Chapitre 3: Calcul de probabilités

I. Introduction Depuis toujours, l'homme est fasciné par les phénomènes liés au hasard. En mathématiques, **la théorie des probabilités** tente d'expliquer ces phénomènes. Les probabilités nous donnent les clés pour mieux comprendre le monde qui nous entoure. Historiquement, la notion de probabilité s'est dégagée à partir d'exemples simples empruntés généralement aux jeux de hasard.

II. Notion de base

*Expérience aléatoire et

On peut classer les expériences en deux grands groupes ; celles dont l'issue est prévu avec certitude dépendant de lois physiques établies et celles dont l'issue dépend du hasard, pour lesquelles on ne peut pas faire de prévisions rigoureuses, ce sont les expériences aléatoires.

Définition: Une expérience aléatoire ou épreuve est une expérience dont toutes les issues possibles, tous les résultats possibles sont connus à l'avance, sans que l'on puisse prédire quel en sera finalement le résultat.

Exemple: Quand on lance une pièce de monnaie, on connaît à l'avance les 2 issues possibles de l'expérience: Pile ou Face. Idem quand Quand on lance un dé à 6 faces, numérotées de 1 à 6, on connaît à l'avance les 6 résultats possibles de l'expérience: 1, 2, 3, 4, 5 ou 6, Mais il nous est impossible de savoir, à l'avance, quel sera le résultat du lancer.

*Notion d'évènements et d'Univers

Une expérience aléatoire peut présenter un certain nombre de résultats fini ou infini. Chacun de ces résultats est un événement élémentaire ω_i . L'ensemble de ces événements élémentaires constitue l'univers de cette expérience.

Définition: L'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire est ce que l'on appelle l'univers de l'expérience ou encore l'ensemble fondamental. Il sera en général symbolisé par la lettre grecque majuscule Ω .

Exemple: 1) Dans notre exemple de lancer d'une pièce de monnaie: $\Omega=\{Pile, Face\}$.

2) Dans notre exemple de lancer d'une pièce de monnaie: $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$

3) Si on lance une pièce de monnaie jusqu'à obtenir "pile" et si l'évènement retenu est le nombre de jet, alors:

$\Omega=\{1,2,...\}$, ensemble infini dénombrable.

Définition: Un événement non élémentaire est un ensemble de plusieurs résultats (une partie de Ω).

Exemple: Si on répète l'expérience aléatoire de jet de dé 03 fois alors les ensembles A = {2, 4, 6} et B = {1, 3, 5} sont des événements non élémentaires.

Remarques: l'événement A={2, 4, 6} peut se traduire par l'expression: A: "Obtenir un nombre pair ". Idem pour l'événement B={1,3,5}. B serait l'événement "obtenir un nombre impair". Inversement l' événement C:"obtenir un multiple de 3" s'écrit sous forme ensembliste C={3,6}.

*Logique des évènements

Evènement certain: contient tous les résultats de l'expérience ; il n'est d'autre que Ω.
Exemple: l'évènement "avoir un nombre ente 1 et 6" pour l'expérience du jet d'un dé.

Evènement impossible: n'est jamais réalisé ; c'est l'ensemble vide ∅.
Exemple: l'évènement "avoir un 7" pour l'expérience du jet d'un dé.

Union d'événements: A est réalisé ou B est réalisé, C'est $A \cup B$.
Exemple: Dans l'expérience du jet d'un dé. l'évènement D: "avoir un un nombre pair ou un multiple de 3" est réalisé lorsque l'évènement A: "Obtenir un nombre pair " est réalisé ou lorsque l'évènement C:"obtenir un multiple de 3" est réalisé. On l'exprime par $D = A \cup C=\{2,3,4,6\}$.

Intersection d'événements: A est réalisé et B est réalisé. C'est $A \cap B$.
Exemple: Dans l'expérience du jet d'un dé. l'évènement E: "avoir un un nombre pair multiple de 3" est réalisé lorsque l'évènement A: "Obtenir un nombre pair " est réalisé et l'évènement C:"obtenir un multiple de 3" est réalisé. On l'exprime par $E = A \cup C=\{6\}$.

Evénements incompatibles: Deux évènements A et B sont dits incompatibles (s'excluent mutuellement) s'ils ne peuvent pas être réalisés en même temps i.e. $A \cap B = \varnothing$.
Exemple: Dans l'expérience du jet d'un dé. Si l'évènement D: "avoir un 6 " est réalisé alors l'évènement B:"obtenir un nombre impair" ne peut être réalis et vis versa. On voit bien que $A \cap B = \varnothing$.

Evénement Complémentaire: Le complémentaire d'un évènement A noté $\overline{A}$ est réalisé lorsque A n'est pas réalisé. On dit que A et $\overline{A}$ sont incompatibles. Dans ce cas, on a $A \cap \overline{A} = \varnothing$ et $A \cup \overline{A} = \Omega$
Exemple: Dans l'expérience du jet d'un dé. Si l'évènement A: "Obtenir un nombre pair " est réalisé il est hors de question que l'évènement B:"obtenir un nombre impair" soit réalisé. On voit bien que $A \cap B = \varnothing$ et $A \cup B = \Omega$ i.e. $B = \overline{A}$.

***Algèbre et Tribu d'évènements**

Un événement en tant que sous-ensemble de Ω est un élément de $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω . $\mathcal{P}(\Omega)$ est une *algèbre d'événements* que l'on peut associer à Ω pour constituer le couple $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ dit *espace probabilisable*. En réalité, un sous-ensemble $\mathcal{C}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ ne peut être considéré comme une algèbre d'événements que s'il vérifie les trois points suivants :

C1- Pour tout A dans $\mathcal{C}$, $\overline{A} \in \mathcal{C}$.

C2- Pour tout A, B dans $\mathcal{C}$, $A \cup B \in \mathcal{C}$.

La condition C2 est équivalente à la condition C´2 ;

C´2- Pour tout A, B dans A, $A \cap B \in \mathcal{C}$.

Exemples:

1) L'algèbre la plus élémentaire est $\{\Omega, \varnothing\}$.

2) Soit $\Omega = \{a, b, c, d\}$, à partir de la partition $\{a, b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$ on construit l' algèbre $\mathcal{C}$ tel que:

$$\mathcal{C} = \{\varnothing, \{a, b\}, \{c\}, \{d\}, \{c, d\}, \{a, b, d\}, \{a, b, c\}, \Omega\}.$$

Propriétés d'une algèbre :

P1- $\varnothing \in \mathcal{C}$ et $\Omega \in \mathcal{C}$.

P2- Si $A_j \in \mathcal{C}$, pour $1 \leq j \leq n$, on démontre par récurrence que $\cup_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{C}$.

P3- Si $A_j \in \mathcal{C}$, pour $1 \leq j \leq n$, on démontre par passage au complémentaire que $\cap_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{C}$.

Certaines expériences peuvent se dérouler indéfiniment. Soit par exemple l'expérience aléatoire "jeter un dé" et soit l'évènement A_n :"obtenir 3 au n ieme lancé". L'évènement A : "obtenir le chiffre 3" sera alors $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$
D'où la nécessité de passer d'une réunion finie dans P2 à une réunion dénombrable; on aura:

Si $A_n \in \mathcal{C}$ pour tout n, alors $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{C}$. Dans ce cas, on dit que $\mathcal{C}$ est une σ-algèbre ou tribu.

Ainsi le couple $(\Omega, \mathcal{C})$ est appelé espace probabilisable, c'est à dire qu'on peut lui associer une probabilité

III. Probabilité

Une fois défini l'ensemble des évènements auxquels on s'intéresse, on va essayer de traduire en nombre leurs chance de réalisation. L'outil qui permet cette évaluation est l'application *Probabilité*.
Définition: On appelle probabilité $\mathbb{P}$ sur (Ω, A) une application $P : \mathcal{C} \to [0, 1]$, telle que :

(i) $P(\Omega) = 1$.

(ii) Pour toute suite A_n d'évènements incompatibles i.e. $A_n, A_m \in \mathcal{C}$ avec $A_n \cap A_m = \varnothing$, pour $m \neq n$:

$$\mathrm{P}\left(\cup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}\left(A_n\right).$$

La propriété (ii) est connue sous le nom de σ-additivité.Le triplet $(\Omega, \mathcal{C}, P)$ est appelé espace probabilisé.
On a les propriétés suivantes déduites de la définition:
P1) $P(\varnothing) = 0$.
P2) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
P3) Si $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.
P4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Remarque

Pour toute suite non disjointes de (A_n) i.e $\exists m \neq n$ tels que $An \cap Am = \varnothing$, on a l'inégalité de Boole:

$$P\left(\cup_{n=0}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} P\left(A_n\right).$$

*Le cas particulier de l'équiprobabilité

Dans le jet en l'air d'une pièce de monnaie, il y a deux éventualités possibles ; pile ou face. Si on considère l'éventualité obtenir face , parmi les deux résultats également probables, il y en a qu'un qui est favorable à obtention de face La probabilité d'avoir face est égale à 1/2 . Idem dans l'exemple du lancer de dé, sans aucune connaissance spécifique en mathématiques, chacun peut aisément et intuitivement comprendre que, dans le cadre de cette expérience dont les issues sont les nombres entiers de 1 à 6, la probabilité de l'événement «obtenir 4» vaut1/6 et elle est la même pour tout les autre issues.

Ainsi, on dit que les issues d'une expérience aléatoire dont l'univers Ω contient un nombre fini d'éléments sont équiprobables si l'on considère qu'elles ont toutes la même probabilité, la même chance de se réaliser.

Dans ce contexte, la probabilité d'un événement A est définie comme suit :

$$P(A) = \frac{Cardinal(A)}{Cardinal(\Omega)} = \frac{nombre\ d'\acute{e}ventualit\acute{e}s\ favorables}{nombre\ d'\acute{e}ventualit\acute{e}s\ possibles}$$

Dans ce cas le calcul de la probabilité $P(A)$ se ramène à des problème de dénombrement (analyse combinatoire)

Exemples:

1) On jette un dé, P(obtenir un nombre impair) = 3/6.
2) dans une urne, il y a 30 boules rouges, 20 boules noires, 10 boules vertes indiscernables au toucher et disposées au hasard. On tire une boule.
   P(tirer une boule verte) = 10/60.
   P(tirer une noire) = 20/60.
   P(tirer une rouge) = 30/60.

Exercice d'application:

Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12, on tire au hasard une boule.
Calculer la probabilité de tirer un nombre pair ou un multiple de trois.

Solution :

*Exprimer les événements considérés.
A: « tirer un nombre pair »
A = {2, 4, 6, 8, 10, 12}
B: « tirer un multiple de trois »
B = {3, 6, 9, 12}
*Remarquer le ou entre ces événements,
A ∪B={2,3,4,6,8,9,10,12}
P(A ∪B) = 8/12
Ou bien
*Exposer la formule sur la probabilité de la réunion.
P(A ∪B) = P(A) + P(B) − P(A ∩ B).
*Poser la question de la compatibilité.
P(A)=6/12
P(B)=4/12
A ∩ B = {6, 12}.
P(A ∩ B)=2/12
D'où
P(A ∪B) = 6/12 + 4/12 − 2/12 = 2/3.

IV. Probabilité Conditionelle

En théorie des probabilités, il y a des situations où de nouvelles informations changent la probabilité des évènements. Par exemple, supposons que nous essayons de deviner une carte qu'un ami a tirée dans un jeu de 52 cartes. Complètement au hasard, nous pouvons supposer que notre ami a tiré l'as de pique. Puisqu'il n'y a aucune information sur quelle carte est la bonne, la probabilité que notre supposition soit correcte est $\frac{1}{52}$ .Et si notre ami révèle que la bonne carte est un pique ? Compte tenu de cette nouvelle information, la probabilité que notre supposition soit correcte augmentera pour devenir $\frac{1}{13}$.

Nous pouvons noter que la valeur de la probabilité que notre estimation soit correcte a changé lorsque de nouvelles informations ont été révélées. Cela démontre la notion de probabilité conditionnelle, qui est la probabilité d'un évènement **sachant** l'issue d'un autre évènement. Dans ce contexte, la probabilité 1/13 représente la probabilité conditionnelle que la bonne carte soit un as de pique sachant que la bonne carte est un pique.

***Définition**: Considérons deux événements A et B d'un univers Ω tels que $P(A)\neq 0$.
La probabilité de B sachant que A est réalisé est notée $P_A(B)$ et est définie par:

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

Il s'agit d'une nouvelle probabilité, dite probabilité conditionnelle, définie sur l'univers Ω. Elle a toutes les propriétés d'une probabilité. En particulier :

$0 \leq P(B|A) \leq 1$;
$P(A \backslash A) = 1$;
$P(\Omega|A) = 1$;
$P(\emptyset|A) = 0$;
$P(B|A) + P(\overline{B}|A) = 1$.

On en déduit facilement la propriété suivante permettant de calculer la probabilité d'une intersection :

***Théorème des probabilités composées:**

$$P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(A|B) \times P(B) = P(B|A) \times P(A)$$

Exemple: Soit une urne contenant 10 boules blanches, 20 rouges et 30 noires. On tire deux boules sans remise dans l'urne, quelle est la probabilité que la première boule soit rouge et seconde blanche ?
Solution : Soient les évènements :
R :"tirer une boule rouge",
B :"tirer une boule blanche".
$P(R \cap B) = P(R) \times P(B|R) = 20/60 \times 10/59 = 10/117$.
$P(B|R) = 10/59$, (il reste 59 boules dans l'urne dont 10 sont blanches).

V. Indépendence de deux événements

***Définition:** On dit que deux événements sont indépendants lorsque la probabilité de l'un n'est pas influencée par la réalisation (ou non) de l'autre.

***Proposition:** Deux événements A et B, de probabilité non nulle, sont indépendants si, et seulement si, l'une des égalités suivantes est vérifiée :

$$P(B|A) = P(B)$$
$$P(A|B) = P(A)$$
$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Remarques - Si $P(A) = 0$ ou $P(B) = 0$, alors les événements sont dits indépendants.
- Ne pas confondre événements indépendants et événements incompatibles (d'intersection vide)

***Propriété:** Si A et B sont deux événements indépendants, alors $\overline{A}$ et B sont également indépendants (ainsi que A et $\overline{B}$, ainsi que $\overline{A}$ et $\overline{B}$).

V. Formule de Bayes

Il arrive dans certains problèmes pratiques qu'on ait besoin de probabilités a posteriori du type $P(A_i | B)$, alors que, à partir de considérations théoriques ou de données historiques, on connaisse plutôt les probabilités a priori $P(A_i)$ et les probabilités conditionnelles $P(B|A_i)$.

*Définition: On dit que les A_1 ,..., A_n forment un système complet (ou partition) de Ω si :

$*P(A_i) > 0.$

$* \; A_i \cap A_j = \emptyset$, pour $i \neq j$.(incompatibles)

$* \; \cup_{j=1}^{n} A_j = \Omega$

*Théorème de probabilité totale: Soit { A_1 ,..., A_n } un système complet. Soit B un événement. Alors

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_i)\,\mathbb{P}(A_i)$$

*Théorème de Bayes: Soit { A_1 ,..., A_n } un système complet. Soit B un événement. Alors

$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_i)\,\mathbb{P}(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_i)\,\mathbb{P}(A_i)}$$

Exemple : On considère le tirage d'une carte d'un jeu de 52. Soient les événements suivants:
R : tirer une carte rouge (cœur ou carreau)
P : tirer un pique
T : tirer un trèfle
D : tirer une carte appartenant à l'ensemble {2♥, 2♦, 2♠, 3♥, 7♥}.
A priori, on connaît toutes les probabilités qui nous intéressent. Mais, supposons que seules les probabilités a priori

$$P(R) = 26/52 \;, P(P) = 13/52 \text{ et } P(T) = 13/52$$

Ainsi que les probabilités conditionnelles

$$P(D \mid R) = 4/26 \;, P(D \mid P) = 1/13 \text{ et } P(D \mid T) = 0$$

soient connues.
Calculer la probabilité a posteriori P(R| D).
D'après la définition de probabilité conditionnelle (appliquée deux fois),

$$P(R|\, D) = \frac{P(D \cap R)}{P(D)} = \frac{P(R) \times P(D/R)}{P(D)} = \frac{\frac{26}{52} \times \frac{4}{26}}{P(D)} .$$

Notons que les événements R, P et T constituent un système complet de l'ensemble fondamental de tous les résultats possibles du tirage, en ce sens que la carte tirée appartiendra nécessairement à un et à un seul de ces trois ensembles (en effet, toute carte est soit rouge, soit un pique, soit un trèfle).
D'après le théorème de probabilité totale on a :

$$P(D) = P(R) \times P(D \mid R) + P(P) \times P(D \mid P) + P(T) \times P(D \mid T) = 5/52 .$$

Ainsi, $P(R|\, D) = 4/5$.