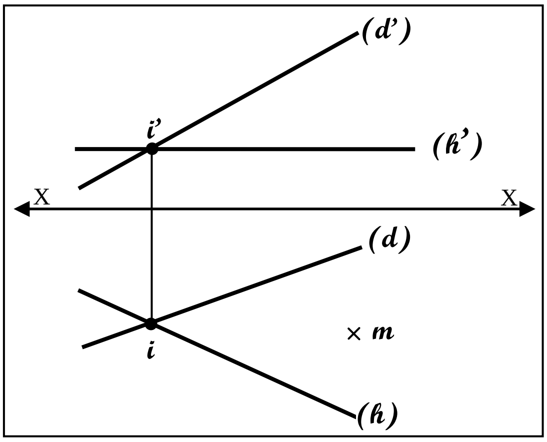
Réponse :

- A partir de la projection horizontale **m**, nous traçons la projection horizontale *(ℓ)* de la ligne de plus grande pente de ce plan *(ℒ)* en appliquant la caractéristique de la perpendiculaire avec la trace horizontale **P** sur la trace **A**.
- Par la trace **A** qui concorde avec sa projection **a** nous déterminons les projections **a'** et **a''**.
- L'intersection de *(ℓ)* avec l'axe (**OX**) représente la projection horizontale **b** de la trace **B**.
- La projection b nous permet de déterminer la trace **B** qui concorde avec sa projection frontale **b'** et sa projection de profil **b''**.
- La projection frontale *(ℓ')* est représentée par la droite (**a'b'**).
- La projection frontale *(ℓ'')* est représentée par la droite (**a''b''**).
- Par les lignes de rappel à partir de la projection **m** du point **M**, nous déterminons la projection frontale **m'** et la projection de profil **m''**.



Exercice 2 :

Soit le plan π défini par deux droites $(\mathcal{H})(h, h')$ et $(\mathcal{D})(d, d')$ concourantes au point $\mathrm{I}(i, i')$; tel que $(\mathcal{H})$ est une horizontale du plan et $(\mathcal{D})$ est quelconque.

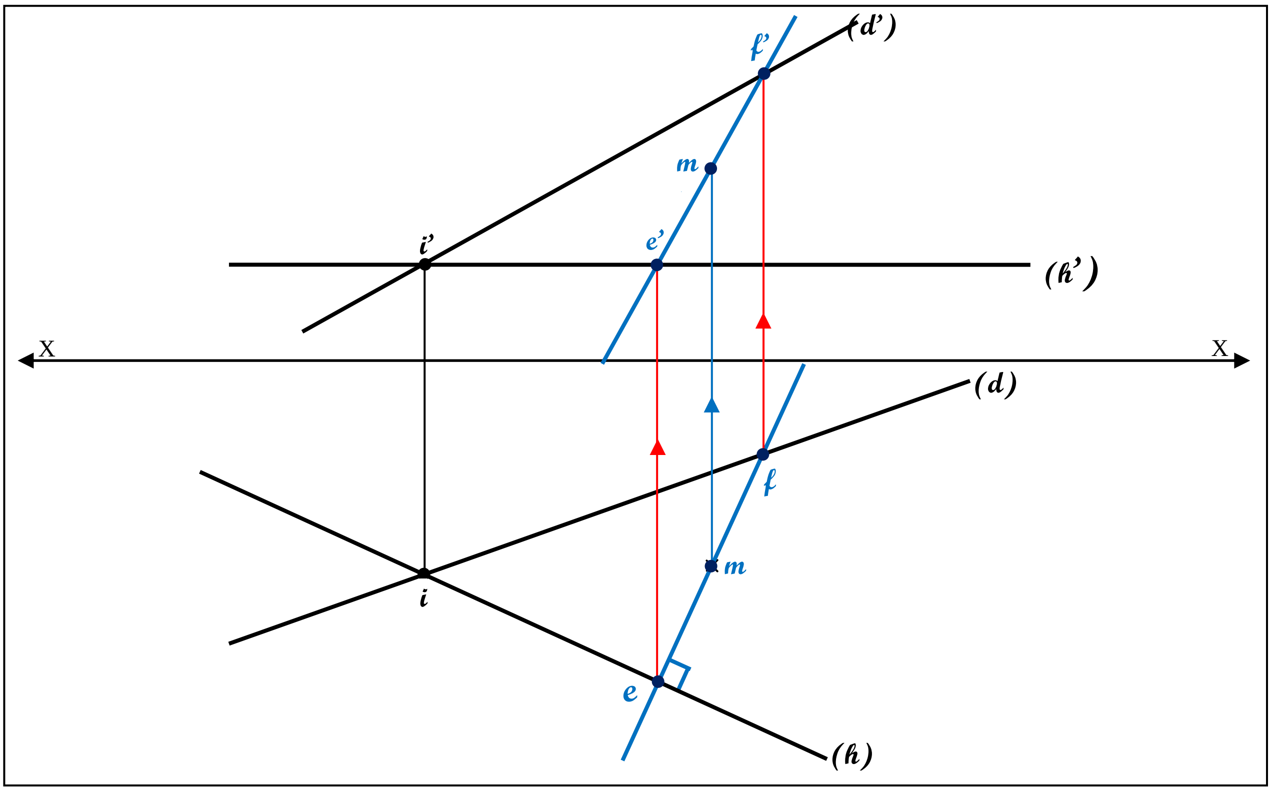


Questions :

Par un point $\mathcal{M}$ appartenant à ce même plan et dont on ne connait que sa projection horizontale m, tracer l'épure de la ligne de plus grande pente $(\mathcal{L})$.

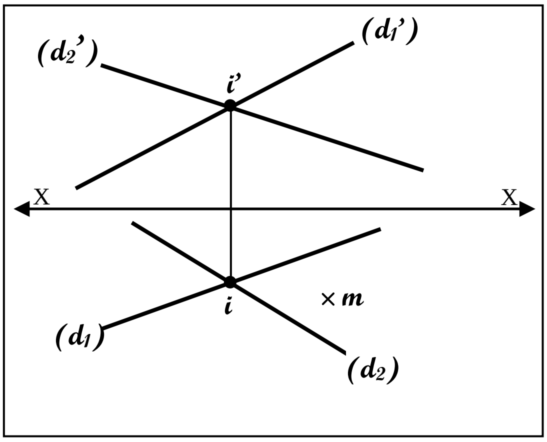
Réponse :

- A partir de la projection horizontale m, nous traçons la projection horizontale (ℓ) de la ligne de plus grande pente de ce plan $(\mathcal{L})$ en appliquant la caractéristique de la perpendiculaire avec la projection horizontale (h).
- L'intersection de (ℓ) avec (h) nous donne e qui représente la projection horizontale du point **E**.
- L'intersection de (ℓ) avec (d) nous donne f qui représente la projection horizontale du point **F**.
- Par les lignes de rappel à partir de e et f, nous déterminons les points e' et f'.
- La projection frontale (ℓ') est représentée par la droite $(e'\ f')$.
- Par les lignes de rappel à partir de m, nous déterminons la projection frontale m' sur (ℓ').



Exercice 3 :

Soit le plan π défini par deux droites concourantes ($\mathcal{D}_1$)(d_1, d_1') et ($\mathcal{D}_2$)(d_2, d_2') au point I(i, i').

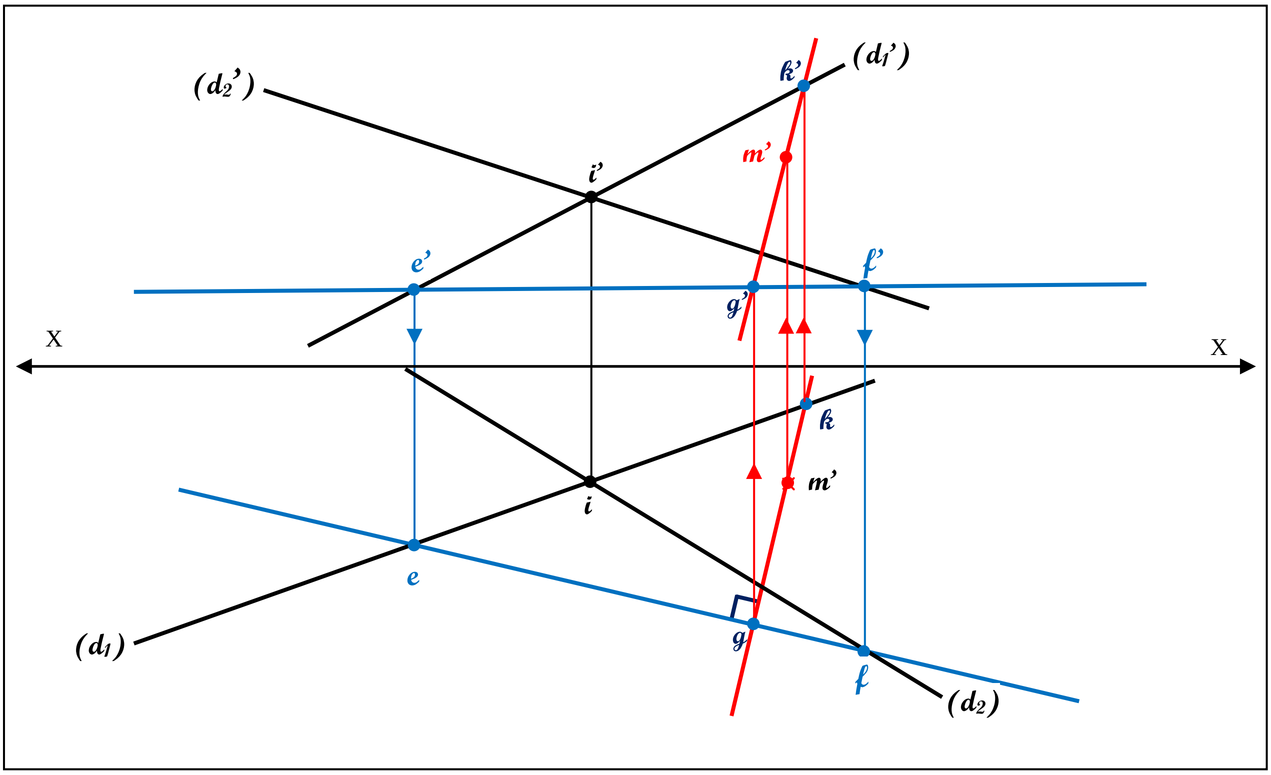


Questions :

Par un point $\mathcal{M}$ appartenant à ce même plan et dont on ne connait que sa projection horizontale m, tracer l'épure de la ligne de plus grande pente $(\mathcal{L})$.

Réponse :

- Sur le plan frontal, nous traçons (h) la projection d'une horizontale qui coupe les deux projections (d_1') et (d_2') sur les points e' et f'.
- A partir de e' et f', en utilisant les lignes de rappel nous déterminons les points e et f, ce qui nous permet de tracer la projection horizontale (h).
- A partir de m, nous traçons la projection horizontale (ℓ) de la ligne de plus grande pente de ce plan $(\mathcal{L})$ en appliquant la caractéristique de la perpendiculaire avec la projection horizontale (h).
- L'intersection de (ℓ) avec (h) nous donne g et avec (d_1), elle nous donne k.
- A partir de g et k, en utilisant les lignes de rappel nous déterminons les points g' et k', ce qui nous permet de tracer la projection frontale (ℓ').
- Par les lignes de rappel à partir de m, nous déterminons la projection frontale m' sur (ℓ')



BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

1. VOILQUIN M. : Géométrie Descriptive – Tome 1.
Collection M. Durrande ; Edition CLASSIQUES 1V - 1982

2. VOILQUIN M. : Géométrie Descriptive – Tome 2.
Collection M. Durrande ; Edition CLASSIQUES 1V - 1982

3. FELIAHI D. et BENSAADA S : Le Dessin Technique – première partie -
La Géométrie Descriptive – Cours exercices et corrigés Collection Le cours de mathématique ; Edition O.P.U. 1995

4. DELACHET A. et MOREAU J. : La Géométrie Descriptive et ses Applications.
Collection Que sais je ? ; Edition Presses Universitaires De France. 1963

5. TATON R. et LOCON A. : La Perspective.
Collection Que sais je ? ; Edition Presses Universitaires De France. 1984

6. RIBOUH B. et TEBIB E. : La Double Projection à l'Usage du Dessin d'Architecture.
Cours de Géométrie Descriptive suivi du tracé des Ombres.
Edition Bahaeddine. 2009

7. LEHMANN H-L. : Géométrie Descriptive.
Collection De l'Ingénieur. Spes Lausanne.

8. LENORMAND G. et TINEL J. : Mémento de Dessin Industriel. Tome 3
Problèmes Graphiques. Edition Foucher. 1974

9. HOANG A-T. : Cours de Géométrie Descriptive. Tome 1
Polycopié de l'Institut d'Architecture de Biskra ; Biskra 1987

10. HOANG A-T. : Cours de Géométrie Descriptive. Tome 2
Polycopié de l'Institut d'Architecture de Biskra ; Biskra 1987

2015

Docteur HADJOUI Féthi

Géométrie de l'espace