UNIVERSITE ABOU BEKR BELKAID–TLEMCEN

FACULTE DE TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DE TÉLÉCOMMUNICATIONS

POLYCOPIE DE TRAVAUX DIRIGÉS

Théorie du Signal

Licence L2

Télécommunications / Électronique/ Génie Biomédical

Présenté par :
M^{r} BOUSAHLA Miloud Maitre de Conférences

Année Universitaire 2022-2023

Table des matières

Préambule

Ce document rassemble les travaux dirigés du module Théorie du Signal TS 422, il est spécialement destiné aux étudiants en deuxième année licence en Télécommunications ainsi qu'aux étudiants dans les filières de Génie Électrique et Électronique (GEE) et Génie Biomédical. Il correspond au programme officiel de la matière Théorie du signal enseignée en deuxième année Licence en Télécommunications.

Ces TDs ont été effectués au département de Télécommunications de l'Université Abou-Bekr-Belkaid de Tlemcen durant les deux dernières années.

TD N° 1 : Représentation des signaux

Exercice n° 1 :

Représenter les signaux suivants :

1) $s_1(t) = \delta(t+3)$, $s_2(t) = 2\,\delta(t-3)$, $s_3(t) = 3\,\delta(t-2)$
2) $s_4(t) = 3\,u(t+3)$, $s_5(t) = 2\,u(t-2)$, $s_6(t) = 3\,u(t-3)$
3) $s_7(t) = u(t-2) - 3\,u(t+3)$
4) $s_8(t) = 2\,Rect\left(\frac{t-1}{2}\right) + Rect\left(\frac{t-3}{2}\right)$
5) $s_9(t) = ramp(t-2) - 2 \times ramp(t-3) + ramp(t-4)$

Exercice n° 2 :

Classez les signaux suivants :

1. $Am\ Rect\left[\frac{t}{T_0}\right]$
2. $Am\ \sin(2\pi F t)$
3. $\mathrm{ramp}(t)$
4. $s(t) = \begin{cases} e^{-at} & si\ t \geq 0 \\ 0 & si\ t < 0 \end{cases} \quad avec\ a > 0$

Exercice n° 3 :

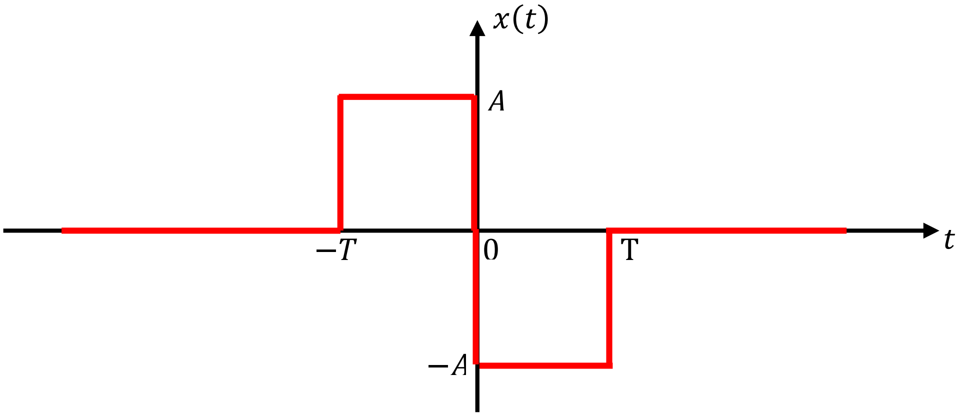
Déterminer si les signaux suivant sont périodiques et calculer leur période :

$$x_1(t) = 3\sin(\pi\, t) - 2\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

$$x_2(t) = 5\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{5}}t\right) - 3\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$$

Exercice n°4 :

Soit le signal $x(t)$ donné par la figure suivante :



Exprimer $x(t)$ à l'aide des signaux usuels.

Exercice n° 5 :

Soit les signaux suivants :

$$s_1(t) = -ramp(t-3) + 2 \times ramp(t-4) - ramp(t-5)$$

$$s_2(t) = u(t) - u(t-3)$$

- Représenter graphiquement les signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$.
- Quelle est la nature des deux signaux ?
- Calculer l'énergie du signal $s_2(t)$.
- Déduire la représentation graphique du signal : $s(t) = s_1(t) + s_2(t)$

Exercice n° 6 :

Décomposer les signaux suivants en une partie paire $s_p(t)$ et une partie impaire $s_i(t)$:

1) $s_1(t) = u(t+\tau)$, $\tau > 0$

2) $s_2(t) = Rect\left(\frac{t}{T_0}\right)$

3) $s_3(t) = Rect\left[\frac{(t+\tau)}{T_0}\right]$ $avec$ $\tau = \frac{T_0}{4}$

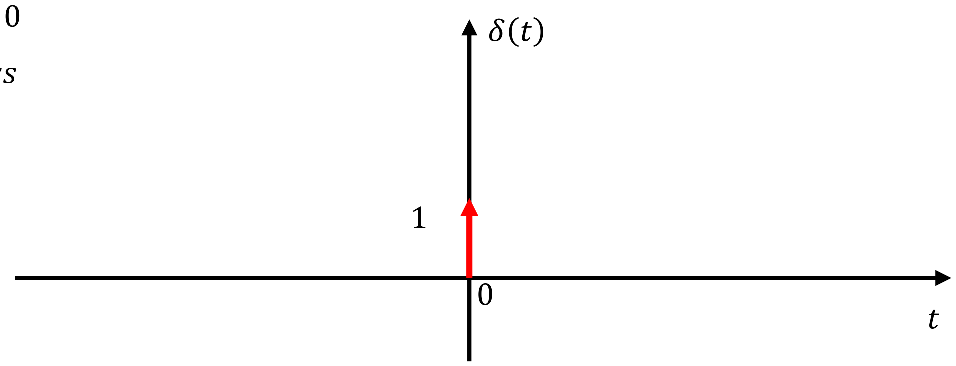
4) $s_4(t) = Rect\left[\frac{(t+\tau)}{T_0}\right]$ $avec$ $\tau = \frac{T_0}{2}$

Solution du TD N°1

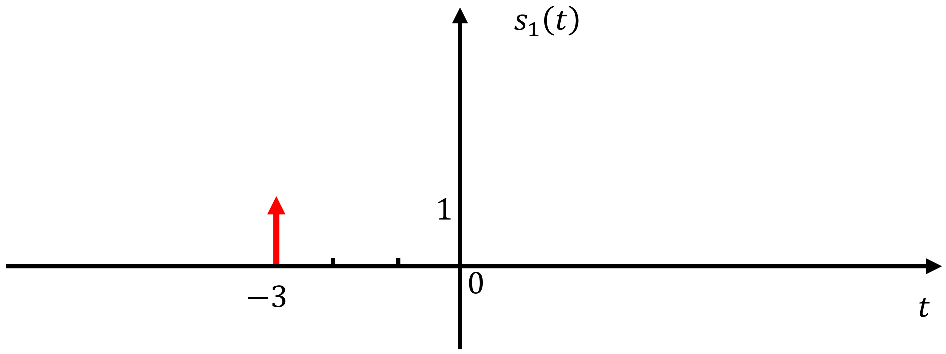
Exercice n°1 :

1) $s_1(t) = \delta(t+3)$, $s_2(t) = 2\,\delta(t-3)$, $s_3(t) = 3\,\delta(t-2)$

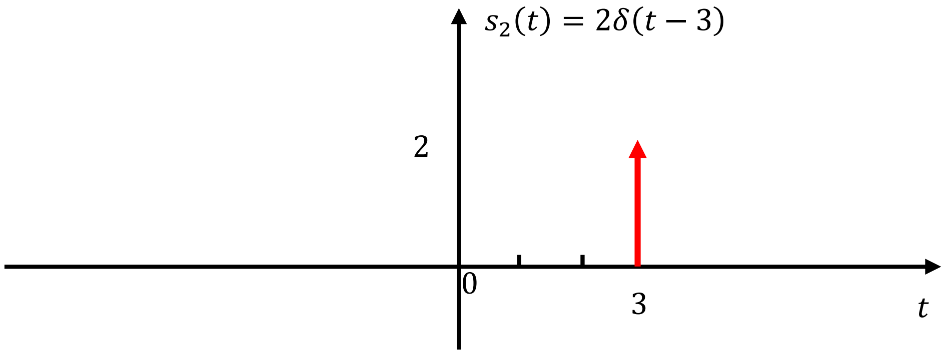
$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & si\ t = 0 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$



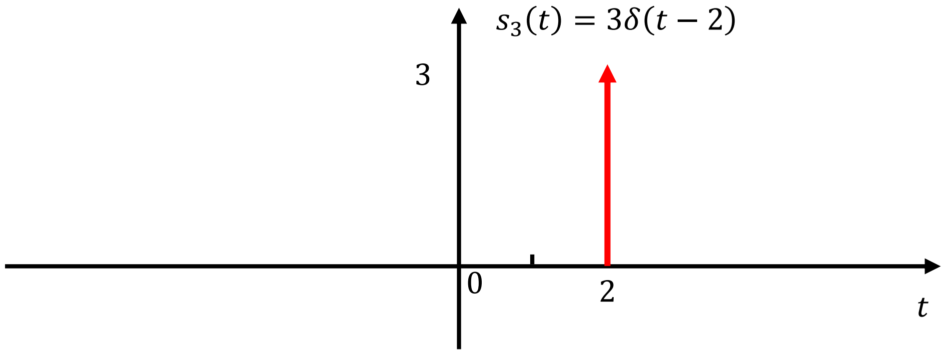
$\delta(t+3)$: Impulsion de Dirac avancée de 3



$s_2(t) = 2\,\delta(t-3)$: Impulsion de Dirac retardée de 3



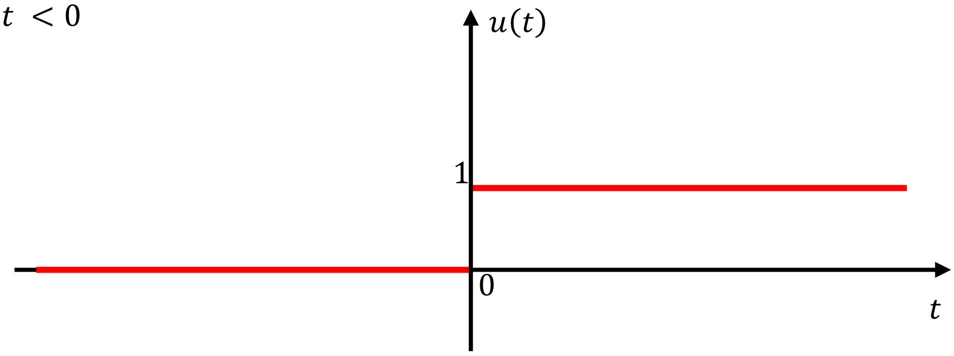
$s_3(t) = 3\,\delta(t-2)$: Impulsion de Dirac retardée de 2



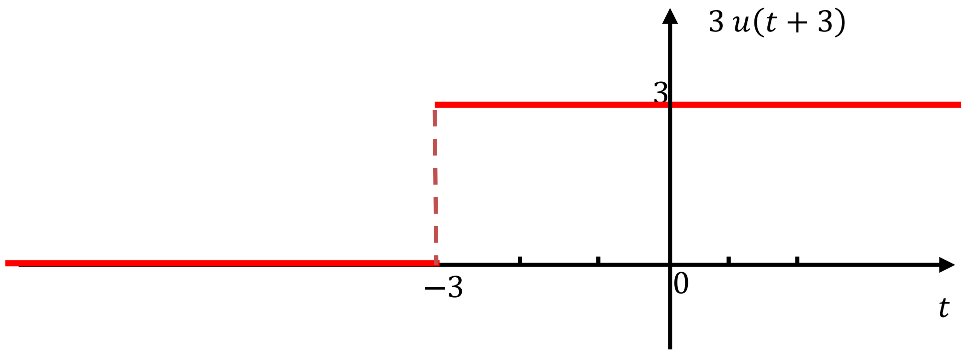
2) $s_4(t) = 3\,u(t+3)$, $s_5(t) = 2\,u(t-2)$, $s_6(t) = 3\,u(t-3)$

$u(t)$: Le signal échelon, ou fonction de Heaviside

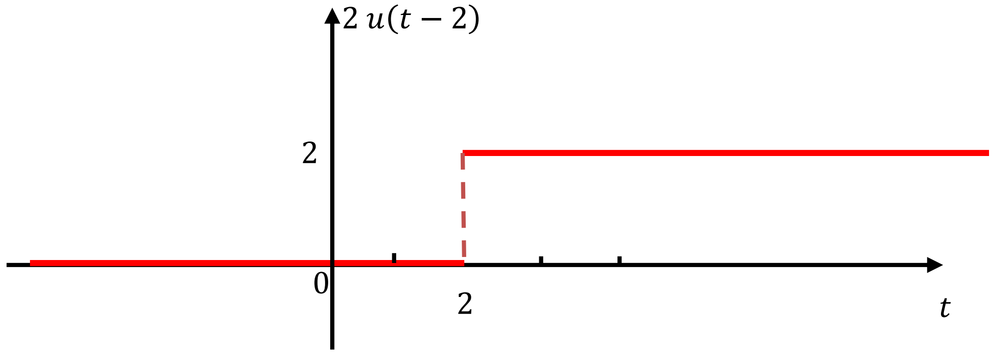
$$u(t) = \begin{cases} +1 & si\ t > 0 \\ 0 & si\ t < 0 \end{cases}$$



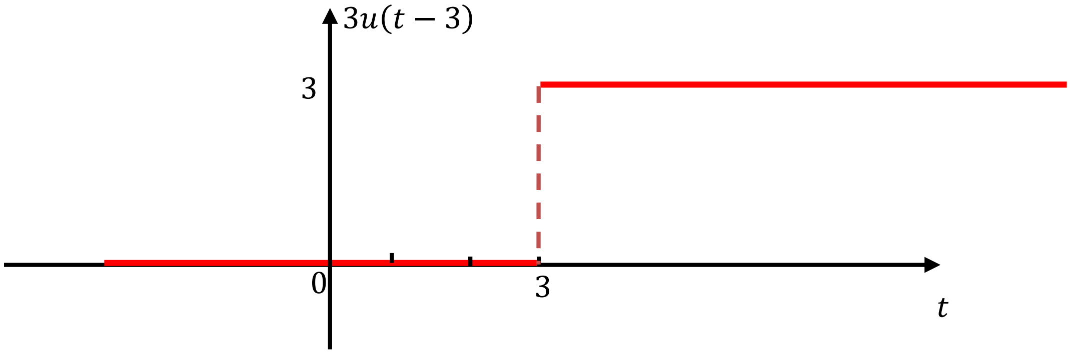
$s_4(t) = 3\,u(t+3)$: Le signal échelon unité avancé de 3.



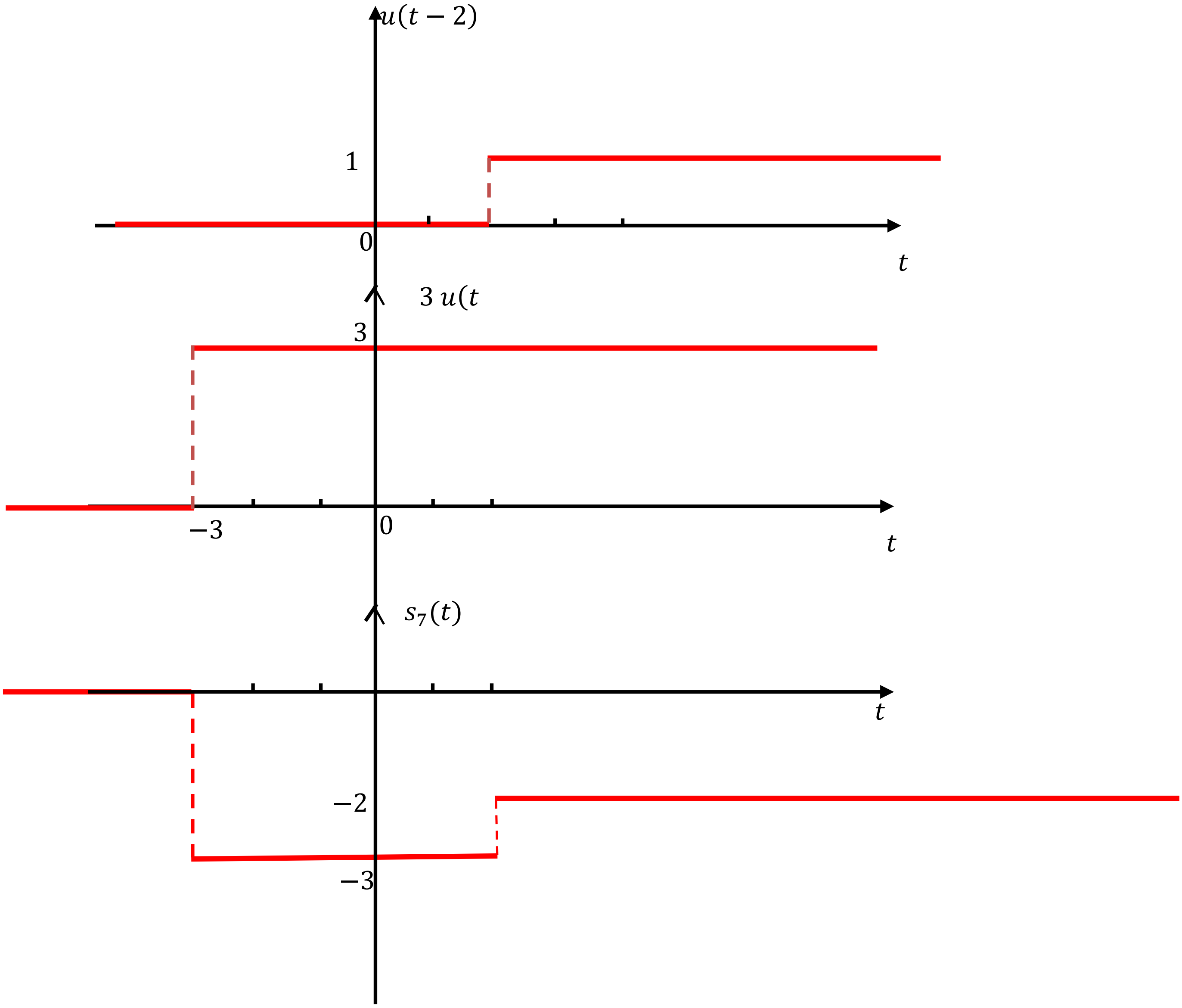
$s_5(t) = 2\,u(t-2)$: Le signal échelon unité retardé de 2



$s_6(t) = 3\,u(t-3)$: Le signal échelon unité retardé de 3.



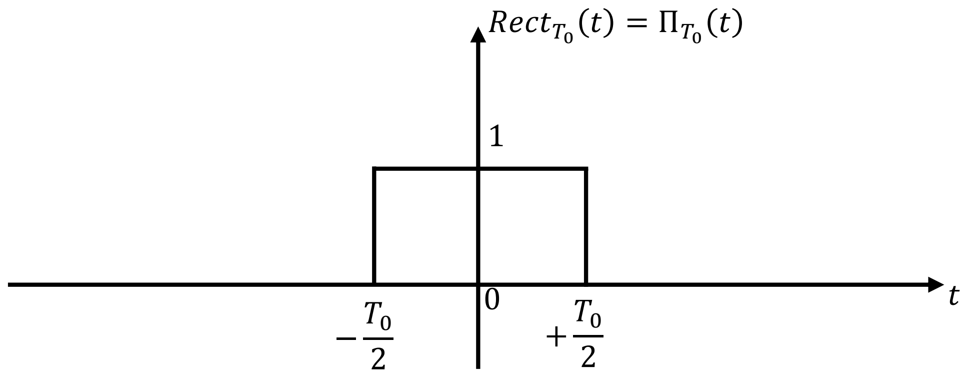
3) $s_7(t) = u(t-2) - 3\,u(t+3)$



4) $s_8(t) = 2\,Rect\left(\frac{t-1}{2}\right) + Rect\left(\frac{t-3}{2}\right)$

Le signal « porte » ou rectangle centré sur 0 et de largeur T_0 est défini par :

$$Rect\left(\frac{t}{T_0}\right) = \begin{cases} 1 & pour -\frac{T_0}{2} \leq t \leq \frac{T_0}{2} \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$



Une impulsion rectangulaire centrée en $t = \tau$, d'amplitude A et de durée T_0 :

$$S(t) = A\ Rect\left[\frac{(t-\tau)}{T_0}\right] = \begin{cases} A & si\ \ |t-\tau| \leq \frac{T_0}{2} \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

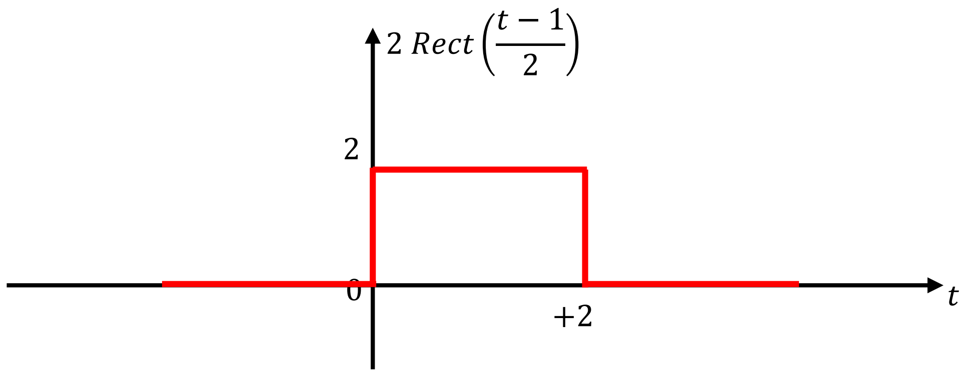
$$S(t) = A\ Rect\left[\frac{(t-\tau)}{T_0}\right] = \begin{cases} A & si\ \ \tau - \frac{T_0}{2} \leq t \leq \tau + \frac{T_0}{2} \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

$2\ Rect\left(\frac{t-1}{2}\right)$:

$$2\ Rect\left(\frac{t-1}{2}\right) = \begin{cases} 2 & pour\ |t-1| \leq 1 \\ 0 & pour\ |t-1| > 1 \end{cases}$$

$$2\ Rect\left(\frac{t-1}{2}\right) = \begin{cases} 2 & pour -1 \leq t-1 \leq 1 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

$$2\,Rect\left(\frac{t-1}{2}\right) = \begin{cases} 2 & pour \quad 0 \leq t \leq 2 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

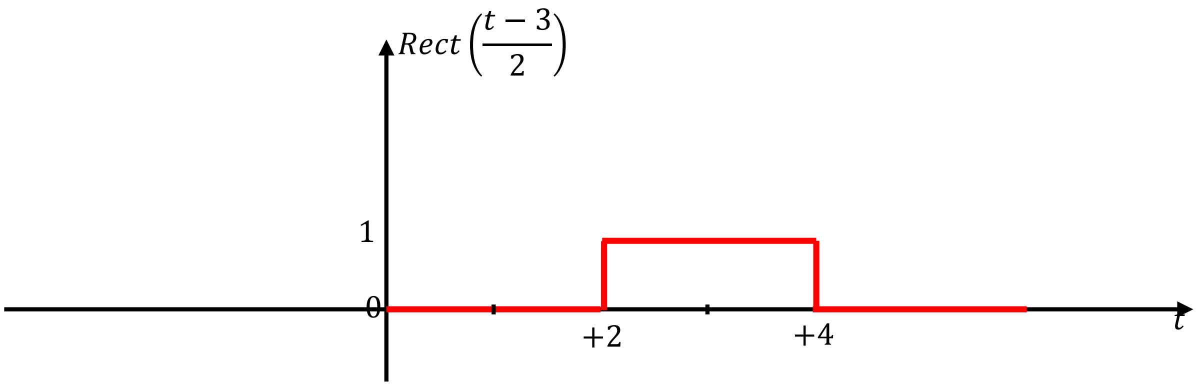


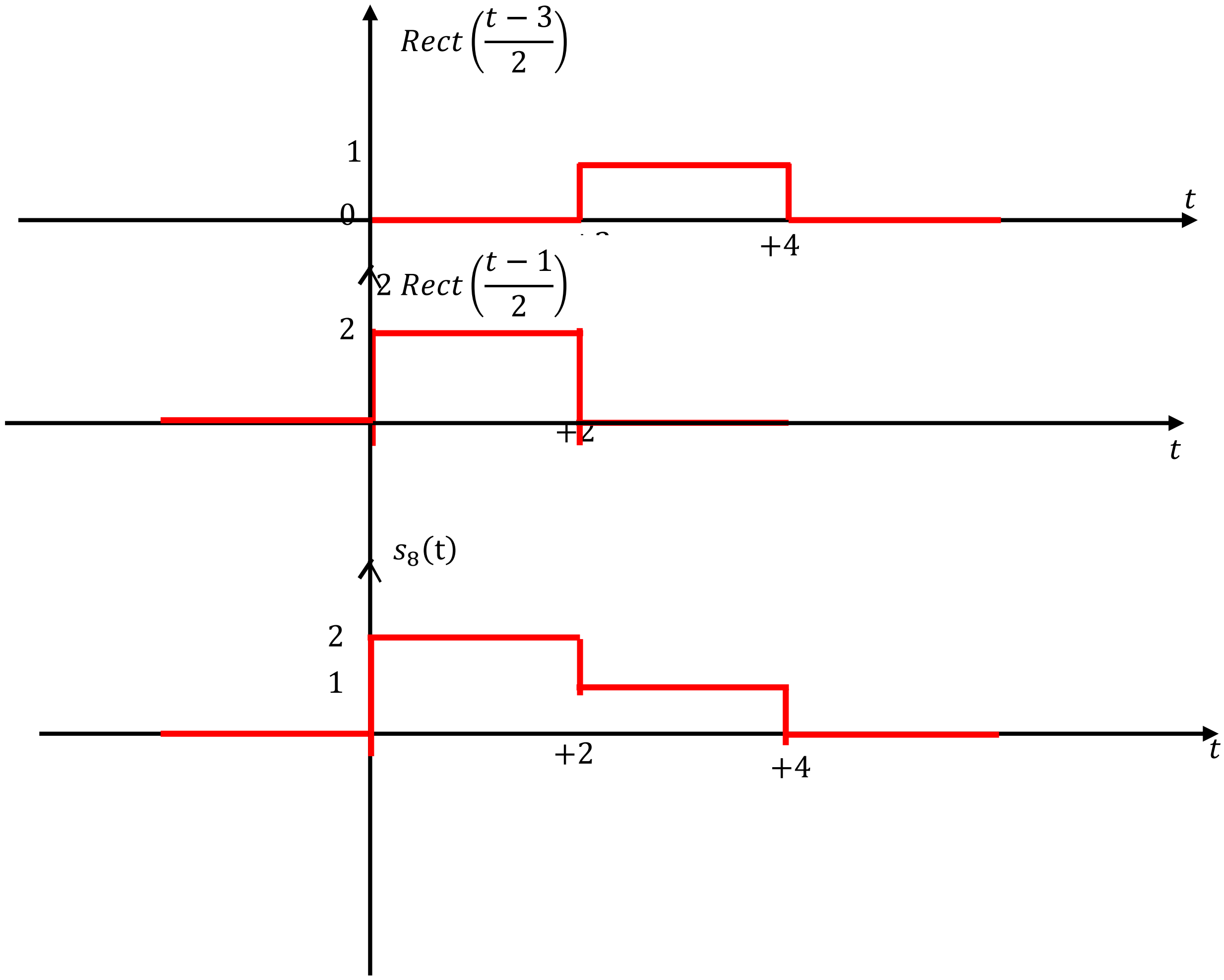
$Rect\left(\frac{t-3}{2}\right)$:

$$Rect\left(\frac{t-3}{2}\right) = \begin{cases} 1 & pour\ |t-3| \leq 1 \\ 0 & pour\ |t-3| > 1 \end{cases}$$

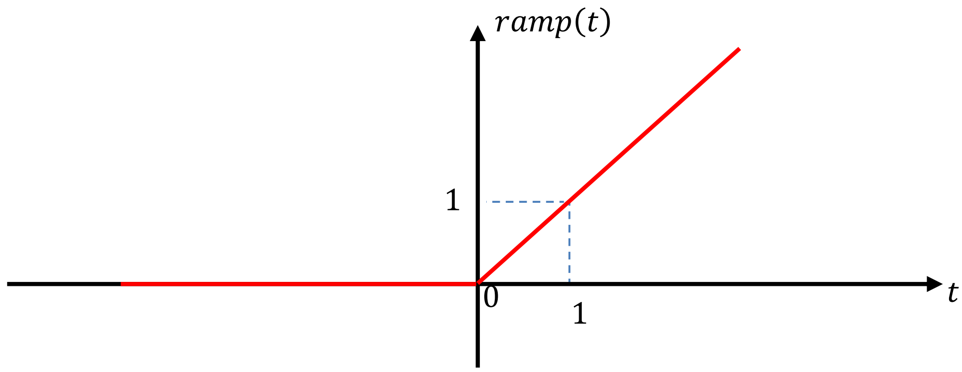
$$Rect\left(\frac{t-3}{2}\right) = \begin{cases} 1 & pour -1 \leq t-3 \leq 1 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

$$Rect\left(\frac{t-3}{2}\right) = \begin{cases} 1 & pour \quad 2 \leq t \leq 4 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$



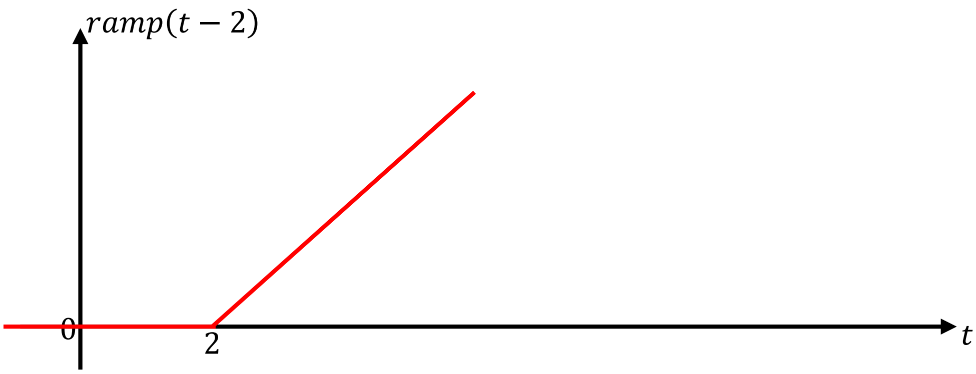


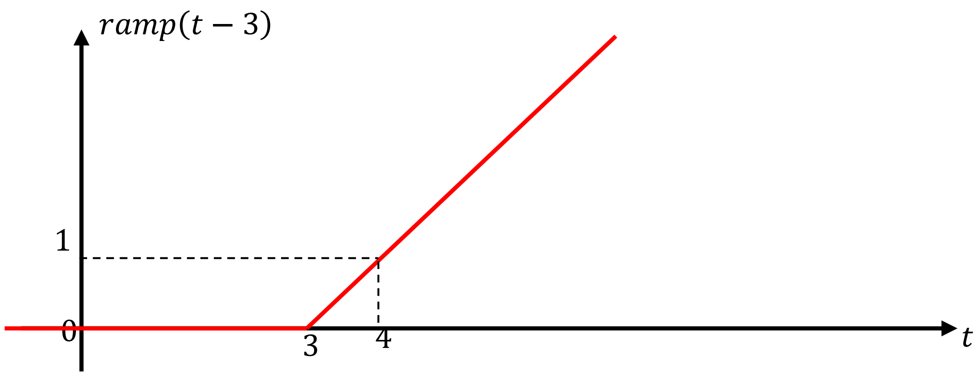
5) $s_9(t) = ramp(t-2) - 2 \times ramp(t-3) + ramp(t-4)$

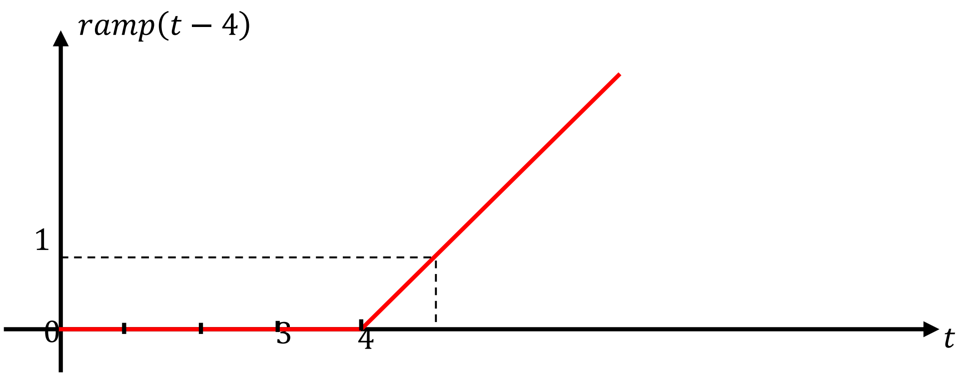


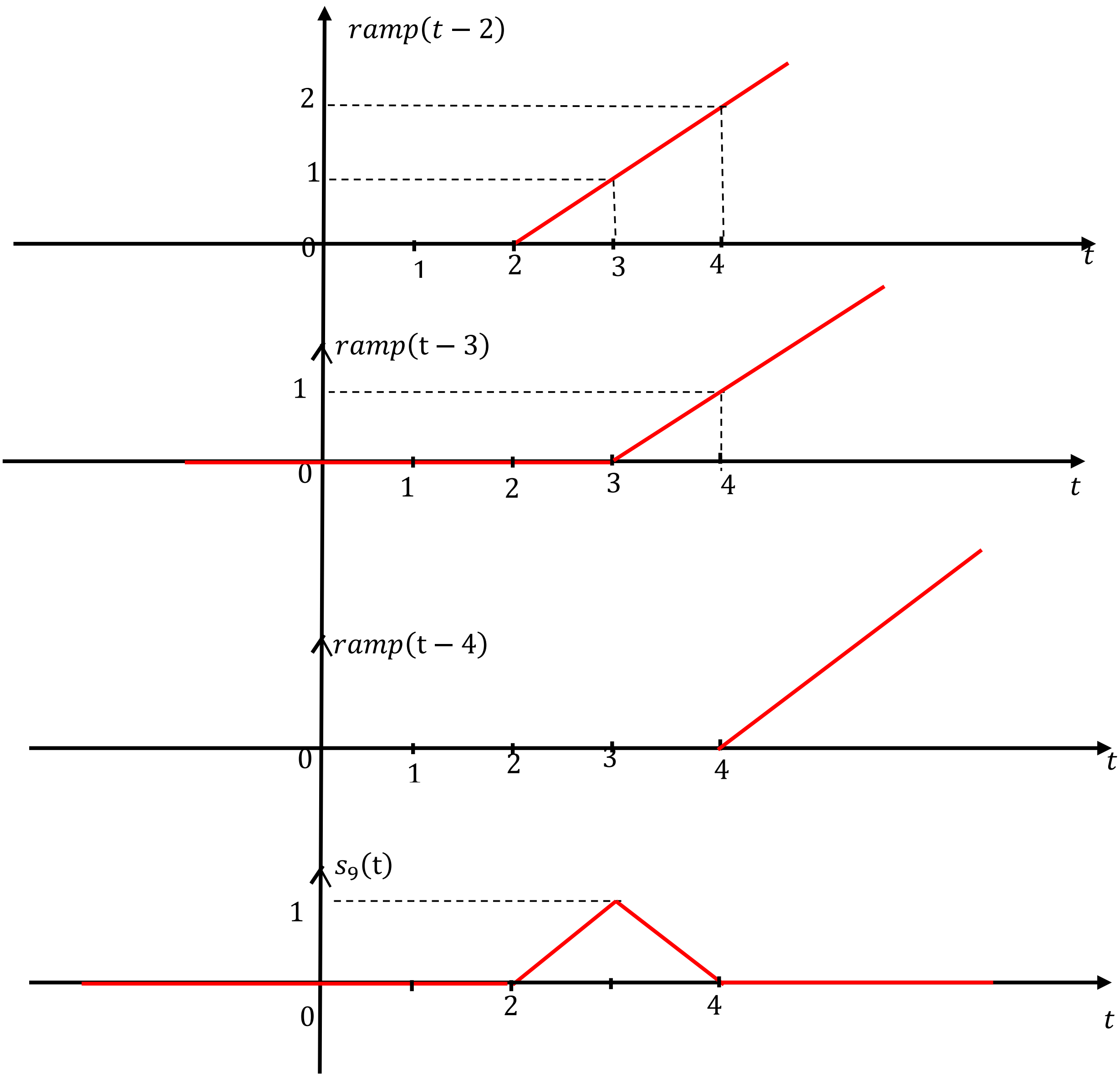
$signal\ rampe:\ ramp(t) = t \times u(t)$

$ramp(t-2):signal\ rampe\ retardé\ de\ 2.$









Exercice n° 2 :

1. $Am\ Rect\left[\frac{t}{T_0}\right]$

Signal à temps continu, transitoire d'amplitude Am et de support temporel $\left[-\frac{T_0}{2},\frac{T_0}{2}\right]$ donc à énergie finie.

2. $Am\ \sin(2\pi Ft)$

Signal à temps continu, périodique, d'amplitude Am de période $\frac{1}{F}$ donc à puissance moyenne finie.

3. $\text{ramp}(t)$

Signal à temps continu, énergie et puissance moyenne infinie.

4. $s(t) = \begin{cases} e^{-at} & si\ t \geq 0 \\ 0 & si\ t < 0 \end{cases} \quad avec\ a > 0$

Signal à temps continu et énergie finie car

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\ dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-2at}\ dt = \frac{1}{-2a}\ e^{-2at}\Big|_{0}^{+\infty} = \frac{1}{2a}$$

Exercice n° 3 :

$$x_1(t) = 3\sin(\pi\, t) - 2\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

$$x_2(t) = 5\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{5}}t\right) - 3\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$$

Nous savons que si $s_1(t)$ est un signal périodique de période T alors le signal $s_2: t \to s_1(at+b),\ a \neq 0$ est périodique est de période $\frac{T}{a}$.

$x_1(t) = 3\sin(\pi\, t) - 2\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$:

$3\sin(\pi\, t)$:

$\sin(t)$ est périodique est de période $2\,\pi$. Donc $\sin(\pi\, t)$ est périodique est de période : $T_1 = \frac{2\pi}{\pi} = 2s$ et de fréquence $f = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{2}\ Hz$ et de pulsation $\omega = 2\,\pi\, f = 2\,\pi\frac{1}{2} = \pi\ rad/s.$

$2\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$:

$\cos(t)$ est périodique est de période $2\,\pi$. Donc $\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ est périodique est de période : $T_2 = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4\ s$ et de fréquence $f = \frac{1}{T_2} = \frac{1}{4}\ Hz$ et de pulsation $\omega = 2\,\pi\, f = 2\,\pi\frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}\ rad/s.$

$\{nT_1,\ n \in \mathbb{N}^*\} = \{\mathbf{2}, \mathbf{4}, 6, \dots\}$ et

$\{mT_2,\ m \in \mathbb{N}^*\} = \{\mathbf{4}, 8, 12, \dots\}$.

Ainsi, $x_1(t)$ est périodique et de période $\boldsymbol{T = 4}$ et de fréquence $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{4}\ Hz$ et de pulsation $\omega = 2\,\pi\, f = 2\,\pi\frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}\ rad/s.$

$$x_1(t+4) = 3\sin\big(\pi(\,t+4)\big) - 2\cos\left(\frac{\pi}{2}(\,t+4)\right) = 3\sin(\pi\, t + 4\pi\,) - 2\cos\left(\frac{\pi}{2}t + 2\pi\right)$$

$$= 3\sin(\pi\, t) - 2\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) = x_1(t)$$

$x_2(t) = 5\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{5}}t\right) - 3\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$:

$5\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{5}}t\right)$:

$\sin(t)$ est périodique est de période $2\,\pi$. Donc $\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{5}}t\right)$ est périodique est de période : $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{\sqrt{5}}} = 2\sqrt{5}$

$3\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$:

$\cos(t)$ est périodique est de période $2\,\pi$. Donc $\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$ est périodique est de période : $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6$

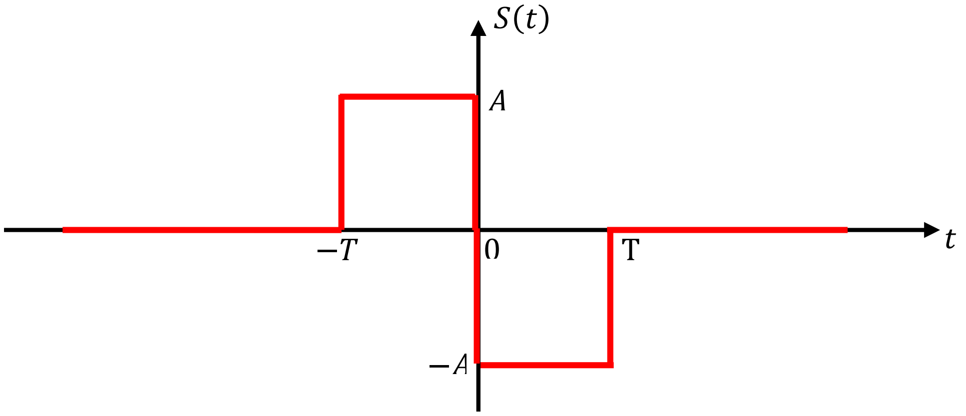
$\{nT_1,\ n \in \mathbb{N}^*\} = \{\mathbf{2\sqrt{5}}, 4\sqrt{\mathbf{5}}, 6\sqrt{\mathbf{5}}, \dots\}$ et

$\{mT_2,\ m \in \mathbb{N}^*\} = \{\mathbf{6}, 12, 18, \dots\}$.

Donc le signal $x_2(t)$ n'est pas périodique.

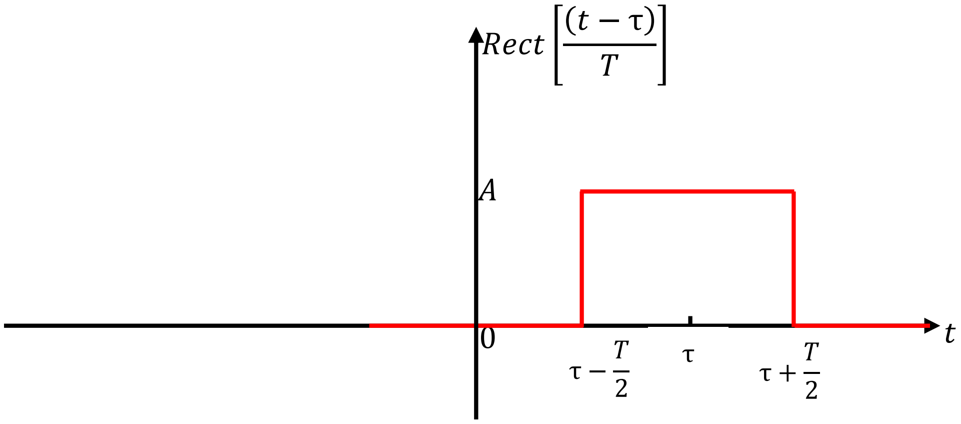
Exercice n°4 :

Le signal $s(t)$ est donné par la figure suivante :



On a :

$$A\,Rect\left[\frac{(t-\tau)}{T}\right]=\begin{cases}A & si\ \ |t-\tau|<\dfrac{T}{2}\\ 0 & ailleurs\end{cases}$$



Il s'agit de deux signaux rectangles décalés :

$$s(t)=s_1(t)+s_2(t)=A\,Rect\left[\frac{\left(t+\frac{T}{2}\right)}{T}\right]-A\,Rect\left[\frac{\left(t-\frac{T}{2}\right)}{T}\right]$$

$$s_1(t)=A\,Rect\left[\frac{\left(t+\frac{T}{2}\right)}{T}\right]=\begin{cases}A & si\ \ \left|t+\dfrac{T}{2}\right|<\dfrac{T}{2}\\ 0 & ailleurs\end{cases}$$

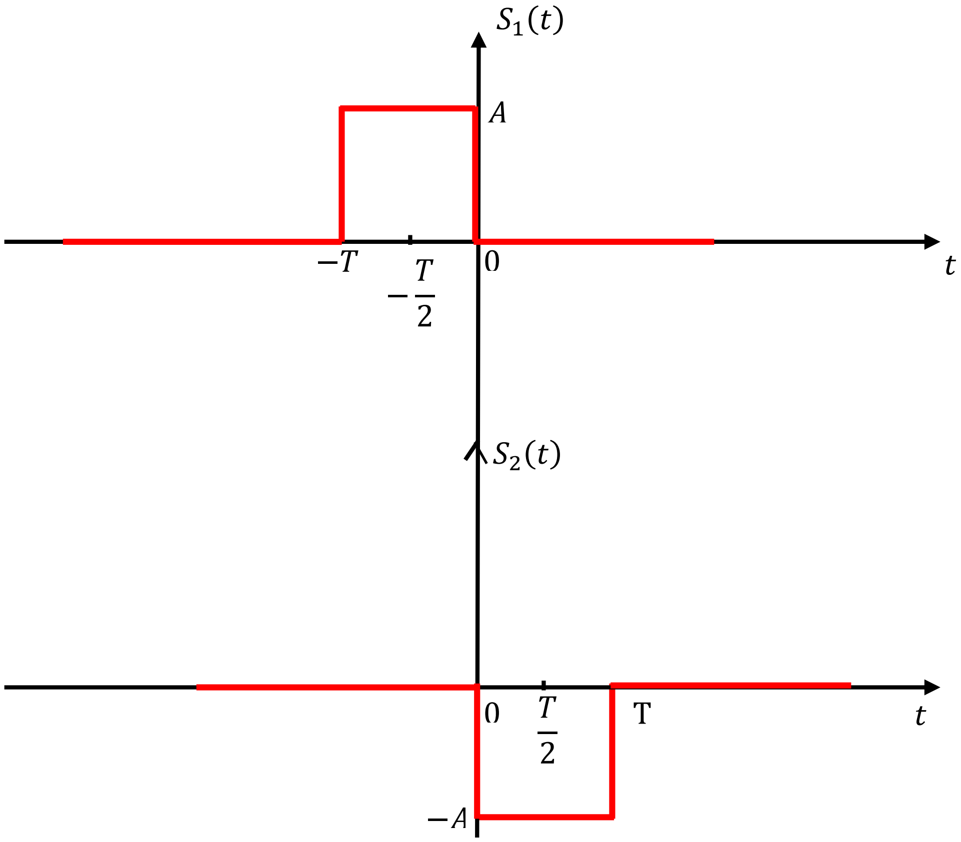
$$\left|t+\frac{T}{2}\right|<\frac{T}{2}\Leftrightarrow-\frac{T}{2}<t+\frac{T}{2}<\frac{T}{2}\Leftrightarrow-\frac{T}{2}-\frac{T}{2}<t<\frac{T}{2}-\frac{T}{2}\Leftrightarrow-T<t<0$$

$$s_1(t)=A\,Rect\left[\frac{\left(t+\frac{T}{2}\right)}{T}\right]=\begin{cases}A & si\ \ -T<t<0\\ 0 & ailleurs\end{cases}$$

$$s_2(t)=-A\,Rect\left[\frac{\left(t-\frac{T}{2}\right)}{T}\right]=\begin{cases}-A & si\ \ \left|t-\dfrac{T}{2}\right|<\dfrac{T}{2}\\ 0 & ailleurs\end{cases}$$

$$\left|t-\frac{T}{2}\right|<\frac{T}{2}\Leftrightarrow-\frac{T}{2}<t-\frac{T}{2}<\frac{T}{2}\Leftrightarrow-\frac{T}{2}+\frac{T}{2}<t<\frac{T}{2}+\frac{T}{2}\Leftrightarrow 0<t<T$$

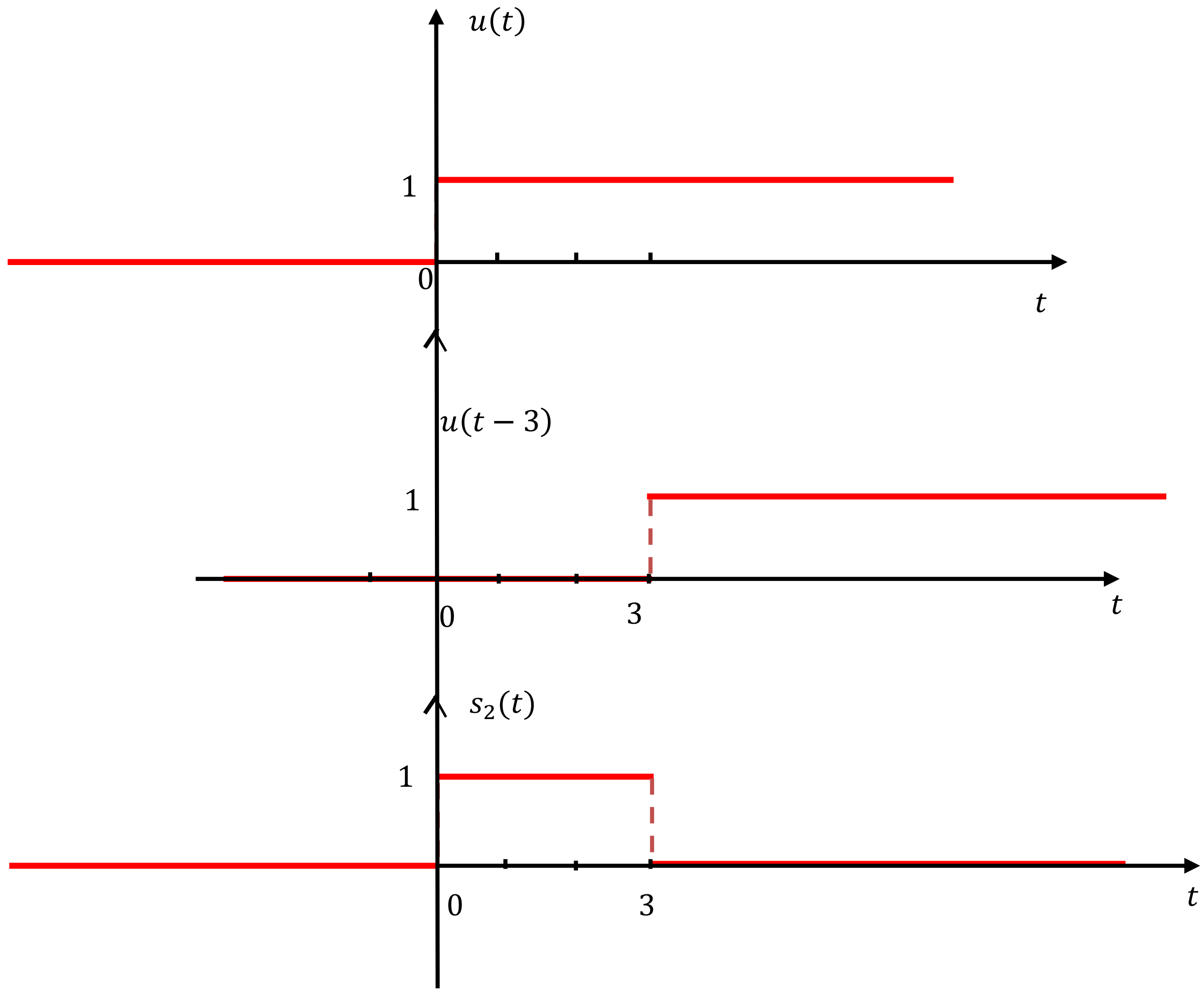
$$s_2(t)=-A\,Rect\left[\frac{\left(t-\frac{T}{2}\right)}{T}\right]=\begin{cases}-A & si\ \ 0<t<T\\ 0 & ailleurs\end{cases}$$



Exercice n° 5 :

$$s_1(t) = -ramp(t-3) + 2 \times ramp(t-4) - ramp(t-5)$$

$$s_2(t) = u(t) - u(t-3)$$



$s_1(t) = -ramp(t-3) + \ 2 \ \times ramp(t-4) - ramp(t-5)$

Pour $t \leq 3 \rightarrow s_1(t) = 0$

Pour $3 < t \leq 4 \ \rightarrow s_1(t) = -ramp(t-3)$

Pour $4 < t \leq 5 \ \rightarrow s_1(t) = ?$

Pour $\boldsymbol{t = 4.5}$

$ramp(t-3) = 1.5$ $ramp(t-4) = 0.5$ $ramp(t-5) = 0$

$\rightarrow s_1(t) = -1.5 + 2 \times 0.5 = -0.5$

Pour $\boldsymbol{t} = \mathbf{5}$

$ramp(t-3) = 2$ $ramp(t-4) = 1$ $ramp(t-5) = 0$

$$\rightarrow s_1(t) = -2 + 2 \times 1 = 0$$

Pour $t = 5.5$

$ramp(t-3) = 2.5$ $ramp(t-4) = 1.5$ $ramp(t-5) = 0.5$

$$\rightarrow s_1(t) = -2.5 + 2 \times 1.5 - 0.5 = 0$$

Pour $\boldsymbol{t} = \mathbf{6}$

$ramp(t-3) = 3$ $ramp(t-4) = 2$ $ramp(t-5) = 1$

$$\rightarrow s_1(t) = -3 + 2 \times 2 - 1 = 0$$

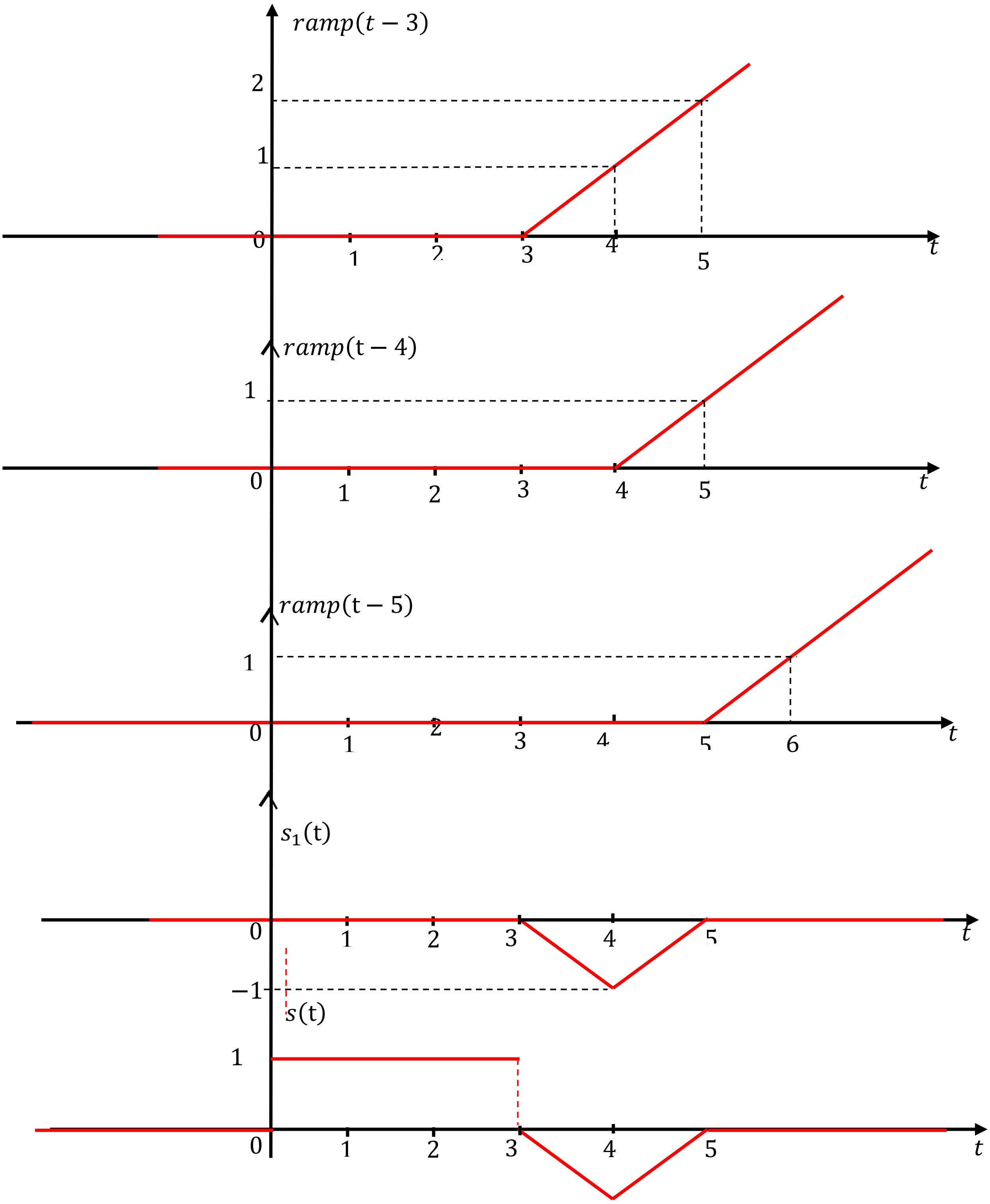
C'est un signal à énergie finie.

$$s_2(t) = Rect\left[\frac{(t-1.5)}{3}\right] = \begin{cases} 1 & si\ |t-1.5| \leq 1.5 \\ 0 & ailleurs \end{cases} = \begin{cases} 1 & si\ 0 \leq t \leq 3 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

C'est un signal à énergie finie.

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |s_2(t)|^2\ dt = \int_{-\infty}^{0} |s_2(t)|^2\ dt + \int_{0}^{3} |s_2(t)|^2\ dt + \int_{3}^{+\infty} |s_2(t)|^2\ dt = \int_{0}^{3} dt = t|_0^3$$

$$= 3$$



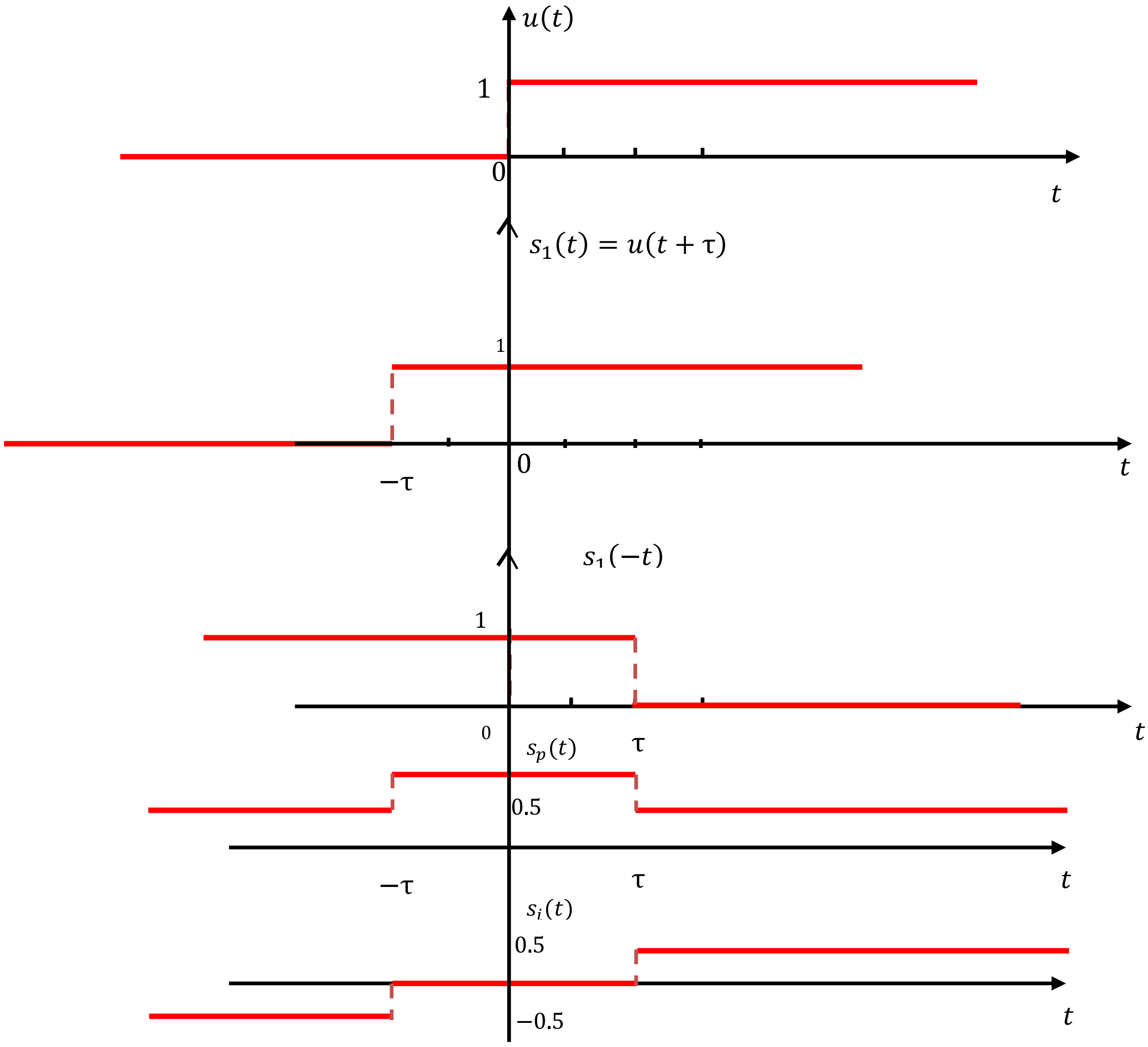
$ramp(t-3)$
2
1
0
1
2
3
4
5
t
$ramp(\mathrm{t}-4)$
1
0
1
2
3
4
5
t
$ramp(\mathrm{t}-5)$
1
0
1
2
3
4
5
6
t
$s_1(\mathrm{t})$
0
1
2
3
4
5
t
-1
$s(\mathrm{t})$
1
0
1
2
3
4
5
t

Exercice n° 6 :

1) $s_1(t) = u(t + \tau)$, $avec\ \tau > 0$

$$s(t) = x_p(t) + s_i(t)$$

$$s_p(t) = \frac{s(t) + s(-t)}{2} \quad et \quad s_i(t) = \frac{s(t) - s(-t)}{2}$$

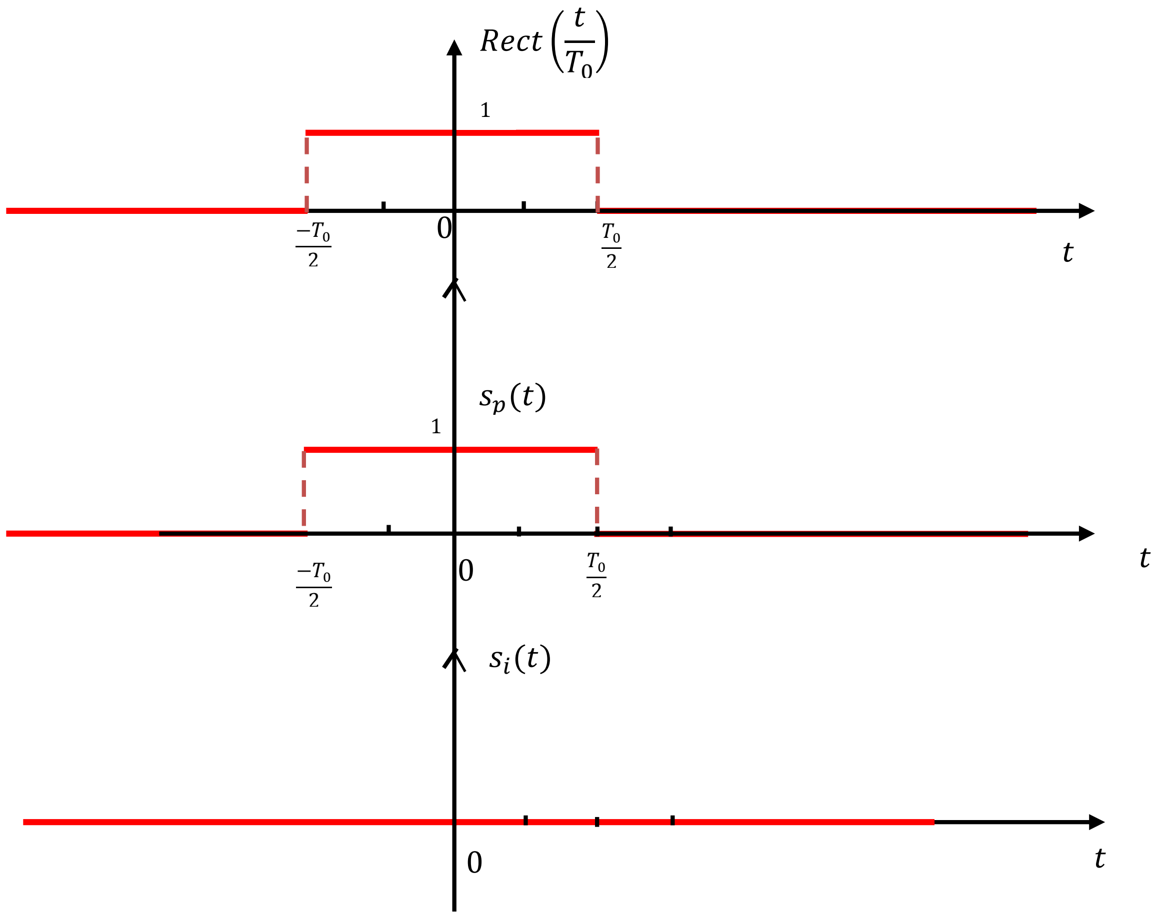


2) $s_2(t) = Rect\left(\frac{t}{T_0}\right)$ signal porte de largeur T_0, centré sur 0.

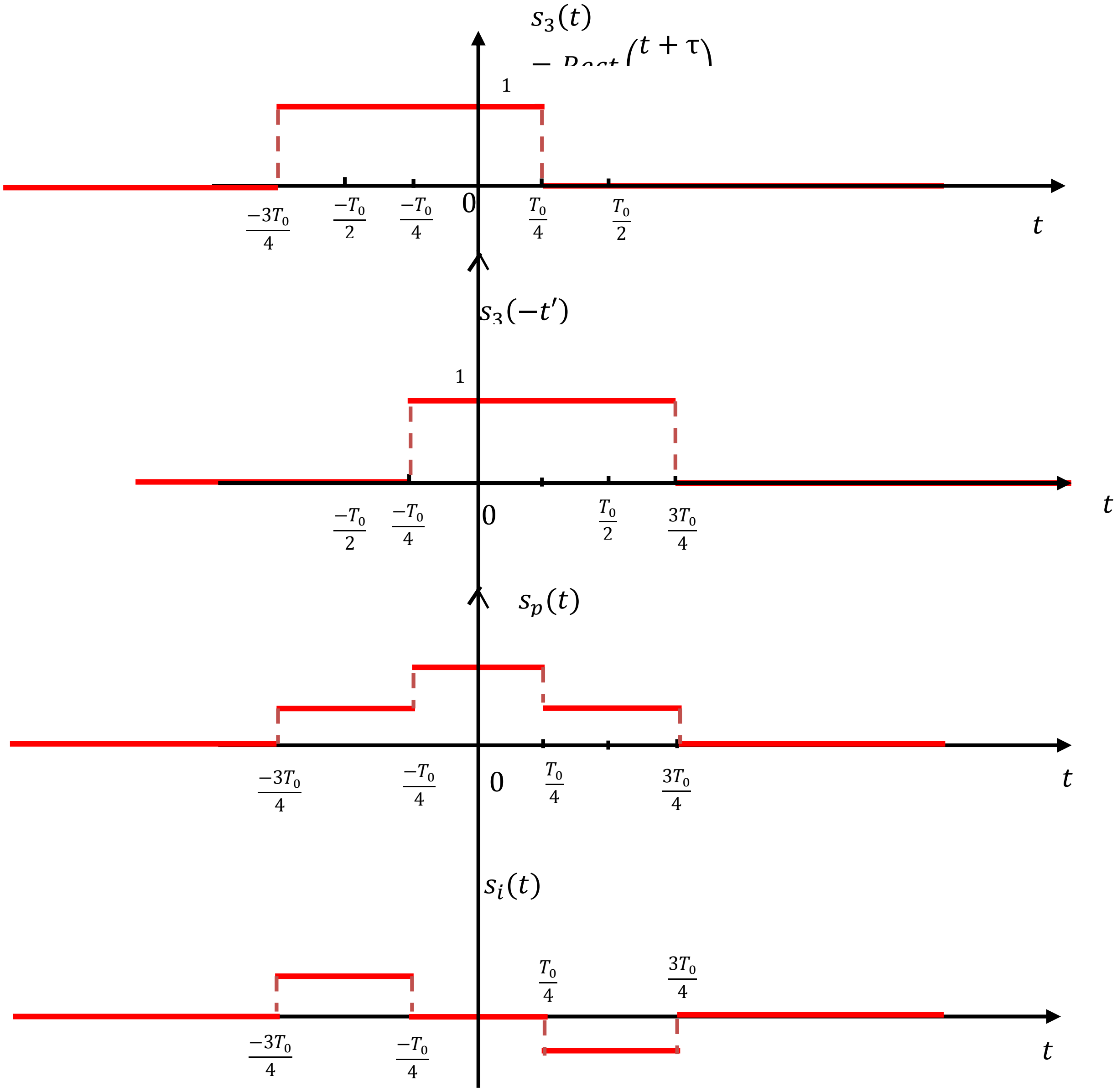
Le signal $s_2(t)$ est un signal pair : $s_2(-t) = s_2(t)$

$$s(t) = s_p(t) + s_i(t)$$

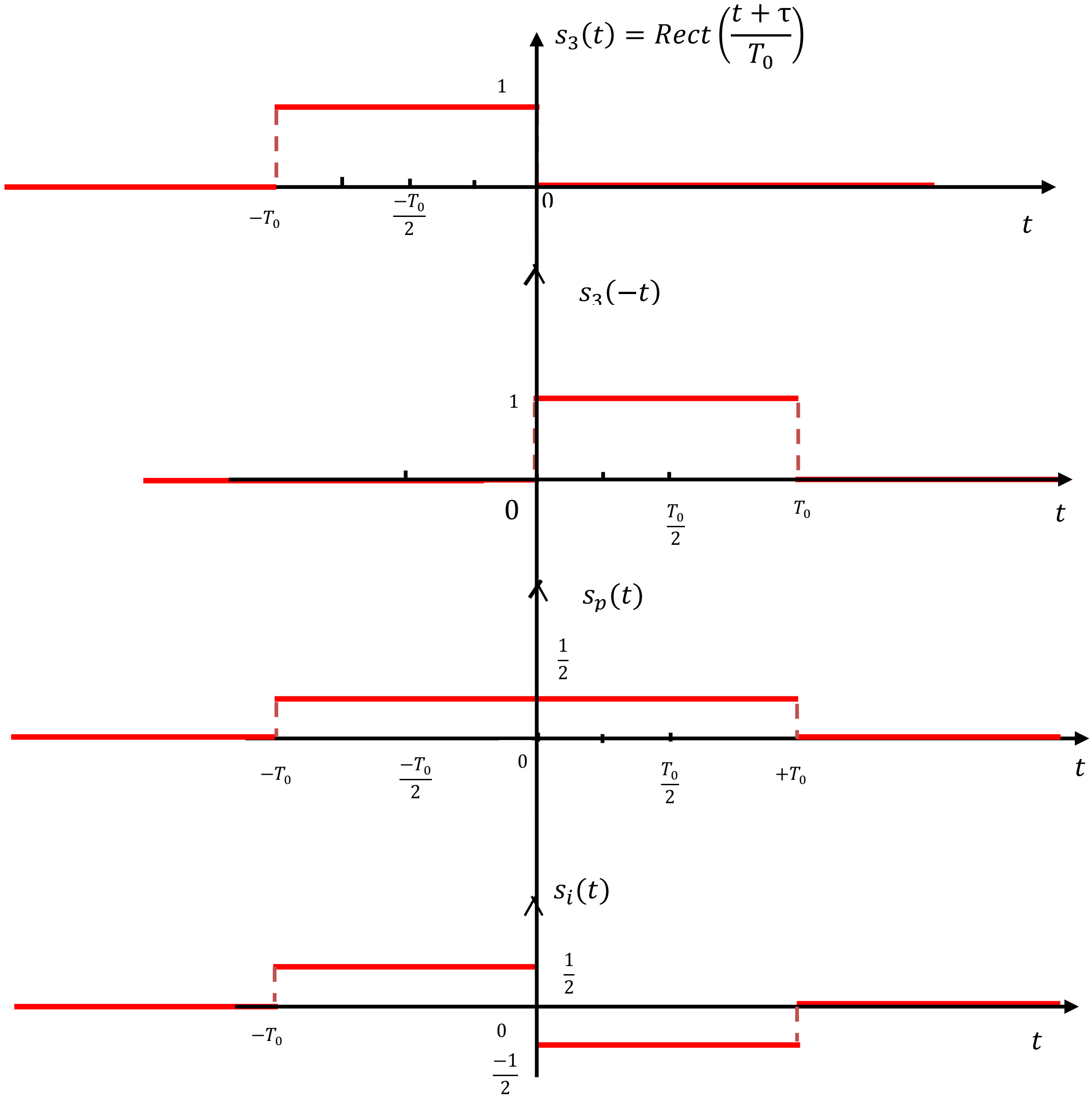
$$s_p(t) = \frac{s(t) + s(-t)}{2} = s(t) \quad et \quad s_i(t) = \frac{s(t) - s(-t)}{2} = 0$$



3) $s_3(t) = Rect\left[\frac{(t+\tau)}{T_0}\right]$ $avec\ \tau = \frac{T_0}{4}$



4) $s_4(t) = Rect\left[\frac{(t+\tau)}{T_0}\right]$ $avec\ \tau = \frac{T_0}{2}$



TD N° 2 : Série de Fourier et Transformée de Fourier

Exercice n°1 :

Soit le signal $s(t)$ donné par la figure suivante :

1. Quelle est la fréquence de ce signal ?

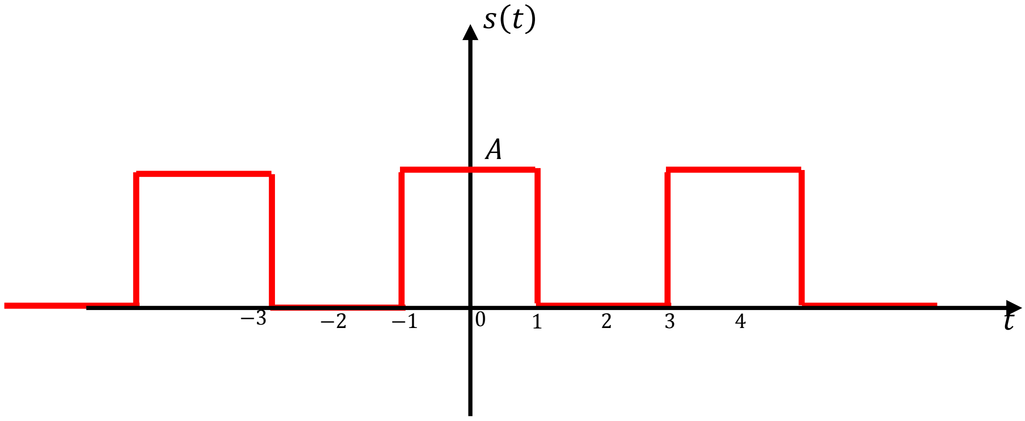
2. Calculer son énergie sur une période. En déduire son énergie totale.

3. Calculez sa puissance moyenne.

4. Calculer les coefficients a_n et b_n de la série de Fourier du signal $s(t)$.

5. Déduire la forme complexe de la série de Fourier.

6. Tracer le spectre unilatéral et bilatéral du signal $s(t)$.



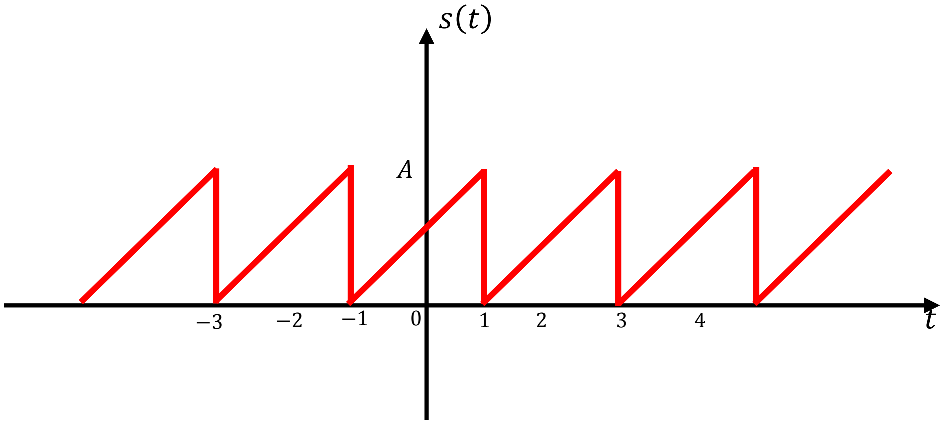
Exercice n° 2 :

Soit le signal $s(t)$ donné par la figure suivante :

1. Donner le développement en série de Fourier de $s(t)$

2. Donner le développement en série de Fourier complexe de $s(t)$

3. Tracer le spectre unilatéral et bilatéral du signal $s(t)$.



Exercice n° 3 :

On considère le signal suivant :

$$s(t) = 1 - 0.7\,cos(2\pi F_0 t) + 0.3\,sin(2\pi F_0 t) + 1.5\,sin(2\pi(2F_0)t) + 0.2\cos(2\pi(3F_0)t)$$

1. Déterminer les coefficients a_n et b_n de la décomposition en série de Fourier de ce signal.
2. Déduire la forme en cosinus de la série de Fourier.

Exercice n° 4 :

Considérant les 2 signaux suivants pour lesquels $F_0 = 1\ kHz$.

$$s_1(t) = 6 - 2\,cos(2\pi F_0 t) + 3\,sin(2\pi F_0 t)$$
$$s_2(t) = 4 + 1.8\ cos\left(2\pi F_0 t + \frac{\pi}{3}\right) + 0.8\,sin(6\pi F_0 t)$$

1. Dessinez leurs spectres d'amplitude et de phase unilatéraux et bilatéraux ;

2. Ecrivez $s_1(t)$ et $s_2(t)$ sous forme de série de Fourier complexe.

Exercice n° 5 :

Soit les signaux suivants :

$$s_1(t) = sgn(t) = \begin{cases} +1 & si\ t > 0 \\ -1 & si\ t < 0 \end{cases} \quad et \quad s_2(t) = A\,u(t)$$

1. Calculer l'énergie et la puissance de ces signaux.

2. Calculer et représenter leurs transformées de Fourier.

Exercice n° 6 :

Soit les signaux suivants :

$$s_1(t) = A\,Rect\left[\frac{\left(t - \frac{T}{2}\right)}{T}\right] = \begin{cases} A & si\ \ \left|t - \frac{T}{2}\right| < \frac{T}{2} \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

$$s_2(t) = Tri\left(\frac{t}{\left({}^{T_0}/_2\right)}\right) = \begin{cases} 1 - \left|\frac{t}{{}^{T_0}/_2}\right| & si\ \ |t| \le \frac{T_0}{2} \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

$$s_3(t) = A\,e^{-\lambda\,|t|}\ avec\ \lambda \in \mathbb{R}_+^*$$

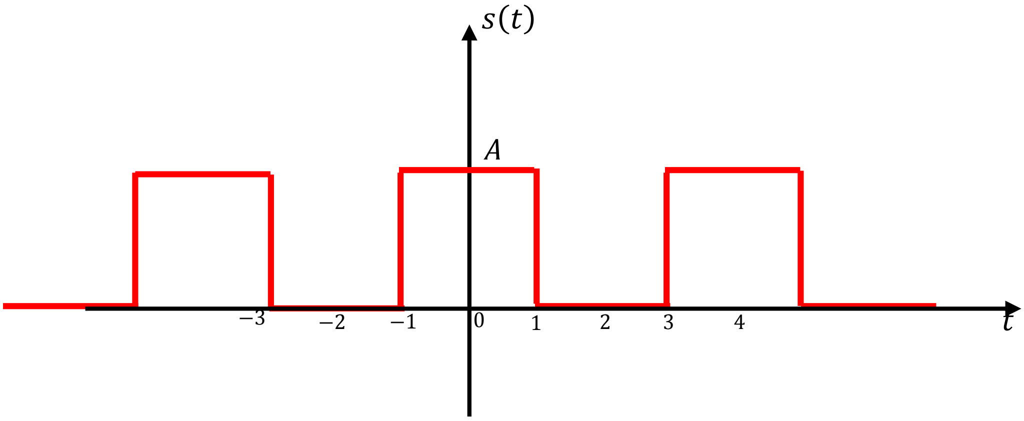
1. Représenter graphiquement ces signaux.

2. Calculer l'énergie de ces signaux.

3. Calculer et représenter la transformée de Fourier de ces signaux.

Solution du TD N° 2

Exercice n° 1 :



1. La période de ce signal est égale à $T = 4s$. La fréquence est donc $F = \frac{1}{T} = \frac{1}{4} = 0.25\ Hz$.

2. L'énergie du signal :

$$E = \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} |s(t)|^2\ dt = 2\int_{0}^{\frac{T}{2}} |s(t)|^2\ dt = 2\int_{0}^{\frac{T}{2}} \left(s(t)\right)^2\ dt$$

$$E = 2\left[\int_{0}^{\frac{T}{4}} \left(s(t)\right)^2\ dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} \left(s(t)\right)^2\ dt\right] = 2\left[\int_{0}^{\frac{T}{4}} A^2\ dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} (0)^2\ dt\right]$$

$$E = 2A^2\ t\,\Big|_{0}^{\frac{T}{4}} = 2\ A^2\ \frac{T}{4} = \frac{A^2\ T}{2}$$

Son énergie totale est égale à :

$$E = \lim_{T\to\infty} \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2\ dt = \lim_{T\to\infty} \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(x(t)\right)^2\ dt = \lim_{T\to\infty} \frac{A^2\ T}{2} = \infty$$

3. La puissance moyenne totale est identique à la puissance calculée sur une période, définie par :

$$P = \frac{1}{T} \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 \; dt$$

Comme notre signal est pair nous pouvons calculer sa puissance moyenne totale sur une moitié de période multipliée par 2

$$P = \frac{1}{T} \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 \; dt = \frac{2}{T} \int_{0}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 \; dt = \frac{2}{4} \int_{0}^{2} \left(x(t)\right)^2 \; dt$$

$$P = \frac{1}{2} \left[\int_{0}^{1} \left(x(t)\right)^2 \; dt + \int_{1}^{2} \left(x(t)\right)^2 \; dt \right] = \frac{1}{2} \left[\int_{0}^{1} A^2 \; dt + \int_{1}^{2} (0)^2 \; dt \right]$$

$$P = \frac{A^2}{2} \, t \Big|_0^1 = \frac{A^2}{2}$$

4. Décomposition en série de Fourier :

$$s(t) = \begin{cases} A & si \quad t \in [-1\,,+1] \\ 0 & si \quad t \in [1\,,3] \end{cases}$$

Ou

$$s(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t \in [-2\,,-1] \\ A & si \quad t \in [-1\,,1] \\ 0 & si \quad t \in [1\,,2] \end{cases}$$

$s(t)$ est un signal périodique et de période $T = 4s$ donc décomposable en série de Fourier :

$$s(t) = \; a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \; \cos(n\Omega t) + \; b_n \; \sin(n\Omega t)$$

Avec $\Omega = 2\pi F$ et $F = \frac{1}{T}$ et $T = 4$

$$s(t) = \; a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \; \cos(n2\pi F t) + \; b_n \; \sin(n2\pi F t)$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{(T)} s(t)\,dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{(T)} s(t)\ \cos(n2\pi Ft)\ dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{(T)} s(t)\ \sin(n2\pi Ft)\ dt$$

- $s(t)$ est pair donc ne comportent que les termes en cosinus : $b_n = 0$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{(T)} s(t)\,dt = \frac{2}{4}\int_0^{\frac{T}{2}} s(t)\,dt = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 s(t)\,dt + \int_1^2 s(t)\,dt\right]$$

$$a_0 = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 A\,dt + \int_1^2 0\,dt\right] = \frac{A}{2}\ \ t\Big|_0^1 = \frac{A}{2}$$

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} s(t)\ \cos(n2\pi Ft)\ dt$$

$$a_n = \frac{4}{4}\left[\int_0^1 s(t)\ \cos(n2\pi Ft)\ dt + \int_1^2 s(t)\ \cos(n2\pi Ft)\ dt\right]$$

$$a_n = \int_0^1 A\ \cos(n2\pi Ft)\ dt + \int_1^2 0\ \cos(n2\pi Ft)\ dt$$

$$a_n = \frac{A}{n2\pi F}\sin(n2\pi Ft)|_0^1$$

$$a_n = \frac{A}{n2\pi F}\ \sin(n2\pi Ft)|_0^1$$

$$F = \frac{1}{T} = \frac{1}{4}$$

$$a_n = \frac{4A}{n2\pi}\left[\sin\left(n2\pi\frac{1}{4}\right)\right]$$

$$a_n = \frac{2A}{n\pi}\left[\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right]\ \ pour\ n \geq 1$$

$a_n = 0\ pour\ n\ paire\ (n = 2,4, \dots)$

$Pour\ n\ impaire\ \rightarrow n = 3,5, \dots = 2k+1\ \ avec\ k = 0,1 \dots$

$$a_n = \frac{2A}{n\pi}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2A}{(2k+1)\pi}(-1)^k$$

$$pour\ k = 0 \rightarrow\ n = 1\ \rightarrow \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^k = 1$$

$$pour\ k = 1\ \rightarrow\ n = 3\ \rightarrow \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^k = -1$$

$$a_1 = \frac{2A}{\pi}\ \ ,\ \ a_3 = -\frac{2A}{3\pi}\ ,\ \ a_5 = \frac{2A}{5\pi}\ \ \ ,\ \ \ \ \cdots$$

$$s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\ \cos(n2\pi Ft)\ = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2A}{(2k+1)\pi}(-1)^k\ \ \cos((2k+1)2\pi Ft)$$

$$s(t) = a_1\ \cos(2\pi Ft) + a_2\ \cos(2\pi(2F)t)\ + a_3\ \cos(2\pi(3F)t) + a_4\ \cos(2\pi(4F)t) + a_5\ \cos(2\pi(5F)t) + \cdots$$

$$s(t) = a_1\ \cos(2\pi Ft)\ + a_3\ \cos(2\pi(3F)t) + a_5\ \cos(2\pi(5F)t) + \cdots$$

5. Décomposition $s(t)$ en série de Fourier complexe :

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(n\,F)\ e^{(j\,2\,\pi\,n\,F\,t)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_n\ e^{(j\,2\,\pi\,n\,F\,t)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(n\,F)\ e^{(j\,n\,\Omega\,t)}$$

Avec :

$$S(n\,F) = S_n = \frac{1}{T}\int_T s(t)\ e^{-(j\,2\,\pi\,n\,F\,t)}\ dt$$

$$S(n\,F) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)\ e^{-(j\,2\,\pi\,n\,F\,t)}\ dt = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} s(t)\ e^{-(j\,2\,\pi\,n\,F\,t)}\ dt$$

$$S(n\,F) = \frac{1}{4}\left[\int_{-2}^{-1} s(t)\ e^{-(j\,2\,\pi\,n\,F\,t)}\ dt + \int_{-1}^{1} s(t)\ e^{-(j\,2\,\pi\,n\,F\,t)}\ dt + \int_{1}^{2} s(t)\ e^{-(j\,2\,\pi\,n\,F\,t)}\ dt\right]$$

$$S(n\,F) = \frac{1}{4}\left[\int_{-2}^{-1} 0\ \ e^{-(j\,2\,\pi\,n\,F\,t)}\ dt + \int_{-1}^{1} A\ e^{-(j\,2\,\pi\,n\,F\,t)}\ dt + \int_{1}^{2} 0\ \ e^{-(j\,2\,\pi\,n\,F\,t)}\ dt\right]$$

$$S(n\,F) = \frac{A}{4}\left[\frac{e^{-(j\,2\,\pi\,n\,F\,t)}}{-j\,2\,\pi\,n\,F}\Big|_{-1}^{+1}\right]$$

$$S(n\,F) = \frac{A}{j\,8\,\pi\,n\,F}\left[-\left(e^{-j\,2\,\pi\,n\,F} - e^{j\,2\,\pi\,n\,F}\right)\right]$$

$$S(n\,F) = \frac{A}{j\,8\,\pi\,n\,F}\left[\,e^{j\,2\,\pi\,n\,F} - \,e^{-j\,2\,\pi\,n\,F}\,\right]$$

$$S(n\,F) = \frac{A}{j\,8\,\pi\,n\,F}\left[\,2\,j\,\sin(2\,\pi\,n\,F)\,\right]$$

$$S(n\,F) = \frac{A}{j\,8\,\pi\,n\,\frac{1}{4}}\left[2\,j\,\sin\left(2\,\pi\,n\,\frac{1}{4}\right)\right]$$

$$S(n\,F) = \frac{A}{n\,\pi}\left[\,\sin\left(n\,\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{a_n}{2}$$

$$S(n\,F) = |S(n\,F)|\,e^{j\,\varphi(n\,F)}$$

$$S(0) = a_0 = \frac{A}{2}$$

$$S(n\,F) = \frac{1}{2}\,(a_n - j\,b_n) = \frac{a_n}{2} \Rightarrow |S(n\,F)| = \frac{|a_n|}{2}$$

$$\varphi(n\,F) = arc\tan\left(\frac{-b_n}{a_n}\right) = 0$$

$S(n\,F) = \dfrac{A}{n\,\pi}\left[\,\sin\left(n\,\dfrac{\pi}{2}\right)\right]$

$S(n\,F) = 0\ pour\ n\ paire\ (n = 2,4, \dots)$

$Pour\ n\ impaire\ n = 3,5, \dots = 2k+1\ \ avec\ k = 0,1 \dots\ \ \rightarrow\ X(n\,F) \neq 0$

$$pour\ n = 1,\quad S(\,F) = \frac{A}{\pi}\left[\,\sin\left(\,\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{A}{\pi} \Rightarrow \quad |S(\,F)| = \frac{A}{\pi}$$

$$pour\ n = -1,\quad S(-F) = -\frac{A}{\pi}\left[\,\sin\left(-\,\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{A}{\pi} \Rightarrow \quad |S(-\,F)| = \frac{A}{\pi}$$

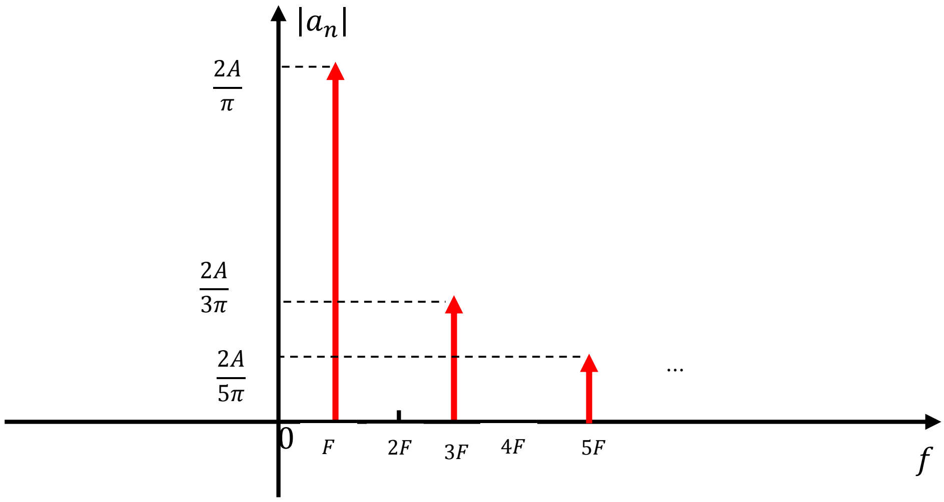
$$pour\ n = 3,\quad S(\,3F) = \frac{A}{3\,\pi}\left[\,\sin\left(\,3\,\frac{\pi}{2}\right)\right] = -\frac{A}{3\pi} \Rightarrow \quad |S(3\,F)| = \frac{A}{3\pi}$$

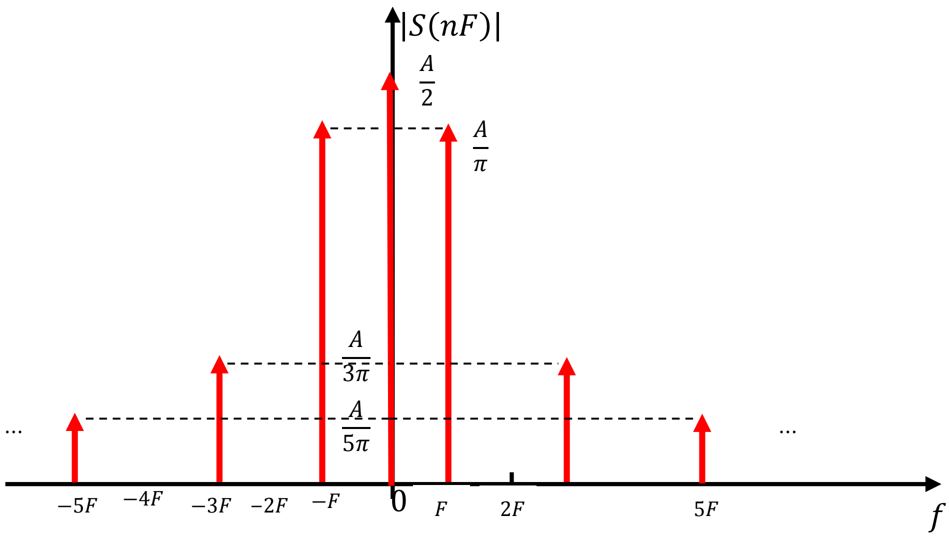
$$pour\ n = -3,\quad S(-3F) = -\frac{A}{3\pi}\left[\,\sin\left(-3\,\frac{\pi}{2}\right)\right] = -\frac{A}{3\pi} \Rightarrow \quad |S(-3\,F)| = \frac{A}{3\pi}$$

$$pour\ n = 5,\quad S(\,5F) = \frac{A}{5\,\pi}\left[\ \sin\left(5\ \frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{A}{5\pi} \Rightarrow \quad |S(5\,F)| = \frac{A}{5\pi}$$

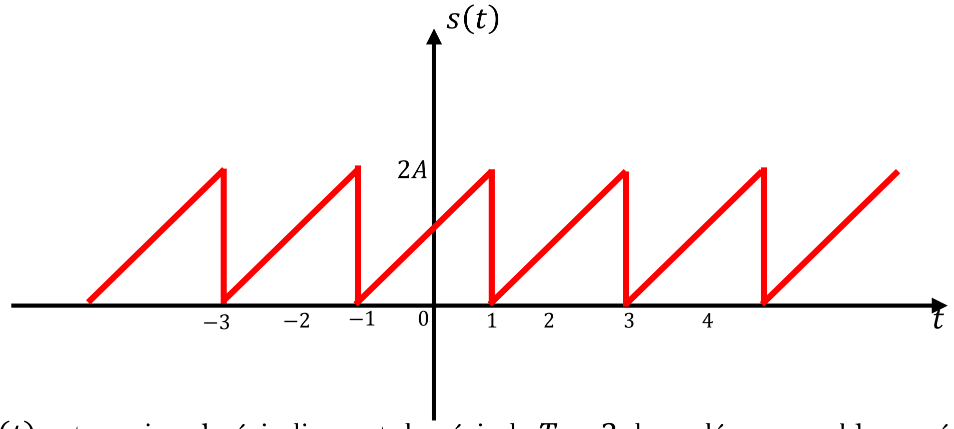
$$pour\ n = -5,\quad S(-5F) = -\frac{A}{5\pi}\left[\ \sin\left(-5\ \frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{A}{5\pi} \Rightarrow \quad |S(-5\,F)| = \frac{A}{5\pi}$$

6. Tracé du spectre unilatéral et bilatéral :





Exercice n° 2 :



$s(t)$ est un signal périodique et de période $T = 2$ donc décomposable en série de Fourier :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\Omega t) + b_n \sin(n\Omega t)$$

Avec $\Omega = 2\pi F$ et $F = \frac{1}{T}$ et $T = 2 \rightarrow F = \frac{1}{2}$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{(T)} s(t)\, dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{(T)} s(t)\, \cos(n\Omega t)\, dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{(T)} s(t)\, \sin(n\Omega t)\, dt$$

$s(t) = a\,t + b \quad si \quad t \in [-1\,,+1]$

$$a = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2A - 0}{1-(-1)} = \frac{2A}{2} = A$$

$$s(0) = b = A$$

$$s(t) = A\,t + A$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{(T)} s(t)\, dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (A\,t + A)\, dt$$

$$a_0 = \frac{A}{2}\left(\frac{t^2}{2} + t\right)\Big|_{-1}^{+1} = A$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{(T)} s(t)\, \cos(n\Omega t)\, dt = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} (A\,t + A)\cos(n\Omega t)\, dt$$

$$a_n = A\int_{-1}^{1}(\,t+1)\cos(n\Omega t)\ dt = A\int_{-1}^{1} t\cos(n\Omega t)\ dt + \int_{-1}^{1}\cos(n\Omega t)\ dt$$

$$a_n = A\int_{-1}^{1} t\cos(n\Omega t)\ dt + \int_{-1}^{1}\cos(n\Omega t)\ dt$$

Faisons une intégration par partie de $\int_{-1}^{1} t\cos(n\Omega t)\ dt$:

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$$

Posons :

$$u = t\quad et\quad dv = \cos(n\Omega t)$$

$$\rightarrow du = dt\quad et\quad v = \frac{1}{n\Omega}\sin(n\Omega t)$$

$$a_n = \left[t\ \frac{1}{n\Omega}\sin(n\Omega t)\Big|_{-1}^{1}\ - \frac{1}{n\Omega}\int_{-1}^{1}\sin(n\Omega t)\ dt\right] + \frac{1}{n\Omega}\sin(n\Omega t)\Big|_{-1}^{1}$$

$$a_n = \frac{1}{n\Omega}\left[t\ \sin(n\Omega t)|_{-1}^{1}\ - \int_{-1}^{1}\sin(n\Omega t)\ dt\right] + \frac{2}{n\Omega}\sin(n\Omega)$$

$$a_n = \frac{1}{n\Omega}\left[0 + \frac{1}{n\Omega}\cos(n\Omega t)\Big|_{-1}^{1}\right] + \frac{2}{n\Omega}\sin(n\Omega)$$

$$a_n = \frac{1}{n\Omega}[0+0] + \frac{2}{n\Omega}\sin(n\Omega) = \frac{2}{n\Omega}\sin(n\Omega)$$

$$a_n = \frac{2}{n\Omega}\sin(n2\pi F) = \frac{2}{n\Omega}\sin(n\pi) = 0$$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{(T)} s(t)\ \sin(n\Omega t)\ dt$$

$$b_n = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} s(t)\ \sin(n\Omega t)\ dt = \int_{-1}^{1}(A\,t + A)\ \sin(n\Omega t)\ dt$$

$$b_n = A\int_{-1}^{1}(t+1)\ \sin(n\Omega t)\ dt = A\int_{-1}^{1} t\ \sin(n\Omega t)\ dt + A\int_{-1}^{1}\sin(n\Omega t)\ dt$$

$$b_n = A\int_{-1}^{1} t\ \sin(n\Omega t)\ dt - \frac{2A}{n\Omega}\cos(n\Omega)$$

Faisons une intégration par partie de :

$$\int_{-1}^{1} t \; \sin(n\Omega t) \; dt$$

$$\int u \, dv = u \, v - \int v \, du$$

Posons :

$$u = t \quad et \quad dv = \sin(n\Omega t)$$

$$\rightarrow du = dt \;\; et \; v = \frac{-1}{n\Omega} \cos(n\Omega t)$$

$$b_n = \; A\left[t \; \frac{-1}{n\Omega} \cos(n\Omega t)\Big|_{-1}^{1} \quad + \frac{1}{n\Omega} \int_{-1}^{1} \cos(n\Omega t) \; dt\right] - \; \frac{2A}{n\Omega} \cos(n\Omega)$$

$\Omega = 2\pi F$ et $F = \frac{1}{T}$ et $T = 2 \rightarrow \Omega = \pi$

$$b_n = \; A\left[t \; \frac{-1}{n\pi} \cos(n\pi t)\Big|_{-1}^{1} \quad + \frac{1}{n\pi} \int_{-1}^{1} \cos(n\pi t) \; dt\right] - \; \frac{2A}{n\pi} \cos(n\pi)$$

$$b_n = \; A\left[\frac{-2}{n\pi} \cos(n\pi) \quad + \frac{1}{(n\pi)^2} \; \sin(n\pi t)|_{-1}^{1} \; \right] - \; \frac{2A}{n\pi} \cos(n\pi)$$

$$b_n = \; A\left[\frac{-2}{n\pi} \; \cos(n\pi) \; \right] - \; \frac{2A}{n\pi} \cos(n\pi) = \frac{-4A}{n\pi} \; \cos(n\pi)$$

$$b_n = \frac{-4A}{n\pi} \; (-1)^n = \frac{4A}{n\pi} \; (-1)^{n+1}$$

$$b_n = \frac{4A}{n\pi} \; (-1)^{n+1} \; \rightarrow \begin{cases} b_1 = \dfrac{4A}{\pi} \\ b_2 = \dfrac{-2A}{\pi} \\ b_3 = \dfrac{4A}{3\pi} \\ b_4 = \dfrac{-A}{\pi} \\ \vdots \end{cases}$$

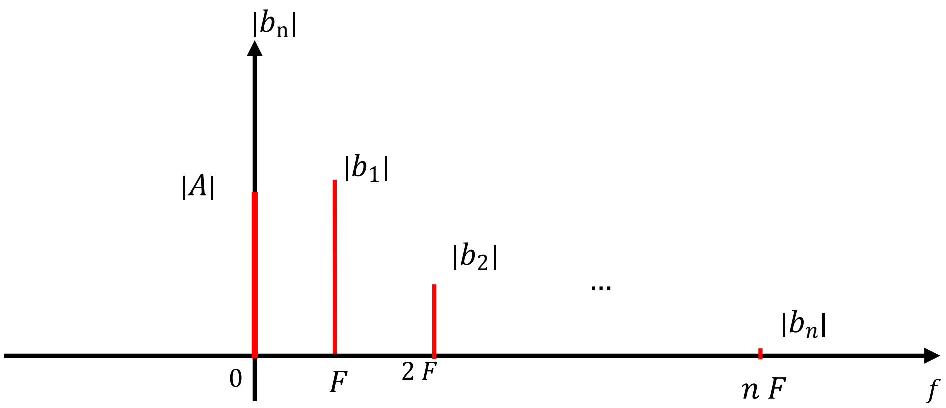
$$b_1 = \frac{4A}{\pi}\,, \quad b_2 = \frac{-2A}{\pi}, \qquad b_3 = \frac{4A}{3\pi}, \quad b_4 = \frac{-A}{\pi}$$

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \; \sin(n\Omega t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \; \sin(n2\pi F t)$$

$$s(t) = A + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4A}{n\pi} (-1)^{n+1} \sin(n2\pi Ft) = A + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4A}{n\pi} (-1)^{n+1} \sin(n\pi t)$$

$$s(t) = A + b_1 \sin(2\pi Ft) + b_2 \sin(2\pi(2F)t) + b_3 \sin(2\pi(3F)t) + \cdots$$

$$|b_n| = \frac{4A}{n\pi} \rightarrow \begin{cases} |b_1| = \dfrac{4A}{\pi} \\ |b_2| = \dfrac{2A}{\pi} \\ |b_3| = \dfrac{4A}{3\pi} \\ \vdots \end{cases}$$



Spectre du signal

Deuxième forme de la série de Fourier :

$$s(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\, 2\, \pi\, F\, t + \varphi_n)$$

C_0 composante continue.

C_n amplitude de la composante de fréquence n F.

$F = \dfrac{1}{2}$

Avec :

$$C_0 = a_0 = A$$

$$C_n = \sqrt{{a_n}^2 + {b_n}^2} \qquad et \quad \varphi_n = arc\tan\left(\frac{-b_n}{a_n}\right)$$

$$a_n = 0 \rightarrow \; C_n = \sqrt{{b_n}^2} = |b_n| = \frac{4A}{n\pi}$$

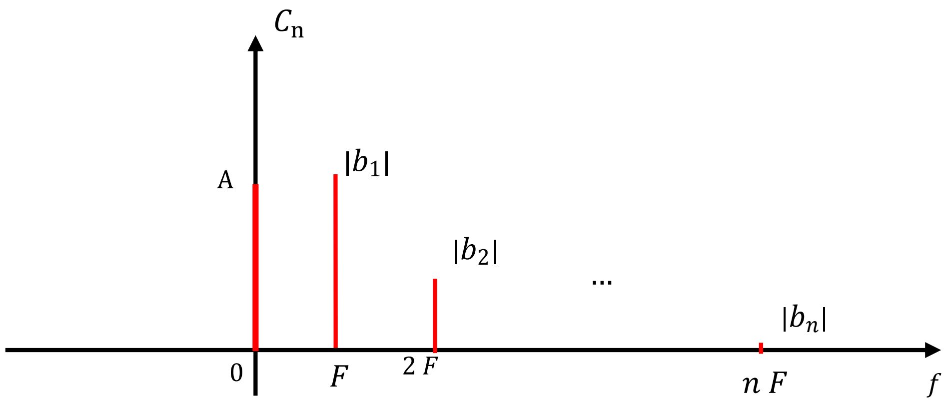
$$a_n = 0 \rightarrow \varphi_n = arc\tan\left(\frac{-b_n}{a_n}\right) = arc\tan\left(-\frac{4A}{n\pi}\,(-1)^{n+1}\frac{1}{0}\right) = arc\tan\left(\frac{4A}{n\pi}\;\frac{(-1)^n}{0}\right)$$

$$\rightarrow \varphi_n = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & si\ n\ est\ pair \\ -\dfrac{\pi}{2} & si\ n\ est\ impair \end{cases}$$

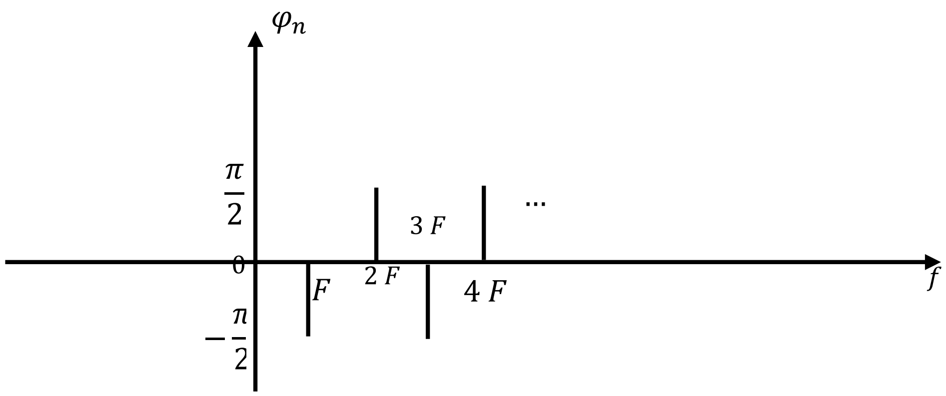
$$\rightarrow \varphi_n = (-1)^n\,\frac{\pi}{2}$$

$$s(t) = \; A + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|\;\cos(n2\,\pi\,\mathrm{F}\,t + \varphi_n) \;=\; A + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4A}{n\pi}\cos\left(n2\,\pi\,\mathrm{F}\,t + (-1)^n\,\frac{\pi}{2}\right)$$

$$s(t) = \; A + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4A}{n\pi}\cos\left(n2\,\pi\,\mathrm{F}\,t + (-1)^n\,\frac{\pi}{2}\right)$$



Spectre d'amplitude *du signal*



Spectre de phase *du signal*

Forme complexe de la série de Fourier :

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(n\,F)\, e^{(j\,2\,\pi\,n\,F\,t)} \quad T = 2\,;\; F = \frac{1}{2}$$

Avec :

$$S(n\,F) = \frac{1}{T}\int_{T} s(t)e^{-(j\,2\,\pi\,n\,F\,t)}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} (A\,t + A)\;e^{-(j\;\pi\,n\;t)}\,dt$$

$$S(n\,F) = \frac{A}{2}\int_{-1}^{+1} (t+1)\;e^{-(j\;\pi\,n\;t)}\,dt = \frac{A}{2}\left[\int_{-1}^{+1} t\;e^{-(j\;\pi\,n\;t)}\,dt + \int_{-1}^{+1} e^{-(j\;\pi\,n\;t)}\,dt\right]$$

Faisons une intégration par partie de $\int_{-1}^{+1} t\;e^{-(j\;\pi\,n\;t)}\,dt$:

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$$

Posons :

$$u = t \quad et \quad dv = e^{-(j\;\pi\,n\;t)}$$

$$\rightarrow du = dt \;\; et\; v = \frac{1}{-j\pi\,n}e^{-(j\;\pi\,n\;t)}$$

$$S(n\,F) = \frac{A}{2}\left[t\;\frac{1}{-j\pi\,n}e^{-(j\;\pi\,n\;t)}\Big|_{-1}^{1} + \frac{1}{j\pi\,n}\int_{-1}^{1} e^{-(j\;\pi\,n\;t)}\,dt \;+\; \frac{1}{-j\pi\,n}e^{-(j\;\pi\,n\;t)}\Big|_{-1}^{1}\right]$$

$$S(n\,F) = \frac{A}{2}\left[\frac{-1}{j\pi\,n}\left(e^{(j\pi n\;)} + e^{(-j\pi n\;)}\right) + \frac{1}{j\pi\,n}\,\frac{1}{-j\pi\,n}e^{-(j\pi n t)}\Big|_{-1}^{1} + \frac{1}{j\pi\,n}\left(e^{(j\pi n)} - e^{(-j\pi n)}\right)\right]$$

$$S(n\,F) = \frac{A}{2}\,\frac{1}{j\pi\,n}\left[-\left(e^{(j\pi n\;)} + e^{-(j\pi n\;)}\right) - \frac{1}{j\pi\,n}\left(e^{-(j\pi n)} - e^{(j\pi n)}\right) + \left(e^{(j\pi n)} - e^{(-j\pi n)}\right)\right]$$

$$S(n\,F) = \frac{A}{2}\,\frac{1}{j\pi\,n}\left[-\left(e^{(j\pi\,n\;)} + e^{-(j\pi n\;)}\right) + \frac{1}{j\pi\,n}\left(e^{(j\pi n)} - e^{-(j\pi n)}\right) + \left(e^{(j\pi n)} - e^{(-j\pi n)}\right)\right]$$

$$S(n\,F) = \frac{A}{2}\,\frac{1}{j\pi\,n}\left[-2e^{-(j\pi n\;)} + \frac{1}{j\pi\,n}\;(2j\;\sin(n\pi))\right]$$

$$S(n\,F) = \frac{A}{2}\,\frac{1}{j\pi\,n}\,[-2\cos(n\pi\,)] = \frac{-A}{j\pi\,n}\cos(n\pi\,) = j\;\frac{A}{\pi\,n}(-1)^n = e^{j\frac{\pi}{2}}\;\frac{A}{\pi\,n}(-1)^n$$

$$|S(n\,F)| = \left|\frac{A}{\pi\,n}\right|$$

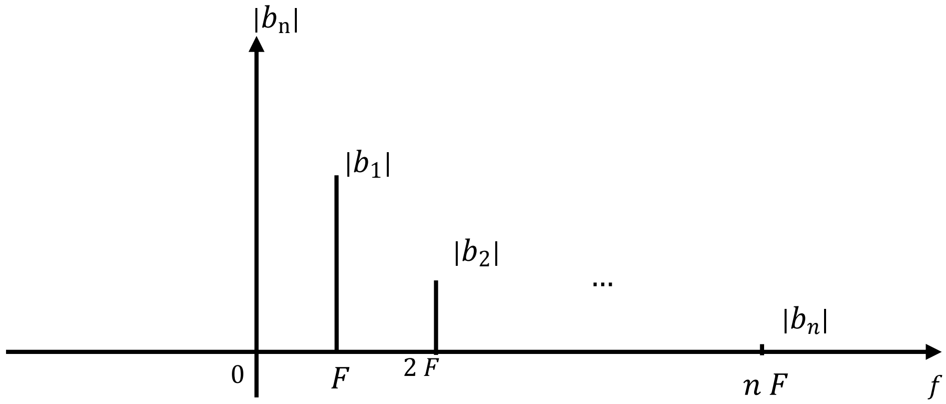
$$\rightarrow \varphi(n\,F) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & si\; n\; est\; pair \\ -\dfrac{\pi}{2} & si\; n\; est\; impair \end{cases}$$

$$\rightarrow \varphi_n = (-1)^n \, \frac{\pi}{2}$$

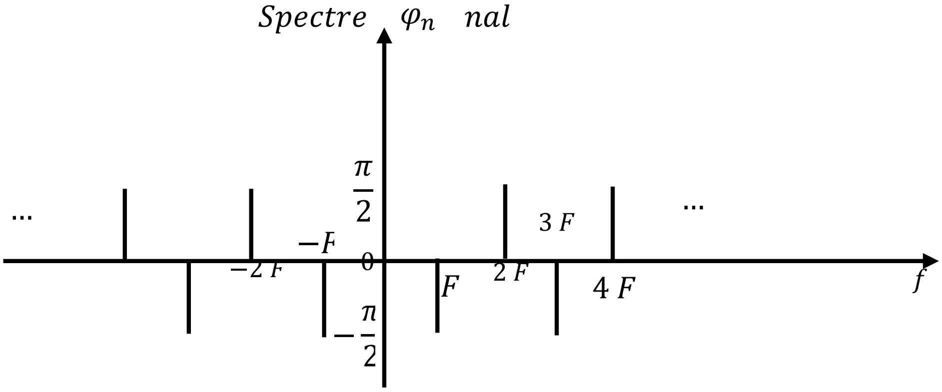
$$S(n\,F) = \frac{1}{2}\,(a_n - j\,b_n) = -j\,\frac{b_n}{2}$$

$$\varphi(n\,F) = arc\tan\left(\frac{-b_n}{a_n}\right) = arc\tan\left(\frac{-b_n}{0}\right)$$

$$|S(n\,F)| = \left|\frac{2A}{n\pi}\right| \rightarrow \begin{cases} |S(F)| = \dfrac{1}{\pi} \\ |S(-\,F)| = \dfrac{1}{\pi} \\ |S(2\,F)| = \dfrac{1}{2\pi} = \\ |S(-2\,F)| = \dfrac{1}{2\pi} \\ |S(3\,F)| = \dfrac{1}{3\pi} \\ |S(-3\,F)| = \dfrac{1}{3\pi} \\ \vdots \end{cases}$$



Spectre φ_n *nal*



Spectre de phase *du signal*

Exercice n° 3 :

$$s(t) = 1 - 0.7\, cos(2\pi F_0 t) + 0.3\, sin(2\pi F_0 t) + 1.5\, sin(2\pi (2F_0) t) + 0.2 \cos(2\pi (3F_0) t)$$

1.

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\Omega t) + b_n \sin(n\Omega t)$$

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n2\pi F_0 t) + b_n \sin(n2\pi F_0 t)$$

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi\, nF_0 t) + b_n \sin(2\pi\, nF_0 t)$$

$$s(t) = a_0 + a_1 \cos(2\pi F_0 t) + b_1 \sin(2\pi F_0 t) + a_2 \cos(2\pi 2F_0 t) + b_2 \sin(2\pi 2F_0 t) + a_3 \cos(2\pi 3F_0 t) + b_3 \sin(2\pi 3F_0 t) + \cdots$$

Par identification avec

$$s(t) = 1 - 0.7\, cos(2\pi F_0 t) + 0.3\, sin(2\pi F_0 t) + 1.5\, sin(2\pi (2F_0) t) + 0.2 \cos(2\pi (3F_0) t)$$

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = -0.7 \\ b_1 = 0.3 \\ a_2 = 0 \\ b_2 = 1.5 \\ a_3 = 0.2 \\ b_3 = 0 \end{cases}$$

Les autres coefficients sont nuls.

2. Forme cosinus de la série de Fourier :

$$s(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\, 2\, \pi\, F_0\, t + \varphi_n)$$

C_0 composante continue.

C_n amplitude de la composante de fréquence $n\, F_0$.

Avec :

$$C_0 = a_0 = 1$$

$$C_n = \sqrt{{a_n}^2 + {b_n}^2} \qquad et \qquad \varphi_n = arc \tan\left(\frac{-b_n}{a_n}\right)$$

$$\rightarrow\ C_1 = \sqrt{{a_1}^2 + \ {b_1}^2} = \sqrt{0.7^2 + \ 0.3^2} = 0.761$$

$$\rightarrow\ C_2 = \sqrt{{a_2}^2 + \ {b_2}^2} = \sqrt{0 + \ 1.5^2} = 1.5$$

$$\rightarrow\ C_3 = \sqrt{{a_3}^2 + \ {b_3}^2} = \sqrt{0.2^2 + 0} = 0.2$$

$$\begin{cases} C_0 = 1 \\ C_1 = 0.761 \\ C_2 = 1.5 \\ C_3 = 0.2 \\ C_4 = 0 \\ \vdots \\ C_n = 0 \end{cases}$$

$$\varphi_n = arc\tan\left(\frac{-b_n}{a_n}\right)$$

$$\rightarrow \varphi_1 = arc\tan\left(\frac{-b_1}{a_1}\right) = arc\tan\left(\frac{-0.3}{-0.7}\right) = arc\tan\left(\frac{3}{7}\right) = 23.198^{\circ}$$

$$\rightarrow \varphi_2 = arc\tan\left(\frac{-b_2}{a_2}\right) = arc\tan\left(\frac{-1.5}{0}\right) = -90^{\circ}$$

$$\rightarrow \varphi_3 = arc\tan\left(\frac{-b_3}{a_3}\right) = arc\tan\left(\frac{-0}{0.2}\right) = 0^{\circ}$$

Exercice n° 4 :

$$s_1(t) = 6 - 2\ cos(2\pi F_0 t) + 3\ sin(2\pi F_0 t)$$

Pour $s_1(t)$, en comparant à la relation générale du développement en série de Fourier,

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\ \cos(n\ 2\ \pi\ F_0\ t) + b_n \sin(n\ 2\ \pi\ F_0\ t)\ ]$$

$$\begin{aligned} s(t) = a_0 + a_1\ \cos(\ 2\ \pi\ F_0\ t) + b_1 \sin(\ 2\ \pi\ F_0\ t) \\ + a_2\ \cos(\ 2\ \pi\ 2\ F_0\ t) + b_2 \sin(\ 2\ \pi\ 2\ F_0\ t)\ + \cdots \end{aligned}$$

On a : $a_0 = 6$: composante continue.

Une harmonique 1 (fondamental) à $F_0 = 1\ kHz$, avec $a_1 = -2$ et $b_1 = 3$

Pour la représentation des spectres unilatéraux et bilatéraux, il faut calculer la série de Fourier en cosinus ainsi que la série de Fourier complexe. On a tout d'abord pour la série en cosinus :

$$s_1(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\, 2\pi\, F_0\, t + \varphi_n)$$

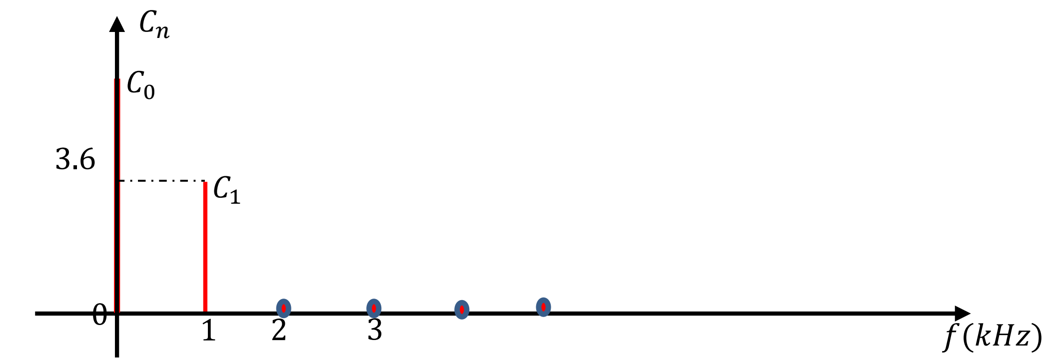
$$C_0 = a_0 = 6$$

$$C_1 = \sqrt{{a_1}^2 + {b_1}^2} = \sqrt{(-2)^2 + (3)^2} = 3.6056$$

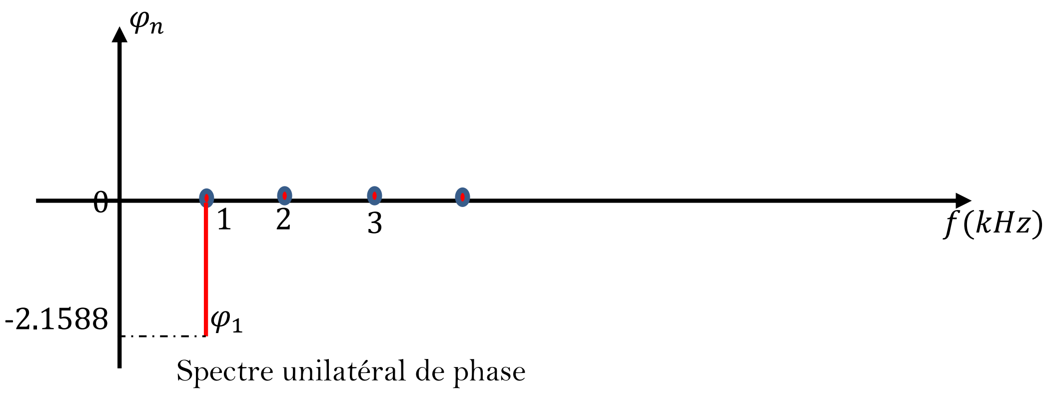
$$\varphi_1 = arc\tan\left(\frac{-b_1}{a_1}\right) = arc\tan\left(\frac{-3}{-2}\right) = -2.1588\, rd = -123.6901^{\circ}$$

On peut donc écrire :

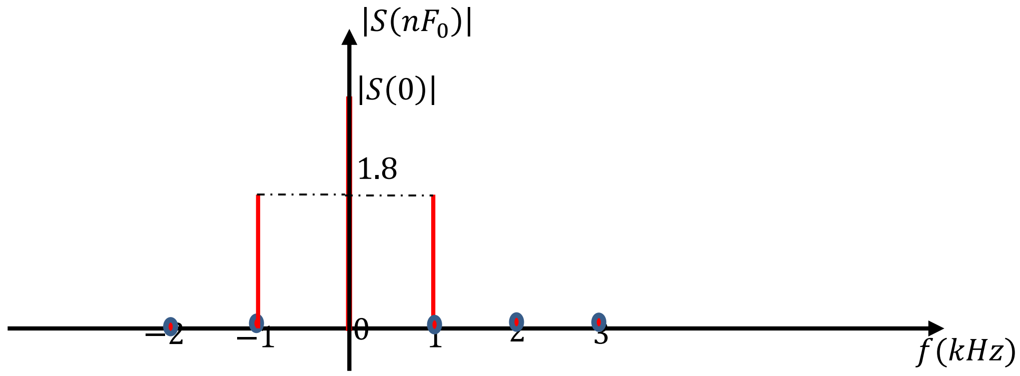
$$s_1(t) = 6 - 2\, cos(2\pi F_0 t) + 3\, sin(2\pi F_0 t)$$
$$s_1(t) = C_0 + C_1 \cos(2\pi\, F_0\, t + \varphi_1)$$
$$s_1(t) = 6 + 3.6056 \cos(2\pi\, F_0\, t + 0.9828)$$



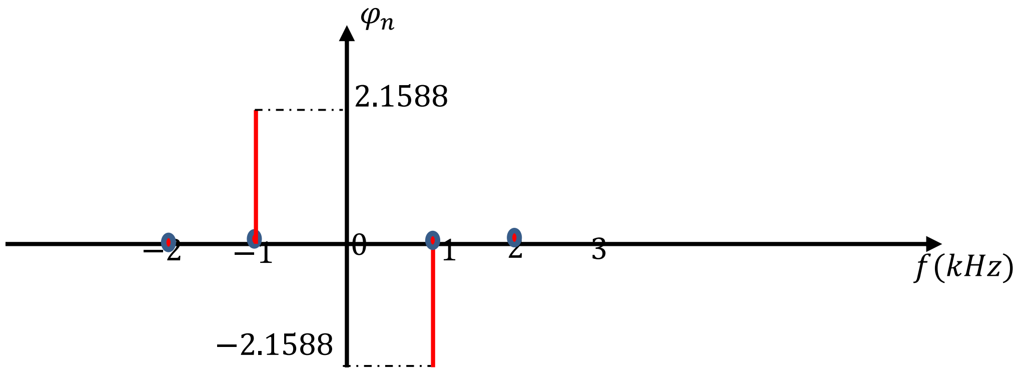
Spectre unilatéral d'amplitude



Spectre unilatéral de phase



Spectre bilatéral d'amplitude



Spectre bilatéral de phase

$$s_2(t) = 4 + 1.8 \ cos\left(2\pi F_0 t + \frac{\pi}{3}\right) + 0.8 \, sin(6\pi F_0 t)$$

Pour $s_2(t)$, on a en se référant au développement en série de Fourier :

On a : $a_0 = 4$: composante continue.

des harmoniques à $F_0 = 1 \ kHz$ et 3 $F_0 = 3 \ kHz$, avec a_1 et b_1 à calculer, $a_3 = 0$ et $b_3 = 0.8$.

Pour la représentation des spectres unilatéraux et bilatéraux, il faut calculer la série de Fourier en cosinus ainsi que la série de Fourier complexe. On a pour la série en cosinus :

$$C_0 = a_0 = 4$$

$$C_1 = 1.8 = \sqrt{{a_1}^2 + \ {b_1}^2}$$

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{3} = arc\tan\left(\frac{-b_1}{a_1}\right)$$

$$C_3 = \sqrt{{a_3}^2 + \ {b_3}^2} = \sqrt{0^2 + \ 0.8^2} = 0.8$$

$$\varphi_3 = arc\tan\left(\frac{-b_3}{a_3}\right) = arc\tan\left(\frac{-0.8}{0}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

On peut donc écrire :

$$s_2(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\, 2\,\pi\, F_0\, t + \varphi_n)$$

$$s_2(t) = C_0 + C_1 \cos(\,2\,\pi\, F_0\, t + \varphi_1) + C_3 \cos(\,2\,\pi\, 3F_0\, t + \varphi_3)$$

$$s_2(t) = 4 + 1.8\ cos\left(2\pi F_0 t + \frac{\pi}{3}\right) + 0.8\ \cos\left(\,2\,\pi\, 3F_0\, t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Dans le cas général, il aurait fallu calculer a_1 et b_1 selon les relations :

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{(T)} x(t)\ \cos(n\Omega t)\ dt \quad n \geq 0$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{(T)} x(t)\ \sin(n\Omega t)\ dt \quad n \geq 1$$

Pour $s_1(t)$:

$$s_1(t) = C_0 + C_1 \cos(\,2\,\pi\, F_0\, t + \varphi_1)$$

$$s_1(t) = C_0 + \frac{C_1}{2}\left(e^{+j(2\,\pi\, F_0\, t + \varphi_1)} + e^{-j(2\,\pi\, F_0\, t + \varphi_1)}\right)$$

$$s_1(t) = C_0 + \frac{C_1}{2}\left(e^{+j2\,\pi\, F_0\, t} e^{+j\varphi_1} + e^{-j2\,\pi\, F_0\, t} e^{-j\varphi_1}\right)$$

$$s_1(t) = C_0 + \frac{C_1}{2}\, e^{+j\varphi_1}\ e^{+j2\,\pi\, F_0\, t} + \frac{C_1}{2}\, e^{-j\varphi_1}\ e^{-j2\,\pi\, F_0\, t}$$

$$s_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(n\ F_0)\, e^{(j\,2\,\pi\, n\ F_0\, t)} = S(0) + S(F_0) e^{(j\,2\,\pi\ F_0\, t)} + S(-F_0)\, e^{(-j\,2\,\pi\ F_0\, t)}$$

$$S(0) = C_0$$

$$S(F_0) = S_1 = \frac{C_1}{2}\, e^{+j\varphi_1}$$

$$S(-F_0) = S_{-1} = \frac{C_1}{2}\, e^{-j\varphi_1}$$

$$|S(F_0)| = |S(-F_0)| = \frac{C_1}{2}$$

Pour $s_2(t)$:

$$s_2(t) = C_0 + C_1 \cos(\,2\,\pi\, F_0\, t + \varphi_1) + C_3 \cos(\,2\,\pi\, 3F_0\, t + \varphi_3)$$

$$s_2(t) = C_0 + \frac{C_1}{2}\left(e^{+j(2\,\pi\,F_0\,t+\,\varphi_1)} + e^{-j(2\,\pi\,F_0\,t+\,\varphi_1)}\right) + \frac{C_3}{2}\left(e^{+j(2\,\pi\,3F_0\,t+\,\varphi_3)} + e^{-j(2\,\pi\,3F_0\,t+\,\varphi_3)}\right)$$

$$s_2(t) = C_0 + \frac{C_1}{2}\left(e^{+j2\,\pi\,F_0\,t}\quad e^{+j\varphi_1} + e^{-j2\,\pi\,F_0\,t}\quad e^{-j\varphi_1}\right) + \frac{C_3}{2}\left(e^{+j2\,\pi\,3F_0\,t}\quad e^{+j\varphi_3} + e^{-j2\,\pi\,3F_0\,t}\quad e^{-j\varphi_3}\right)$$

$$s_2(t) = C_0 + \frac{C_1}{2}e^{+j\varphi_1}e^{+j2\,\pi\,F_0\,t} + \frac{C_1}{2}\,e^{-j\varphi_1}\,e^{-j2\,\pi\,F_0\,t} + \frac{C_3}{2}e^{+j\varphi_3}\,e^{+j2\,\pi\,3F_0\,t} + \frac{C_3}{2}\,e^{-j\varphi_3}\,e^{-j2\,\pi\,3F_0\,t}$$

$$s_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(nF_0)\,e^{(j\,2\,\pi\,n\,F_0\,t)}$$

$$s_2(t) = S(0) + S(F_0)e^{(j\,2\,\pi\,F_0\,t)} + S(-F_0)\,e^{(-j\,2\,\pi\,F_0\,t)} + S(3F_0)e^{(j\,2\,\pi\,3\,F_0\,t)} + S(-3F_0)\,e^{(-j\,2\,\pi\,3\,F_0\,t)}$$

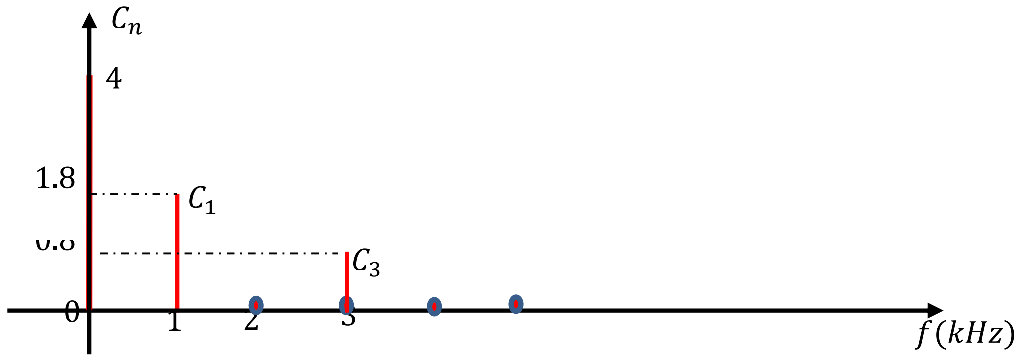
$S(0) = C_0$

$S(F_0) = \frac{C_1}{2}e^{+j\varphi_1}$

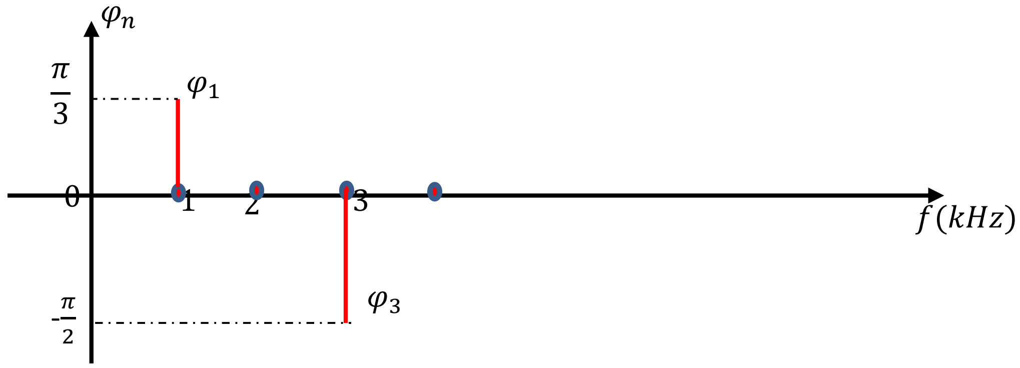
$S(-F_0) = \frac{C_1}{2}e^{-j\varphi_1}$

$S(3F_0) = \frac{C_3}{2}e^{+j\varphi_3}$

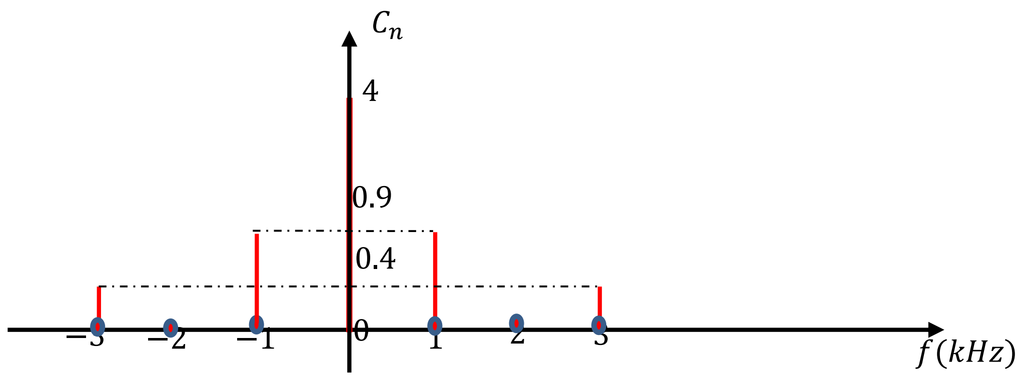
$S(-3F_0) = \frac{C_3}{2}e^{-j\varphi_3}$



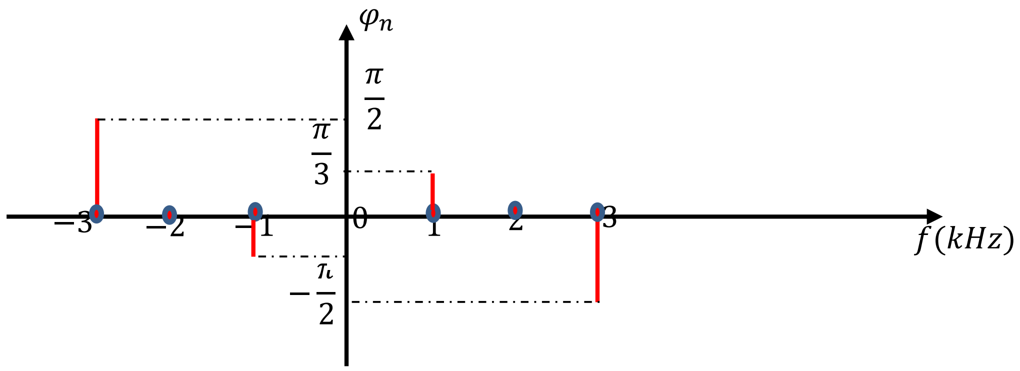
Spectre unilatéral d'amplitude



Spectre unilatéral de phase

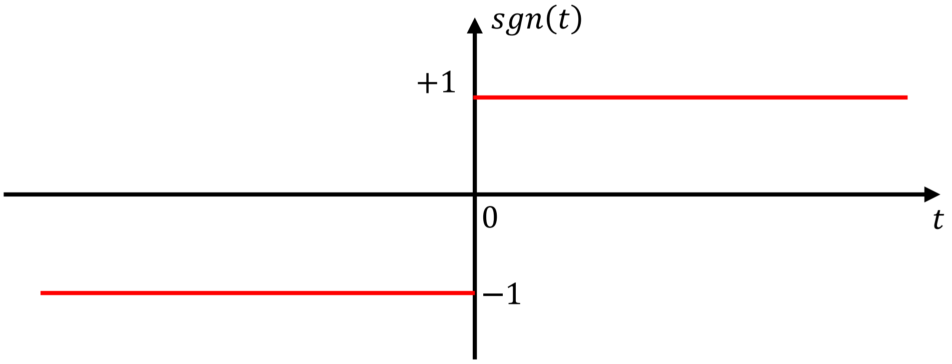


Spectre bilatéral d'amplitude



Spectre bilatéral de phase

Exercice n° 5 :



$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |s_1(t)|^2 \; dt = \int_{-\infty}^{0} |s_1(t)|^2 \; dt + \int_{0}^{+\infty} |s_1(t)|^2 \; dt$$

$$E = \int_{-\infty}^{0} |-1|^2 \; dt + \int_{0}^{+\infty} |1|^2 \; dt = t\Big|_{-\infty}^{0} + t\Big|_{0}^{+\infty} = +\infty + \infty = +\infty$$

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 \; dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left[\int_{\frac{-T}{2}}^{0} |x(t)|^2 \; dt + \int_{0}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 \; dt \right]$$

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left[\int_{\frac{-T}{2}}^{0} |-1|^2 \; dt + \int_{0}^{\frac{T}{2}} |1|^2 \; dt \right] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left[t\Big|_{\frac{-T}{2}}^{0} + t\Big|_{0}^{\frac{T}{2}} \right] = 1$$

La table des transformées de Fourier :

$$sgn(t) \xrightarrow{TF} \frac{1}{j\,\pi\,f}$$

Par calcul, sachant que :

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \xrightarrow{TF} (j\,2\,\pi\,f)^n \, X(f)$$

On peut écrire autrement le signal $s_1(t)$:

$$s_1(t) = 2\,u(t) - 1$$

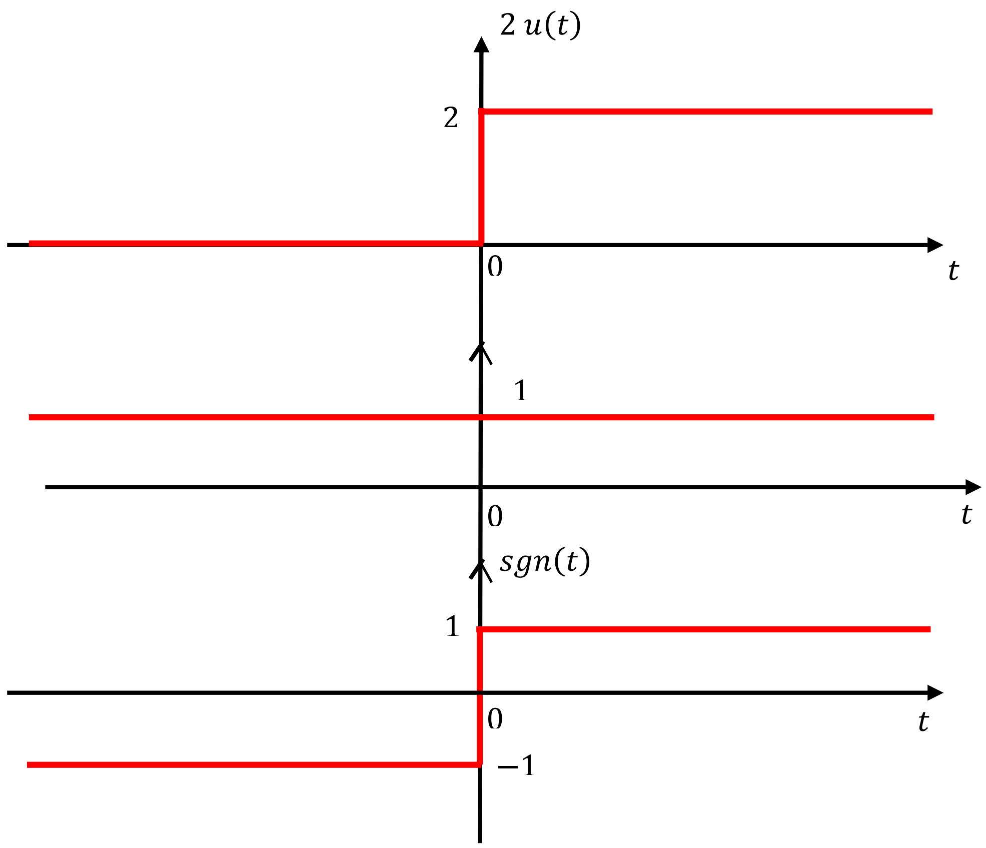
$$\frac{ds_1(t)}{dt} = 2\,\delta(t)$$

$$2\,\delta(t) \xrightarrow{TF} 2$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{TF} j\,2\,\pi\,f\,X(f)$$

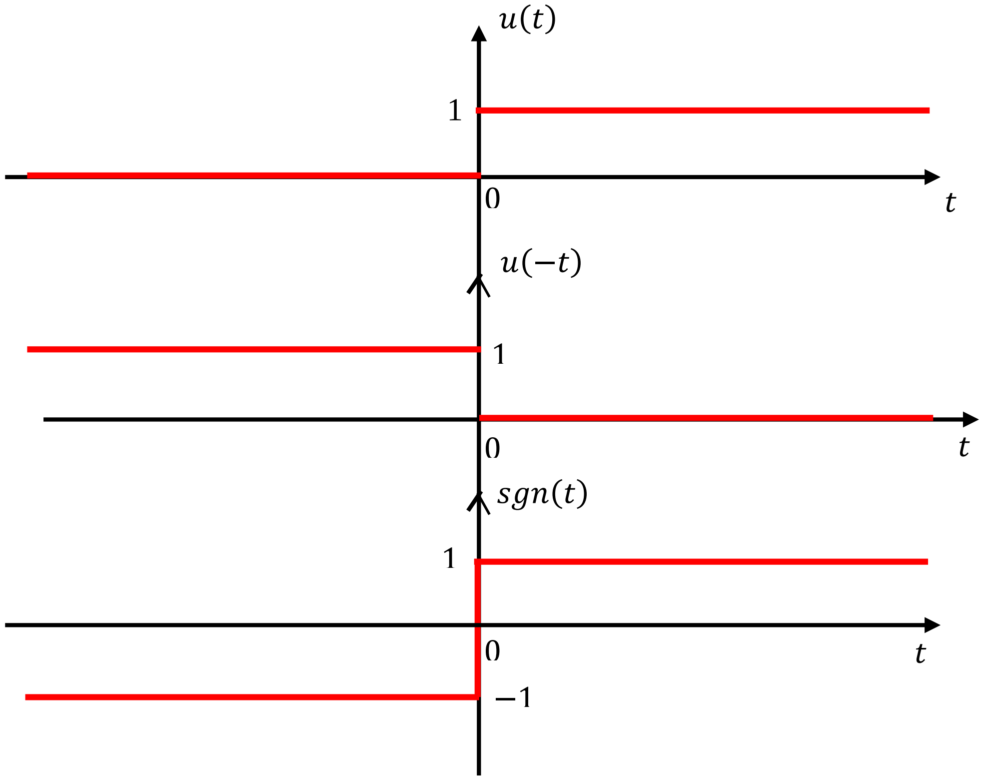
$$\frac{ds_1(t)}{dt} = 2\,\delta(t) \xrightarrow{TF} j\,2\,\pi\,f\;\;S_1(f) = 2$$

$$\Rightarrow S_1(f) = \frac{1}{j\,\pi\,f}$$



2^eme^ Méthode :

$$sgn(t) = u(t) - u(-t)$$



$$sgn(t) = u(t) - u(-t)$$

$$sgn(t) \xrightarrow{TF} TF[u(t)] - TF[u(-t)]$$

$$TF[u(t)] = \frac{1}{2}\,\delta(f) + \frac{1}{j\,2\,\pi\,f}$$

$$TF[u(-t)] = \frac{1}{2}\,\delta(-f) + \frac{1}{j\,2\,\pi(-f)}$$

$$sgn(t) \xrightarrow{TF} \frac{1}{2}\,\delta(f) + \frac{1}{j\,2\,\pi\,f} - \frac{1}{2}\,\delta(-f) - \frac{1}{j\,2\,\pi\,(-f)}$$

$$sgn(t) \xrightarrow{TF} \frac{1}{j\,\pi\,f}$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{(-j\, 2\, \pi\, f\, t)}\, dt$$

$\boldsymbol{s_2(t) = u(t)}$

Le signal $u(t)$ est défini comme suit :

$$u(t) = \begin{cases} 1 & si\ t \geq 0 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |s_2(t)|^2\ dt = \int_{-\infty}^{0} |s_2(t)|^2\ dt + \int_{0}^{+\infty} |s_2(t)|^2\ dt$$

$$E = \int_{0}^{+\infty} dt = t \Big|_0^{+\infty} = +\infty$$

$$P = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2\ dt = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{0}^{\frac{T}{2}} 1\ dt = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T}\ t \Big|_0^{+\frac{T}{2}} = \frac{1}{2}$$

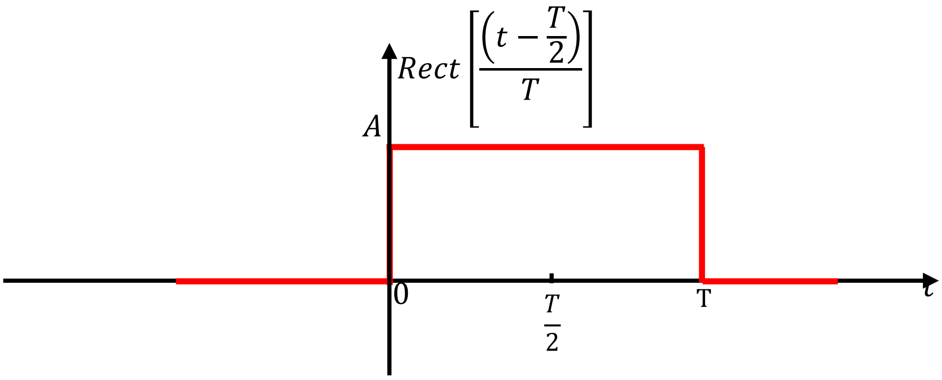
Il est évident que cette fonction n'est pas absolument intégrable. Sa transformée de Fourier ne peut être obtenue d'une manière usuelle. Elle peut être approchée par la nouvelle fonction :

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ sgn(t)$$

$$U(f) = \frac{1}{2}\ \delta(f) + \frac{1}{j\, 2\, \pi\, f}$$

Exercice n° 6 :

$$s_1(t) = A\ Rect\left[\frac{\left(t - \frac{T}{2}\right)}{T}\right] = \begin{cases} A & si\ \left|t - \frac{T}{2}\right| < \frac{T}{2} \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$



$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |s_1(t)|^2 \ dt = \int_{-\infty}^{0} |s_1(t)|^2 \ dt + \int_{0}^{T} |s_1(t)|^2 \ dt + \int_{T}^{+\infty} |s_1(t)|^2 \ dt = \int_{0}^{T} A^2 \, dt$$

$E = A^2 t|_0^T = A^2 T$

$$\mathrm{S_1(f)} = \mathrm{TF}\big(s_1(t)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) \ e^{(-j\,2\,\pi\,f\,t)}\,dt \ = \int_0^{\mathrm{T}} A\,e^{(-j\,2\,\pi\,f\,t)}\,dt$$

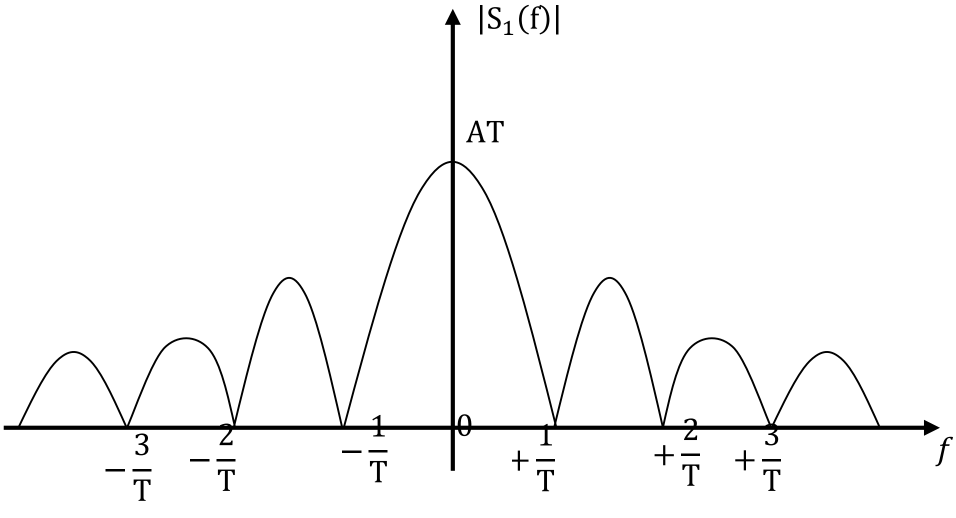
$$\mathrm{S_1(f)} = \frac{A}{-j\,2\,\pi\,f} e^{(-j\,2\,\pi\,f\,t)}\Big|_0^T$$

$$\mathrm{S_1(f)} = \mathrm{A}\ \frac{e^{(-j\,2\,\pi\,f\,0)} - e^{(-j\,2\pi\,f\,\mathrm{T})}}{j\,2\,\pi\,f} = \mathrm{A}\,e^{-j\,2\pi\,f\,\frac{T}{2}} \ \frac{e^{j\ 2\pi\,f\,\frac{T}{2}} - e^{-j\,2\pi\,f\,\frac{T}{2}}}{j\,2\,\pi\,f}$$

$$\mathrm{S_1(f)} = \mathrm{A}\,e^{\left(-j\,2\,\pi\,f\,\frac{T}{2}\right)}\,\frac{2\mathrm{j}\sin(\pi\,f\,\mathrm{T})}{j2\pi\,f} = \mathrm{A}\,e^{\left(-j\,2\,\pi\,f\,\frac{T}{2}\right)}\,T\,\frac{\sin(\pi\,f\,\mathrm{T})}{\pi\,f\,T}$$

$$\mathrm{S_1(f)} = A\,e^{\left(-j\,2\,\pi\,f\,\frac{T}{2}\right)}\,\mathrm{T}\,\mathrm{sinc}(f\ \mathrm{T}) = A\,\mathrm{T}\,e^{(-j\ \pi\,f\,\mathrm{T})}\ \mathrm{sinc}(f\ \mathrm{T})$$

$$|\mathrm{S_1(f)}| = \mathrm{A\,T}\,|\mathrm{sinc}(f\ \mathrm{T})|$$



Le spectre d'amplitude d'un signal réel est pair.

$$s_2(t) = A\,Tri\left(\frac{t}{\left(T_0/_2\right)}\right) = \begin{cases} A\left[1 - \left|\frac{t}{T_0/_2}\right|\right] & si \quad |t| \leq \frac{T_0}{2} \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

$$si \quad |t| \leq \frac{T_0}{2} \;\Rightarrow\; s_2(t) = A\left[1 - \left|\frac{t}{T_0/_2}\right|\right]$$

$$\Rightarrow si \quad -\frac{T_0}{2} \leq t \leq \frac{T_0}{2} \;\Rightarrow\; s_2(t) = A\left[1 - \left|\frac{t}{T_0/_2}\right|\right]$$

$$\Rightarrow si \quad 0 \leq t \leq \frac{T_0}{2} \;\Rightarrow\; s_2(t) = A\left[1 - \frac{t}{T_0/_2}\right] = A\left[1 - \frac{2}{T_0}t\right]$$

$$\Rightarrow si \quad t = 0 \Rightarrow \quad s_2(t) = A$$

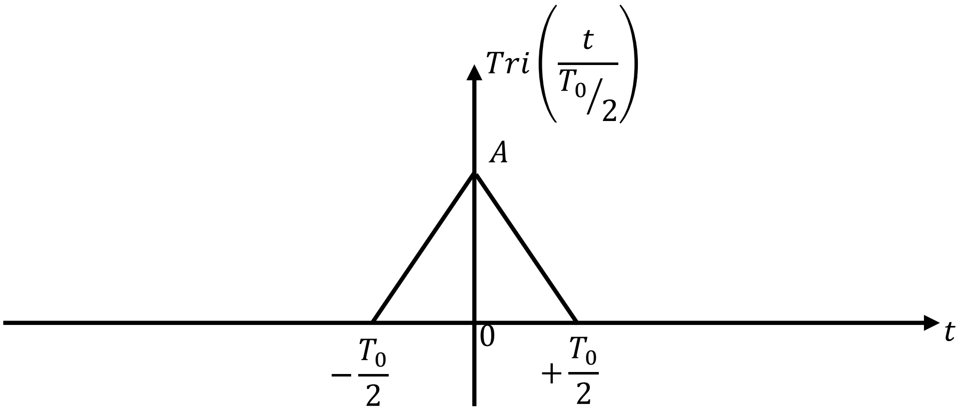
$$\Rightarrow si \quad t = \frac{T_0}{4} \Rightarrow \quad s_2(t) = A\left[1 - \frac{2}{T_0}\frac{T_0}{4}\right] = \frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow si \quad t = \frac{T_0}{2} \Rightarrow \quad s_2(t) = A\left[1 - \frac{2}{T_0}\frac{T_0}{2}\right] = 0$$

$$\Rightarrow si \quad -\frac{T_0}{2} \leq t < 0 \;\Rightarrow\; s_2(t) = A\left[1 + \frac{t}{T_0/_2}\right] = A\left[1 + \frac{2}{T_0}t\right]$$

$$\Rightarrow si \quad t = -\frac{T_0}{4} \Rightarrow \quad s_2(t) = A\left[1 - \frac{2}{T_0}\frac{T_0}{4}\right] = \frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow si \quad t = -\frac{T_0}{2} \Rightarrow \quad s_2(t) = A\left[1 - \frac{2}{T_0}\frac{T_0}{2}\right] = 0$$



$$E=\int_{-\infty}^{+\infty}|s_2(t)|^2\ dt=\int_{-\infty}^{-\frac{T_0}{2}}|s_2(t)|^2\ dt+\int_{-\frac{T_0}{2}}^{0}|s_2(t)|^2\ dt+\int_{0}^{\frac{T_0}{2}}|s_2(t)|^2\ dt+\int_{\frac{T_0}{2}}^{+\infty}|s_2(t)|^2\ dt$$

$$E=\int_{-\frac{T_0}{2}}^{0}|s_2(t)|^2\ dt+\int_{0}^{\frac{T_0}{2}}|s_2(t)|^2\ dt$$

$$s_2(t):signal\ réel$$

$$E=\int_{-\frac{T_0}{2}}^{0}\left(s_2(t)\right)^2\ dt+\int_{0}^{\frac{T_0}{2}}\left(s_2(t)\right)^2\ dt=\int_{-\frac{T_0}{2}}^{0}\left(A\left[1+\frac{2}{T_0}t\right]\right)^2\ dt+\int_{0}^{\frac{T_0}{2}}\left(A\left[1-\frac{2}{T_0}t\right]\right)^2\ dt$$

$$E=A^2\int_{-\frac{T_0}{2}}^{0}\left(\left[1+\frac{2}{T_0}t\right]\right)^2\ dt+A^2\int_{0}^{\frac{T_0}{2}}\left(\left[1-\frac{2}{T_0}t\right]\right)^2\ dt$$

$$E=A^2\int_{-\frac{T_0}{2}}^{0}\left(1+\left(\frac{2}{T_0}\right)^2t^2+\frac{4}{T_0}t\right)\ dt+A^2\int_{0}^{\frac{T_0}{2}}\left(1+\left(\frac{2}{T_0}\right)^2t^2-\frac{4}{T_0}t\right)\ dt$$

$$E=A^2\left[t\Big|_{-\frac{T_0}{2}}^{0}+\left(\frac{2}{T_0}\right)^2\ \frac{t^3}{3}\Big|_{-\frac{T_0}{2}}^{0}+\frac{4}{T_0}\ \frac{t^2}{2}\Big|_{-\frac{T_0}{2}}^{0}\right]+A^2\left[t\Big|_{0}^{\frac{T_0}{2}}+\left(\frac{2}{T_0}\right)^2\frac{t^3}{3}\Big|_{0}^{\frac{T_0}{2}}-\frac{4}{T_0}\ \frac{t^2}{2}\Big|_{0}^{\frac{T_0}{2}}\right]$$

$$E=A^2\left[\frac{T_0}{2}-\left(\frac{2}{T_0}\right)^2\ \frac{1}{3}\left(\frac{T_0}{2}\right)^3+\frac{4}{T_0}\ \frac{1}{2}\left(\frac{T_0}{2}\right)^2\right]+A^2\left[\frac{T_0}{2}+\left(\frac{2}{T_0}\right)^2\ \frac{1}{3}\left(\frac{T_0}{2}\right)^3-\frac{4}{T_0}\ \frac{1}{2}\left(\frac{T_0}{2}\right)^2\right]$$

$$E=A^2\left[\frac{T_0}{2}-\frac{1}{3}\ \frac{T_0}{2}+\frac{T_0}{2}\right]+A^2\left[\frac{T_0}{2}+\frac{1}{3}\ \frac{T_0}{2}-\frac{T_0}{2}\right]$$

$$E=A^2\left[T_0-\frac{1}{3}\ \frac{T_0}{2}\right]+A^2\left[\frac{1}{3}\ \frac{T_0}{2}\right]=A^2\,T_0$$

$$S_2(f)=\mathrm{TF}\big(s_2(t)\big)=\int_{-\infty}^{+\infty}s_2(t)\ e^{(-j\,2\,\pi\,f\,t)}\,dt$$

$$S_2(f)=\int_{-\frac{T_0}{2}}^{0}A\left[1+\frac{2}{T_0}t\right]\ e^{(-j\,2\,\pi\,f\,t)}\,dt\ +\int_{0}^{+\frac{T_0}{2}}A\left[1-\frac{2}{T_0}t\right]\ e^{(-j\,2\,\pi\,f\,t)}\,dt$$

$$S_2(f) = \mathrm{A}\left[\frac{e^{(-j\,2\,\pi\,f\,t)}}{-j\,2\,\pi\,f}\right]_{-\frac{T_0}{2}}^{0} + A\,\frac{2}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{0} t\;e^{(-j\,2\,\pi\,f\,t)}\,dt\; + A\left[\frac{e^{(-j\,2\,\pi\,f\,t)}}{-j\,2\,\pi\,f}\right]_{0}^{\frac{T_0}{2}}$$
$$- A\,\frac{2}{T_0}\int_{0}^{+\frac{T_0}{2}} t\;e^{(-j\,2\,\pi\,f\,t)}\,dt$$

$$S_2(f) = \mathrm{A}\,\frac{e^{(j\,\pi\,f\,T_0)}-1}{j\,2\,\pi\,f} + A\,\frac{2}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{0} t\;e^{(-j\,2\,\pi\,f\,t)}\,dt\; + A\,\frac{1-e^{(-j\,\pi\,f\,T_0)}}{j\,2\,\pi\,f}$$
$$- A\,\frac{2}{T_0}\int_{0}^{+\frac{T_0}{2}} t\;e^{(-j\,2\,\pi\,f\,t)}\,dt$$

$$S_2(f) = \mathrm{A}\left[\frac{e^{(j\,\pi\,f\,T_0)}}{j\,2\,\pi\,f} - \frac{e^{(-j\,\pi\,f\,T_0)}}{j\,2\,\pi\,f}\right] + A\,\frac{2}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{0} t\;e^{(-j\,2\,\pi\,f\,t)}\,dt$$
$$- A\,\frac{2}{T_0}\int_{0}^{+\frac{T_0}{2}} t\;e^{(-j\,2\,\pi\,f\,t)}\,dt$$

Faisons une intégration par partie : pour le premier intégral

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$$

Posons :

$$u = t \quad et \quad dv = e^{(-j\,2\,\pi\,f\,t)}\,dt$$

$$\rightarrow du = dt \;\; et\; v = \frac{1}{-j\,2\,\pi\,f}e^{(-j\,2\,\pi\,f\,t)}$$

$$\int_{-\frac{T_0}{2}}^{0} t\;e^{(-j\,2\,\pi\,f\,t)}\,dt \;= \frac{1}{-j\,2\,\pi\,f}\left[t\,e^{(-j\,2\,\pi\,f\,t)}\right]_{-\frac{T_0}{2}}^{0} + \int_{-\frac{T_0}{2}}^{0}\frac{1}{j\,2\,\pi\,f}e^{(-j\,2\,\pi\,f\,t)}\,dt$$
$$= \frac{1}{-j\,2\,\pi\,f}\;\frac{T_0}{2}\;e^{(j\,\pi\,f\,T_0)} - \frac{1}{j\,2\,\pi\,f}\;\;\frac{1}{j\,2\,\pi\,f}\;\left[\,e^{(-j\,2\,\pi\,f\,t)}\right]_{-\frac{T_0}{2}}^{0}$$
$$= \;\frac{T_0}{2}\,\frac{1}{-j\,2\,\pi\,f}\;\;e^{(j\;\pi\,f\,T_0)} - \frac{1}{(j\,2\,\pi\,f)^2}\quad\left(1-e^{(j\,\pi\,f\,T_0)}\right)$$

Faisons une intégration par partie : pour le deuxième intégral

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$$

Posons :

$$u = t \quad et \quad dv = e^{(-j\,2\,\pi\,f\,t)}\,dt$$

$$\rightarrow du = dt \;\; et\; v = \frac{1}{-j\,2\,\pi\,f} e^{(-j\,2\,\pi\,f\,t)}$$

$$\int_0^{\frac{T_0}{2}} t\;e^{(-j\,2\,\pi\,f\,t)}\,dt \;= \frac{1}{-j\,2\,\pi\,f}\left[t\,e^{(-j\,2\,\pi\,f\,t)}\right]_0^{\frac{T_0}{2}} + \int_0^{\frac{T_0}{2}} \frac{1}{j\,2\,\pi\,f} e^{(-j\,2\,\pi\,f\,t)}\,dt$$

$$= \frac{1}{-j\,2\,\pi\,f}\,\frac{T_0}{2} e^{(-j\;\pi\,f\,T_0)} - \frac{1}{j\,2\,\pi\,f}\quad\frac{1}{j\,2\,\pi\,f}\;\left[e^{(-j\,2\,\pi\,f\,t)}\right]_0^{\frac{T_0}{2}}$$

$$= \frac{T_0}{2}\,\frac{1}{-j\,2\,\pi\,f}\;\; e^{(-j\,\pi\,f\,T_0)} + \frac{1}{(j\,2\,\pi\,f)^2}\quad\left(1 - e^{(-j\;\pi\,f\,T_0)}\right)$$

$$S_2(f) = \mathrm{A}\left[\frac{e^{(j\;\pi\,f\,T_0)}}{j\,2\,\pi\,f} - \frac{e^{(-j\;\pi\,f\,T_0)}}{j\,2\,\pi\,f}\right]$$

$$+ A\,\frac{2}{T_0}\left[\frac{T_0}{2}\,\frac{1}{-j\,2\,\pi\,f}\;\; e^{(j\;\pi\,f\,T_0)} - \frac{1}{(j\,2\,\pi\,f)^2}\quad\left(1 - e^{(j\,\pi\,f\,T_0)}\right)\right]$$

$$- A\,\frac{2}{T_0}\left[\frac{T_0}{2}\,\frac{1}{-j\,2\,\pi\,f}\;\; e^{(-j\,\pi\,f\,T_0)} + \frac{1}{(j\,2\,\pi\,f)^2}\quad\left(1 - e^{(-j\;\pi\,f\,T_0)}\right)\right]$$

$$S_2(f) = \mathrm{A}\left[\frac{e^{(j\,\pi\,f\,T_0)}}{j\,2\,\pi\,f} - \frac{e^{(-j\,\pi\,f\,T_0)}}{j\,2\,\pi\,f}\right] - A\,\frac{e^{(j\,\pi\,f\;T_0)}}{j\,2\,\pi\,f} - A\,\frac{2}{T_0}\,\frac{1}{(j\,2\,\pi\,f)^2}\quad\left(1 - e^{(j\,\pi\,f\,T_0)}\right)$$

$$+ A\,\frac{e^{(-j\,\pi\,f\,T_0\;)}}{j\,2\,\pi\,f} - A\,\frac{2}{T_0}\,\frac{1}{(j\,2\,\pi\,f)^2}\quad\left(1 - e^{(-j\,\pi\,f\,T_0)}\right)$$

$$S_2(f) = -A\,\frac{2}{T_0}\,\frac{1}{(j\,2\,\pi\,f)^2}\quad\left(1 - e^{(j\,\pi\,f\,T_0)}\right) - A\,\frac{2}{T_0}\,\frac{1}{(j\,2\,\pi\,f)^2}\quad\left(1 - e^{(-j\;\pi\,f\,T_0)}\right)$$

$$S_2(f) = -A\,\frac{2}{T_0}\,\frac{1}{(j\,2\,\pi\,f)^2}\quad\left[\,1 - e^{(j\;\pi\,f\;T_0)} + \;1 - e^{(-j\,\pi\,f\,T_0)}\right]$$

$$S_2(f) = -A\,\frac{2}{T_0}\,\frac{1}{(j\,2\,\pi\,f)^2}\quad\left[\,2 - \left(e^{(j\;\pi\,f\;T_0)} + e^{(-j\,\pi\,f\,T_0)}\right)\right]$$

$$S_2(f) = -A\,\frac{2}{T_0}\,\frac{1}{(j\,2\,\pi\,f)^2}\quad\left[\,2 - 2\;\cos(\pi\,f\,T_0)\right]$$

$$S_2(f) = A\,\frac{1}{T_0}\,\frac{1}{(\pi\,f)^2}\quad\left[\,1 - \cos(\pi\,f\,T_0)\right]$$

$$S_2(f) = A\ \frac{2}{T_0}\ \frac{1}{(\pi\, f)^2}\quad \sin^2\left(\pi\, f\ \frac{T_0}{2}\right)$$

$$S_2(f) = A\ \frac{2}{T_0}\ \frac{\sin^2\left(\pi\, f\ \frac{T_0}{2}\right)}{(\pi\, f)^2}$$

$$S_2(f) = A\ \frac{2}{T_0}\ \frac{1}{\left(\frac{2}{T_0}\right)^2}\left(\frac{\sin\left(\pi\, f\ \frac{T_0}{2}\right)}{\pi\, f\ \frac{T_0}{2}}\right)^2$$

$$S_2(f) = A\ \frac{T_0}{2}\left(\frac{\sin\left(\pi\, f\ \frac{T_0}{2}\right)}{\pi\, f\ \frac{T_0}{2}}\right)^2$$

$$S_2(f) = A\ \frac{T_0}{2}\ \mathrm{sinc}^2\left(f\,\frac{T_0}{2}\right)$$

Remarque :

Il y a deux définitions de la fonction $\mathrm{sinc}(x)$

$$\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi\, x)}{\pi\, x}$$

$$\mathrm{sinc}(\pi x) = \frac{\sin(\pi\, x)}{\pi\, x}$$

Signal réel pair :

$$S_r(f) = 2\int_0^{+\infty} x(t)\ \cos(\,2\,\pi\, f\, t)\ dt$$

$S_i(f) = 0$ car $x(t)\ \sin(\,2\,\pi\, f\, t)$ est impaire.

$$S_r(f) = 2\int_0^{+\infty} x(t)\ \cos(\,2\,\pi\, f\, t)\ dt = 2\int_0^{\frac{T_0}{2}} A\left[1-\frac{2}{T_0}t\right]\ \cos(\,2\,\pi\, f\, t)\ dt$$

$$S_r(f) = 2A\left[\int_0^{\frac{T_0}{2}}\cos(\,2\,\pi\, f\, t)\ dt - \frac{2}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} t\ \cos(\,2\,\pi\, f\, t)\ dt\right]$$

$$S_r(f) = 2A\left[\left[\frac{\sin(\,2\pi\, f\, t)}{2\,\pi\, f}\right]_0^{\frac{T_0}{2}} - \frac{2}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} t\ \cos(\,2\,\pi\, f\, t)\ dt\right]$$

$$S_r(f) = 2A\ \left[\frac{\sin(\,\pi\, fT_0\,)}{2\pi\, f} - \frac{2}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} t\cos(\,2\,\pi\, f\, t)\ dt\right]$$

Faisons une intégration par partie :

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$$

Posons :

$$u = t \quad et \quad dv = \cos(\,2\,\pi\,f\,t)\;dt$$

$$\rightarrow du = dt \;\; et\; v = \frac{\sin(\,2\pi\,f\,t)}{2\,\pi\,f}$$

$$\int_0^{\frac{T_0}{2}} t\cos(\,2\,\pi\,f\,t)\;dt = \left[t\;\frac{\sin(\,2\pi\,f\,t)}{2\,\pi\,f}\right]_0^{\frac{T_0}{2}} - \int_0^{\frac{T_0}{2}} \frac{\sin(\,2\pi\,f\,t)}{2\,\pi\,f}\;dt$$

$$= \frac{T_0}{2}\,\frac{\sin(\,\pi\,f\,T_0\,)}{2\,\pi\,f} + \frac{1}{2\,\pi\,f}\left[\frac{\cos(\,2\pi\,f\,t)}{2\,\pi\,f}\right]_0^{\frac{T_0}{2}}$$

$$= \frac{T_0}{2}\,\frac{\sin(\,\pi\,f\,T_0\,)}{2\,\pi\,f} + \frac{1}{(2\,\pi\,f)^2}\;(\cos(\pi\,f\,T_0) - 1)$$

$$S_r(f) = 2A\left[\frac{\sin(\,\pi\,fT_0\,)}{2\pi\,f} - \frac{2}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} t\cos(\,2\,\pi\,f\,t)\;dt\right]$$

$$S_r(f) = 2A\left[\frac{\sin(\,\pi\,fT_0\,)}{2\,\pi\,f} - \frac{2}{T_0}\left[\frac{T_0}{2}\,\frac{\sin(\,\pi\,f\,T_0\,)}{2\,\pi\,f} + \frac{1}{(2\,\pi\,f)^2}\;(\cos(\pi\,f\,T_0) - 1)\right]\right]$$

$$S_r(f) = 2A\left[\frac{\sin(\,\pi\,fT_0\,)}{2\,\pi\,f} - \frac{\sin(\,\pi\,f\,T_0\,)}{2\,\pi\,f} - \frac{2}{T_0}\frac{1}{(2\,\pi\,f)^2}\;(\cos(\pi\,f\,T_0) - 1)\right]$$

$$S_r(f) = -\frac{4A}{T_0}\frac{1}{(2\,\pi\,f)^2}\;(\cos(\pi\,f\,T_0) - 1) = \frac{4A}{T_0}\frac{1}{(2\,\pi\,f)^2}\;(1 - \cos(\pi\,f\,T_0))$$

$$S_r(f) = \frac{4A}{T_0}\frac{1}{(2\,\pi\,f)^2}\left(1 - \cos\left(2\,\pi\,f\,\frac{T_0}{2}\right)\right) = \frac{4A}{T_0}\frac{1}{(2\,\pi\,f)^2}\;\;2\;\sin^2\left(\pi\,f\,\frac{T_0}{2}\right)$$

$$S_r(f) = \frac{2A}{T_0}\frac{\left(\frac{T_0}{2}\right)^2}{\left(\pi\,f\,\frac{T_0}{2}\right)^2}\;\;\sin^2\left(\pi\,f\,\frac{T_0}{2}\right) = \frac{2A}{T_0}\left(\frac{T_0}{2}\right)^2\;\;\frac{\sin^2\left(\pi\,f\,\frac{T_0}{2}\right)}{\left(\pi\,f\,\frac{T_0}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{A\,T_0}{2}\left(\frac{\sin\left(\pi\,f\,\frac{T_0}{2}\right)}{\pi\,f\,\frac{T_0}{2}}\right)^2$$

$$\sin^2(x) = \frac{(1 - \cos(\,2x\,))}{2}$$

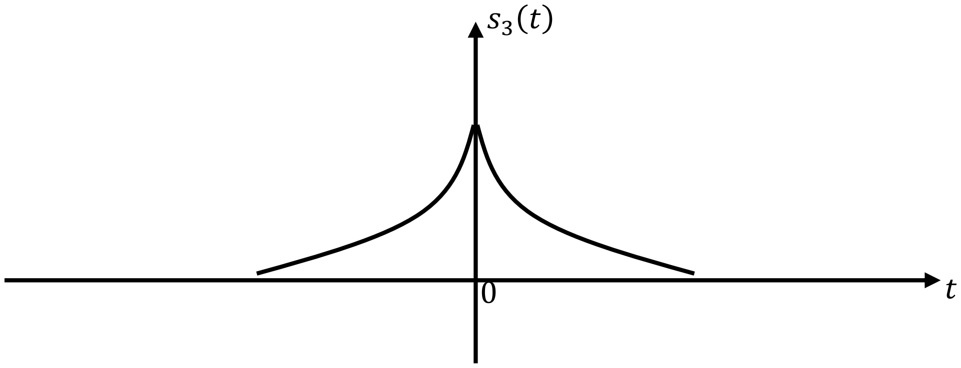
$$S_r(f) = \frac{A\,T_0}{2}\;\mathrm{sinc}^2\left(f\,\frac{T_0}{2}\right)$$

$le\ spectre\ calculé\ \ est\ réel\ et\ pair\ , car\ s_2(t)\ est\ réel\ et\ pair$

On peut aussi calculer la transformée de Fourier de la fonction triangle

$$tri(t) = rect(t) * rect(t) \xrightarrow{TF} Rect(f)\ \times Rect(f)$$

$s_3(t) = A\, e^{-\lambda|t|}\ \ avec\ \lambda \in\ \mathbb{R}_+^*$



Impulsion exponentielle double

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |s_3(t)|^2\ dt = \int_{-\infty}^{0} |s_3(t)|^2\ dt + \int_{0}^{+\infty} |s_3(t)|^2\ dt$$

$$s_2(t) : signal\ réel$$

$$E = \int_{-\infty}^{0} \big(s_3(t)\big)^2\ dt + \int_{0}^{+\infty} \big(s_3(t)\big)^2\ dt = \int_{-\infty}^{0} \left(A\, e^{\lambda\, t}\right)^2\ dt + \int_{0}^{+\infty} \left(A\, e^{-\lambda\, t}\right)^2\ dt$$

$$E = A^2 \left[\int_{-\infty}^{0} e^{2\lambda\, t}\ dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-2\lambda\, t}\ dt \right]$$

$$E = A^2 \left[\frac{e^{2\lambda\, t}}{2\lambda}\bigg|_{-\infty}^{0} - \frac{e^{-2\lambda\, t}}{2\lambda}\bigg|_{0}^{+\infty} \right] = A^2 \left[\frac{1}{2\lambda} - \frac{0-1}{2\lambda}\right] = \frac{A^2}{\lambda}$$

Signal à temps continu et énergie finie.

$$S_3(f) = \mathrm{TF}\big(s_3(t)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} A\, e^{-\lambda\,|t|}\ \ e^{(-j\,2\,\pi\,f\,t)}\, dt$$

$$S_3(f) = \int_{-\infty}^{0} A\, e^{-\lambda\,|t|}\ \ e^{(-j\,2\,\pi\,f\,t)}\, dt\ + \int_{0}^{+\infty} A\, e^{-\lambda\,|t|}\ \ e^{(-j\,2\,\pi\,f\,t)}\, dt$$

$$S_3(f) = \mathrm{A} \int_{-\infty}^{0} e^{\lambda\, t}\ \ e^{(-j\,2\,\pi\,f\,t)}\, dt\ + A \int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda\, t}\ \ e^{(-j\,2\,\pi\,f\,t)}\, dt$$

$$S_3(f) = \mathrm{A}\int_{-\infty}^{0} e^{(\lambda - j\,2\,\pi\,f\,)\,t}\,dt \;+ A\int_{0}^{+\infty} e^{-(\lambda + j\,2\,\pi\,f\,)\,t}\,dt$$

$$S_3(f) = \mathrm{A}\left.\frac{e^{(\lambda - j\,2\,\pi\,f\,)\,t}}{(\lambda - j\,2\,\pi\,f\,)}\right|_{-\infty}^{0} - A\left.\frac{e^{-(\lambda + j\,2\,\pi\,f\,)\,t}}{(\lambda + j\,2\,\pi\,f\,)}\right|_{0}^{+\infty}$$

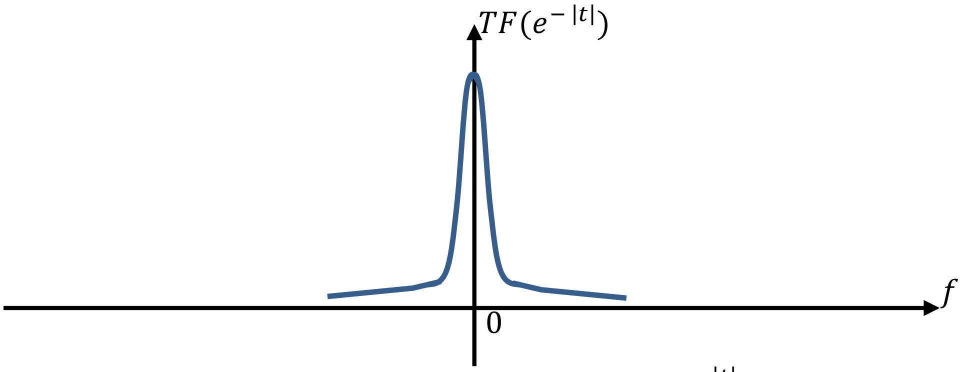
$$S_3(f) = \mathrm{A}\,\frac{1}{(\lambda - j\,2\,\pi\,f\,)} + A\,\frac{1}{(\lambda + j\,2\,\pi\,f\,)} = A\,\frac{(\lambda + j\,2\,\pi\,f\,) + (\lambda - j\,2\,\pi\,f\,)}{(\lambda - j\,2\,\pi\,f\,)(\lambda + j\,2\,\pi\,f\,)}$$

$$S_3(f) = A\,\frac{\lambda + j\,2\,\pi\,f + \lambda - j\,2\,\pi\,f}{(\lambda + j\,2\,\pi\,f\,)(\lambda - j\,2\,\pi\,f\,)} = A\,\frac{2\lambda}{\lambda^2 -\ (j2\,\pi\,f\,)^2}$$

$$S_3(f) = A\,\frac{2\lambda}{\lambda^2 +\ (2\,\pi\,f\,)^2}$$

$S_3(f) = \mathrm{TF}\big(s_3(t)\big)$ *est réelle et paire* , $S_3(-f) =\ S_3(f)$ *car* $s_3(t)$ *est réel et pair*

La fonction $e^{-\,|t|}$ est connue sous le nom de loi de laplace 2 dans le domaine des probabilités.



Transformée de Fourier de $e^{-\,|t|}$

TD N° 3 : Transformée de Laplace

Exercice n° 1 :

Donner la transformée de Laplace des signaux suivants :

1. $s_1(t) = 2\,u\left(t + \frac{T_0}{2}\right) - 2\,u(t - \frac{T_0}{2})$
2. $s_2(t) = 2\,te^{-3t}\,u(t)$
3. $s_3(t) = \frac{1}{4}t^5 \; + 5e^{-2(t-6)}\,u(t-6)$

Exercice n° 2 :

En utilisant la définition de la transformation de Laplace, déterminer la transformée de Laplace des signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$ définis par :

$$x_1(t) = \begin{cases} 0 & si\ t < 0 \\ \sin(2\pi f t) & si\ t \geq 0 \end{cases} \qquad x_2(t) = \begin{cases} 0 & si\ t < 0 \\ 3\,e^{-2t}\cos(5t) & si\ t \geq 0 \end{cases}$$

Exercice n° 3 :

Trouver la transformée de Laplace inverse des signaux suivants :

1. $X_1(P) = \frac{e^{-\,2P}}{P+1}$
2. $X_2(P) = \frac{2}{P^2+3P+2}$
3. $X_3(P) = \frac{3P+7}{P^2-2P-3}$
4. $X_4(P) = \frac{1}{P^3+4P^2+5P+2}$
5. $X_5(P) = \frac{P^3-3}{2P^2+P-1}$
6. $X_6(P) = \frac{3P+1}{(P-1)(P^2+1)}$

Exercice n° 4 :

En utilisant la transformée de Laplace, déterminer la réponse $y(t)$ du système linéaire régi par l'équation différentielle donnée par l'équation (1), pour un signal d'entrée $x(t) = u(t)$:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = x(t) \qquad (1)$$

On considère que les conditions initiales sont nulles.

Solution du TD N° 3

Exercice n°1 :

1° : $s_1(t) = 2\,u\left(t + \frac{T_0}{2}\right) - 2\,u(t - \frac{T_0}{2})$

On utilise la propriété de la TL :

$y(t - t_0) \xrightarrow{TL} e^{-t_0\,P}\,Y(P)$

et :

$u(t) \xrightarrow{TL} U(P) = \frac{1}{P}$

$2\,u\left(t - \frac{T_0}{2}\right) \xrightarrow{TL} 2\,e^{-\frac{T_0}{2}P}\,U(P) = 2\,e^{-\frac{T_0}{2}P}\,\frac{1}{P}$

$2\,u\left(t + \frac{T_0}{2}\right) \xrightarrow{TL} 2\,e^{\frac{T_0}{2}P}\,U(P) = 2\,e^{\frac{T_0}{2}P}\,\frac{1}{P}$

On utilise la propriété de linéarité de la TL :

$s_1(t) = 2\,u\left(t + \frac{T_0}{2}\right) - 2\,u\left(t - \frac{T_0}{2}\right) \xrightarrow{TL} S_1(P) = 2\text{ TL}\left[u\left(t + \frac{T_0}{2}\right)\right] - 2\text{ TL}\left[u(t - \frac{T_0}{2})\right]$

$S_1(P) = 2\,e^{\frac{T_0}{2}P}\,\frac{1}{P} - 2\,e^{-\frac{T_0}{2}P}\,\frac{1}{P} = 2\,\frac{1}{P}\left(e^{\frac{T_0}{2}P} - e^{-\frac{T_0}{2}P}\right)$

2° : $s_2(t) = 2\,t\,e^{-3t}\,u(t)$

a. En utilisant la table de la TL :

$s_2(t) = 2\,t\,e^{-3t}\,u(t) \xrightarrow{table} 2\,\frac{1}{(P+3)^2}$

b. On utilise les propriétés de la TL :

$s_2(t) = 2t\,e^{-3t}\,u(t) = e^{-3t}\,t\,u(t) = e^{-3t}\,y(t)$

$y(t) = t\,u(t)$: signal rampe $\xrightarrow{TL} \frac{1}{P^2}$

$e^{at}\,y(t) \xrightarrow{TL} Y(P - a)$

On a : a $= -3$

$s_2(t) = 2\,e^{-3t}\,t\,u(t) \xrightarrow{TL} 2\,\frac{1}{(P+3)^2}$

Ou :

$s_2(t) = 2\,e^{-3t}\,t\,u(t)$

mibousahla@gmail.com

$$t\,y(t) \xrightarrow{TL} -Y'(P)$$

donc :

$$t\,u(t) \xrightarrow{TL} -U'(P) \text{ avec } U(P) = \frac{1}{P}$$

$$U'(P) = -\frac{1}{P^2}$$

$$t\,u(t) \xrightarrow{TL} -U'(P) = \frac{1}{P^2}$$

$$2\,e^{-3t}\,t\,u(t) \xrightarrow{TL} 2\frac{1}{(P+3)^2}$$

c. En utilisant la définition de la TL :

$$S_2(P) = \int_0^{+\infty} s_2(t)\,e^{-Pt}\,dt$$

$$S_2(P) = \int_0^{+\infty} s_2(t)\,e^{-Pt}\,dt = \int_0^{+\infty} 2\,t\,e^{-3t}\,u(t)\,e^{-Pt}\,dt = 2\int_0^{+\infty} t\,e^{-(P+3)t}\,dt$$

En intégrant par partie :

$$\int_0^{+\infty} t\,e^{-(P+3)t}\,dt$$

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$$

Posons :

$$u = t \quad et \quad dv = e^{-(P+3)t}\,dt$$

$$\rightarrow du = dt \quad et \quad v = \frac{e^{-(P+3)t}}{-(P+3)}$$

$$\rightarrow S_2(P) = 2\int_0^{+\infty} t\,e^{-(P+3)t}\,dt = 2\left[t\,\frac{e^{-(P+3)t}}{-(P+3)}\bigg|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\frac{e^{-(P+3)t}}{(P+3)}\,dt\right]$$

$$S_2(P) = 2\left[0 + \frac{e^{-(P+3)t}}{-(P+3)^2}\bigg|_0^{+\infty}\right] = 2\frac{1}{(P+3)^2}$$

3° : $s_3(t) = \frac{1}{4}t^5 + 5e^{-2(t-6)}\,u(t-6)$

On utilise les propriétés de la TL :

$$u(t) \xrightarrow{TL} U(P) = \frac{1}{P}$$

$$e^{a\,t}\;y(t) \xrightarrow{TL} Y(P-a)$$

mibousahla@gmail.com

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\,u(t) \quad avec\ n\ entier\ positif \xrightarrow{TL} \frac{1}{P^n}$$

Alors :

$$\frac{1}{4}t^5 = \frac{1}{4}(6-1)!\ \frac{t^{(6-1)}}{(6-1)!} \xrightarrow{TL} \frac{1}{4}120\ \ \frac{1}{P^6} = \frac{30}{P^6}$$

Posons :

$y(t) = 5e^{-2(t-6)}\,u(t-6)$ et $x(t) = 5\,e^{-2\,t}\,u(t)$ alors :

$$y(t) = x(t-6)$$

$$y(t) \xrightarrow{TL} Y(P) = e^{-6P}\,X(P)$$

$$x(t) \xrightarrow{TL} X(P) = 5\ \frac{1}{P+2}$$

Donc :

$$y(t) = 5e^{-2(t-6)}\,u(t-6) \xrightarrow{TL} Y(P) = e^{-6P}\,X(P) = 5\,e^{-6P}\ \ \frac{1}{P+2}$$

$$s_3(t) = \frac{1}{4}t^5\ + 5e^{-2(t-6)}\,u(t-6) \xrightarrow{TL} \frac{30}{P^6} + 5\,e^{-6P}\ \ \frac{1}{P+2}$$

Exercice n° 2 :

1.

$$x_1(t) = \begin{cases} 0 & si\ t < 0 \\ \sin(2\pi f t) & si\ t \geq 0 \end{cases}$$

En utilisant la définition de la TL :

$$X_1(P) = \int_0^{+\infty} x_1(t)\,e^{-Pt}\,dt$$

$$X_1(P) = \int_0^{+\infty} x_1(t)\,e^{-Pt}\,dt = \int_0^{+\infty} \sin(\omega t)\ \ e^{-Pt}\,dt$$

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{(j\omega t)} - e^{(-j\omega t)}}{2j}$$

$$X_1(P) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{(j\omega t)} - e^{(-j\omega t)}}{2j}\ \ e^{-Pt}\,dt = \frac{1}{2j}\int_0^{+\infty} e^{-(P-j\omega)t} - e^{-(P+j\omega)t}\ \ dt$$

mibousahla@gmail.com

$$X_1(P) = \frac{1}{2j}\left[\left.\frac{e^{-(P-j\omega)t}}{-(P-j\omega)}\right|_0^{+\infty} - \left.\frac{e^{-(P+j\omega)t}}{-(P+j\omega)}\right|_0^{+\infty} \right]$$

Si la partie réelle de P est positive (existence d'un seuil de convergence) alors :

$$X_1(P) = \frac{1}{2j}\left[\frac{-1}{-(P-j\omega)} + \frac{1}{-(P+j\omega)}\right] = \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{(P-j\omega)} - \frac{1}{(P+j\omega)}\right]$$

$$X_1(P) = \frac{1}{2j}\left[\frac{P+j\omega-P+j\omega}{(P-j\omega)(P+j\omega)}\right]$$

$$X_1(P) = \frac{1}{2j}\left[\frac{2j\omega}{(P^2-(j\omega)^2)}\right] = \frac{\omega}{P^2+\omega^2}$$

En utilisant la table de la TL :

$$x(t) = \sin(\omega t).u(t) \quad avec\ \omega = 2\,\pi f \xrightarrow{table\ de\ la\ TL} \frac{\omega}{P^2+\omega^2}$$

2.

$$x_2(t) = \begin{cases} 0 & si\ t < 0 \\ 3\,e^{-2t}\cos(5t) & si\ t \geq 0 \end{cases}$$

En utilisant la définition de la TL :

$$X_2(P) = \int_0^{+\infty} x_2(t)\, e^{-Pt}\, dt$$

$$X_2(P) = \int_0^{+\infty} x_2(t)\, e^{-Pt}\, dt = \int_0^{+\infty} 3\,e^{-2t}\cos(5t)\ e^{-Pt}\, dt$$

$$\cos(5t) = \frac{e^{(j5t)}+e^{(-j5t)}}{2} \rightarrow e^{-2t}\ \frac{e^{(j5t)}+e^{(-j5t)}}{2} = \frac{1}{2}\left(e^{-(2-5j)t} + e^{-(2+5j)t}\right)$$

$$X_2(P) = \frac{3}{2}\int_0^{+\infty}\left(e^{-(2-5j)t} + e^{-(2+5j)t}\right)\ e^{-Pt}\, dt$$

$$X_2(P) = \frac{3}{2}\left[\int_0^{+\infty} e^{-(P+2-5j)t}\ \ dt + \int_0^{+\infty} e^{-(P+2+5j)t}\ \ dt\right]$$

$$X_2(P) = \frac{3}{2}\left[\left.\frac{e^{-(P+2-5j)t}}{-(P+2-5j)}\right|_0^{+\infty} + \left.\frac{e^{-(P+2+5j)t}}{-(P+2+5j)}\right|_0^{+\infty} \right]$$

$$X_2(P) = \frac{3}{2}\left[\frac{1}{(P+2-5j)} + \frac{1}{(P+2+5j)}\right]$$

mibousahla@gmail.com

$$X_2(P) = \frac{3}{2}\left[\frac{P+2+5j+P+2-5j}{(P+2-5j)(P+2+5j)}\right]$$

$$X_2(P) = 3\left[\frac{P+2}{(P+2)^2+5^2}\right]$$

En utilisant la table de la TL :

$$3\, e^{-2t}\cos(5t)\ u(t) \xrightarrow{table\ de\ la\ TL} 3\left[\frac{P+2}{(P+2)^2+5^2}\right]$$

Exercice n° 3 :

Détermination de la transformée de Laplace inverse :

1°) $X(P) = \dfrac{e^{-2P}}{P+1}$

$$X(P) = \frac{e^{-2P}}{P+1} = e^{-2P}\frac{1}{P+1} \rightarrow x(t) = e^{-(t-2)}\, u(t-2)$$

2°) $X(P) = \dfrac{2}{P^2+3P+2}$

$$X(P) = \frac{2}{(P+1)(P+2)}$$

$$X(P) = \frac{A}{P+1} + \frac{B}{P+2}$$

$$X(P) = \frac{A(P+2)+B(P+1)}{(P+1)(P+2)} = \frac{P(A+B)+2A+B}{(P+1)(P+2)}$$

$\rightarrow A+B=0\ \ et\ 2A+B=2$

$$\rightarrow A=-B\ \ et\ 2A+B=2A-A=2 \rightarrow A=2\ et\ B=-2$$

$$X(P) = \frac{2}{P+1} - \frac{2}{P+2}$$

$$X(P) = \frac{2}{P+1} - \frac{2}{P+2} \xrightarrow{Table\ \ des\ TL} x(t) = 2\, e^{-t}u(t) - 2\, e^{-2\,t}\, u(t)$$

Ou :

$$X(P) = \frac{2}{P+1} - \frac{2}{P+2} \xrightarrow{TL^{-1}} x(t) = 2\, e^{-t}u(t) - 2\, e^{-2t}\, u(t)$$

3°) $X(P) = \dfrac{3P+7}{P^2-2P-3}$

mibousahla@gmail.com

$$X(P) = \frac{3P+7}{P^2-2P-3} = \frac{4}{P-3} - \frac{1}{P+1} \rightarrow x(t) = [4\, e^{3t} - e^{-\,t}]u(t)$$

4°) $X(P) = \dfrac{1}{P^3+4P^2+5P+2}$

$P = -1$ est une racine évidente donc :

$$P^3+4P^2+5P+2 = (P+1)\,Q(P) \;\Rightarrow\; Q(P) = \frac{P^3+4P^2+5P+2}{(P+1)} = P^2+3P+2$$

$$X(P) = \frac{1}{(P+1)(P^2+3P+2)} = \frac{1}{(P+1)(P+1)(P+2)}$$

$$X(P) = \frac{1}{(P+1)^2(P+2)}$$

On a 2 pôles : un pôle simple ($P = -2$) et un pôle double ($P = -1$).

$$\rightarrow \text{Rés}(\text{X(P)},-2) = \lim_{\text{P}\to-3}(P+2)\,\text{X(P)}\,e^{Pt} = \lim_{\text{P}\to-2}\frac{1}{(P+1)^2}\,e^{Pt} = e^{-2t}$$

$\text{P} = -1$ est un pôle d'ordre 2 :

$$\text{Rés}(\text{X(P)},-1) = \lim_{\text{P}\to-1}\frac{1}{(2-1)!}\frac{\text{d}^{2-1}}{\text{dP}^{2-1}}(\text{X}(P)\,(P+1)^2\,e^{Pt})$$

$$\text{Rés}(\text{X(P)},-1) = \lim_{\text{P}\to-1}\frac{\text{d}}{\text{dP}}\left(\frac{1}{(P+1)^2(P+2)}\,(P+1)^2\,e^{Pt}\right)$$

$$\text{Rés}(\text{X(P)},-1) = \lim_{\text{P}\to-1}\frac{\text{d}}{\text{dP}}\left(\frac{e^{Pt}}{(P+2)}\right) = \lim_{\text{P}\to-1}\frac{te^{Pt}(P+2)-e^{Pt}}{(P+2)^2}$$

$$\text{Rés}(\text{X(P)},-1) = te^{-t} - e^{-t}$$

$$x(t) = \sum résidus = e^{-2t}u(t) + (te^{-t} - e^{-t})u(t) = (e^{-2t} + te^{-t} - e^{-t})\,u(t)$$

5°) $X(P) = \dfrac{P^2-3}{2P^2+P-1}$

La division en puissance décroissante donne :

$$X(P) = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{P+5}{2P^2+P-1}\right]$$

mibousahla@gmail.com

Or :

$$2P^2 + P - 1 = 2(P+1)\left(P - \frac{1}{2}\right)$$

D'où :

$$\frac{P+5}{2P^2+P-1} = \frac{1}{2}\left[\frac{A}{P+1} + \frac{B}{P-\frac{1}{2}}\right] = \frac{-\frac{4}{3}}{P+1} + \frac{\frac{11}{6}}{P-\frac{1}{2}}$$

On obtient :

$$X(P) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}\frac{1}{P+1} - \frac{11}{12}\frac{1}{P-\frac{1}{2}}$$

$$x(t) = \frac{1}{2}\,\delta(t) + \left[\frac{2}{3}e^{-t} - \frac{11}{12}e^{\frac{1}{2}t}\right]u(t)$$

$$X(P) = \frac{3P+7}{P^2-2P-3} = \frac{4}{P-3} - \frac{1}{P+1} \to x(t) = [4\,e^{3t} - e^{-t}]u(t)$$

$$X(P) = \frac{e^{-2P}}{P+1} \to x(t) = e^{-(t-2)}\,u(t-2)$$

$$X(P) = \frac{3P+1}{(P-1)(P^2+1)} = \frac{2}{P-1} + \frac{-2P+1}{P^2+1} = \frac{2}{P-1} - \frac{2P}{P^2+1} + \frac{1}{P^2+1}$$

$$\to x(t) = 2e^t - 2\cos(t) + \sin(t)$$

6°) $X(P) = \dfrac{3P+1}{P^3-P^2+P-1}$

$P = 1$ est une racine évidente donc :

$P^3 - P^2 + P - 1 = (P-1)\,Q(P) \;\Rightarrow\; Q(P) = \dfrac{P^3-P^2+P-1}{(P-1)} = P^2+1$

$X(P) = \dfrac{3P+1}{(P-1)(P^2+1)} = \dfrac{2}{P-1} + \dfrac{-2P+1}{P^2+1} = \dfrac{2}{P-1} - \dfrac{2P}{P^2+1} + \dfrac{1}{P^2+1}$

$$\to x(t) = 2e^t - 2\cos(t) + \sin(t)$$

mibousahla@gmail.com

Exercice n° 4 :

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3\,y(t) = x(t)$$

1°)

$$\frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{TL} P\,X(P) - x(0)$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} \xrightarrow{TL} P^2\,X(P) - P\,x(0) - x'(0)$$

Les conditions initiales sont nulles :

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{TL} P\,X(P)$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} \xrightarrow{TL} P^2\,X(P)$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = x(t)$$

$$\xrightarrow{TL} P^2\,Y(P) + 4\,P\,Y(P) + 3\,Y(P) = X(P)$$

$$(P^2 + 4\,P\; + 3)Y(P) = X(P) \rightarrow Y(P) = \frac{X(P)}{P^2 + 4\,P\; + 3}$$

$$x(t) = u(t) \xrightarrow{TL} X(P) = \frac{1}{\mathrm{P}}$$

$$\rightarrow Y(P) = \frac{1}{\mathrm{P}} \quad \frac{1}{P^2 + 4\,P\; + 3} = \frac{1}{P\,(P+3)(P+1)}$$

On a 3 pôles simples : $P = 0\,, P = -3\ et\ P = -1$

$$\rightarrow \mathrm{Rés(X(P),0)} = \lim_{\mathrm{P}\to 0}(P)\,\mathrm{X(P)}\,e^{Pt} = \lim_{\mathrm{P}\to 0} \frac{1}{(P+3)(P+1)}\;e^{Pt} = \frac{1}{3}$$

$$\rightarrow \mathrm{Rés(X(P),-3)} = \lim_{\mathrm{P}\to -3}(P+3)\,\mathrm{X(P)}\,e^{Pt} = \lim_{\mathrm{P}\to -3} \frac{1}{P(P+1)}\;e^{Pt} = \frac{1}{6}e^{-3t}$$

mibousahla@gmail.com

$$\rightarrow \text{Rés}(\text{X(P)}, -1) = \lim_{\text{P}\rightarrow -1} (P+1)\,\text{X(P)}\, e^{Pt} = \lim_{\text{P}\rightarrow -1} \frac{1}{P(P+3)}\, e^{Pt} = \frac{-1}{2} e^{-t}$$

$$\rightarrow y(t) = \frac{1}{3}\, u(t) + \frac{1}{6} e^{-3t}\, u(t) - \frac{1}{2} e^{-t}\, u(t)$$

2°)

$$x(t) = e^{-3t}\, u(t) \xrightarrow{TL} X(P) = \frac{1}{\text{P}+3}$$

$$\rightarrow Y(P) = \frac{1}{\text{P}+3} \quad \frac{1}{P^2 + 3\,P \; + 2} = \frac{1}{(P+3)(P+2)(P+1)}$$

On a 3 pôles simples : $P = -3\,, P = -2 \; et \; P = -1$

$$\rightarrow \text{Rés}(\text{X(P)}, -3) = \lim_{\text{P}\rightarrow -3} (P)\,\text{X(P)}\, e^{Pt} = \lim_{\text{P}\rightarrow -3} \frac{1}{(P+2)(P+1)}\, e^{Pt} = \frac{1}{2} e^{-3t}$$

$$\rightarrow \text{Rés}(\text{X(P)}, -2) = \lim_{\text{P}\rightarrow -2} (P+2)\,\text{X(P)}\, e^{Pt} = \lim_{\text{P}\rightarrow -2} \frac{1}{(P+3)(P+1)}\, e^{Pt} = -e^{-2t}$$

$$\rightarrow \text{Rés}(\text{X(P)}, -1) = \lim_{\text{P}\rightarrow -1} (P+1)\,\text{X(P)}\, e^{Pt} = \lim_{\text{P}\rightarrow -1} \frac{1}{(P+3)(P+2)}\, e^{Pt} = \frac{1}{2} e^{-t}$$

$$\rightarrow y(t) = \frac{1}{2}\, e^{-3t} - e^{-2t}\, u(t) + \frac{1}{2} e^{-t}\, u(t)$$

mibousahla@gmail.com

TD N°4 : Convolution et corrélation

Exercice n° 1 :

On considère les deux signaux $e(t)$ et $h(t)$ définis par :

$$e(t) = h(t) = rect\left(\frac{t-3}{6}\right)$$

1. Représenter graphiquement les deux signaux $e(t)\ et\ h(t)$

2. Calculer $s(t) = e(t) * h(t)$

3. Représenter $s(t)$.

Exercice n° 2 :

Déterminer et tracer le signal de sortie $y(t)$ du système S, de réponse impulsionnelle $h(t) = Rect\left[\frac{(t-2)}{4}\right]$, lorsqu'on l'excite par un signal $x(t)$ défini par :

$$x(t) = 2\ Rect\left[\frac{(t-5)}{2}\right]$$

Exercice n° 3 :

Soit le signal $x(t)$ défini par :

$$x(t) = x_1(t)\ \times x_2(t)\quad avec$$

$$x_1(t) = Rect\left[\frac{(t-\mathrm{t}_0)}{T}\right]\quad ,\quad x_2(t) = \frac{A}{T}t\quad et\quad \mathrm{t}_0 = \frac{T}{2}$$

1. Représenter graphiquement le signal $x(t)$.

2. Déterminer la fonction d'autocorrélation $C_{xx}(\tau)$.

3. Déduire l'énergie du signal.

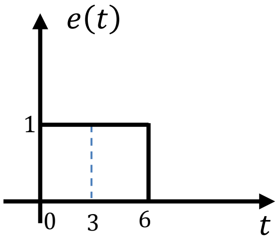
mibousahla@gmail.com

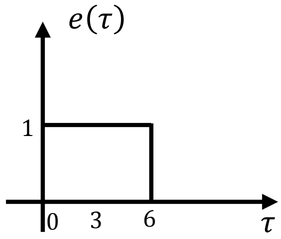
Solution du TD N° 4

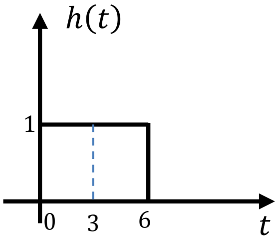
Exercice n°1 :

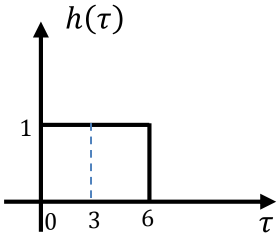
$$s(t) = e(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau)\, h(t-\tau)\ d\tau$$

1° étape :

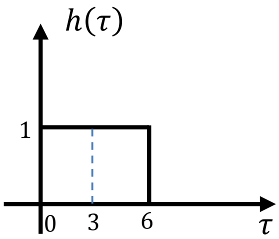


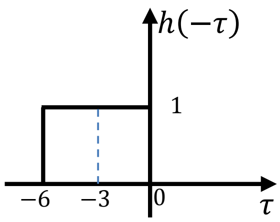






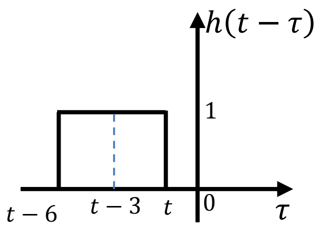
2° étape :



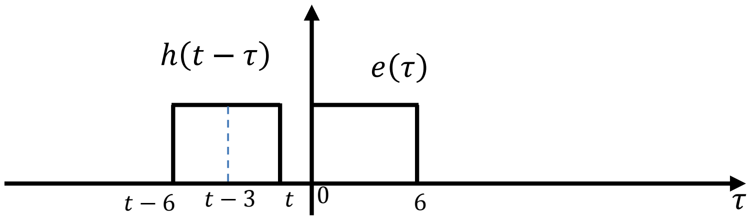


3° étape : $h(t-\tau)$

1er cas : $t < 0$

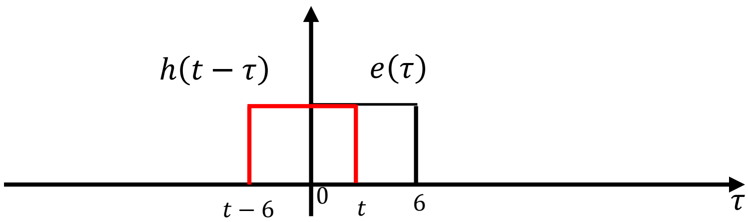


mibousahla@gmail.com



$\Longrightarrow s(t) = 0$ (il n'y a aucune intersection entre les deux).

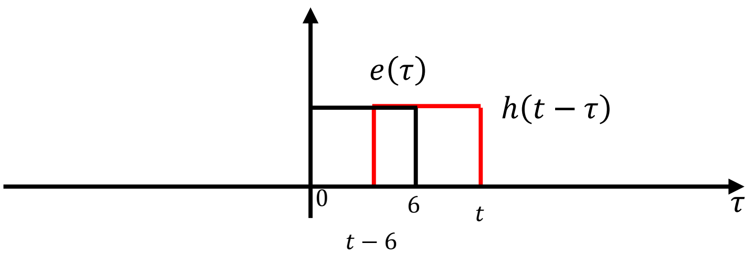
2ème cas : $0 \leq t < 6$



$$\Longrightarrow s(t) = \int_0^t 1 \; d\tau \; = t$$

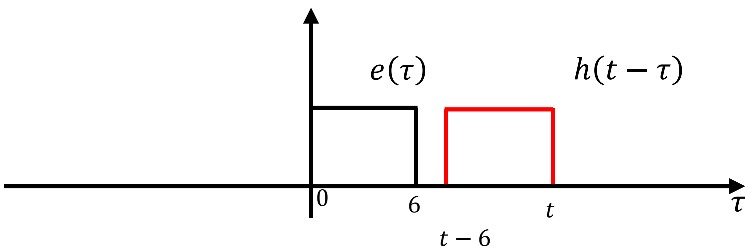
3ème cas : $t \geq 6 \quad et \quad t-6 \leq 6 \quad \Longrightarrow \quad t \leq 12$

$\Longrightarrow 6 \leq t \leq 12$



$$\Longrightarrow s(t) = \int_{t-6}^{6} 1 \; d\tau \; = 12 - t$$

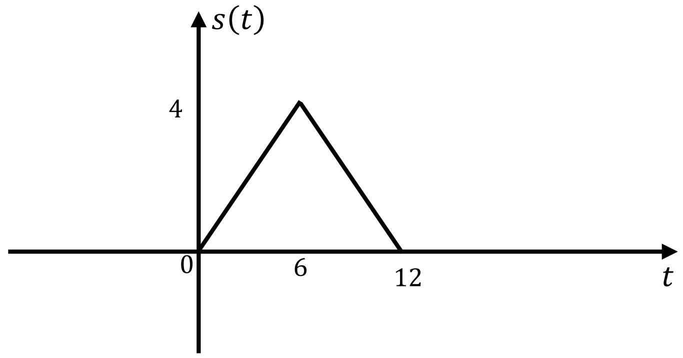
4ème cas : $t-6 > 6 \Longrightarrow t > 12$



mibousahla@gmail.com

$\Longrightarrow s(t) = 0$

$$s(t) = e(t) * h(t) \begin{cases} 0 & si \quad t < 0 \\ t & si \quad 0 \leq t \leq 6 \\ 12 - t & si \quad 6 \leq t \leq 12 \\ 0 & si \quad t > 12 \end{cases}$$



$$rect\left(\frac{t-3}{6}\right) * rect\left(\frac{t-3}{6}\right) = 4\, tri\left(\frac{t-6}{6}\right)$$

Exercice n°2 :

$$x(t) = 2\, Rect\left[\frac{(t-5)}{2}\right] \quad et \quad h(t) = Rect\left[\frac{(t-2)}{4}\right]$$

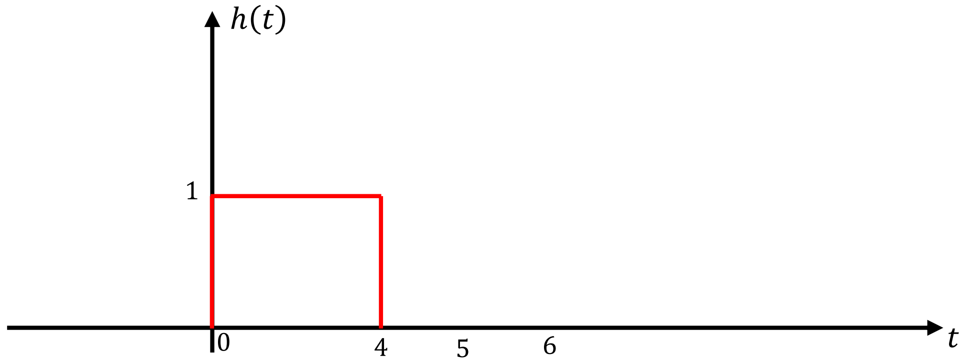
D'une manière générale pour une impulsion rectangulaire d'amplitude A, de durée T centré en $t = \tau$:

$$S(t) = A\, Rect\left[\frac{(t-\tau)}{T}\right] = \begin{cases} A & si \ |t-\tau| < \frac{T}{2} \Leftrightarrow \tau - \frac{T}{2} < t < \tau + \frac{T}{2} \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

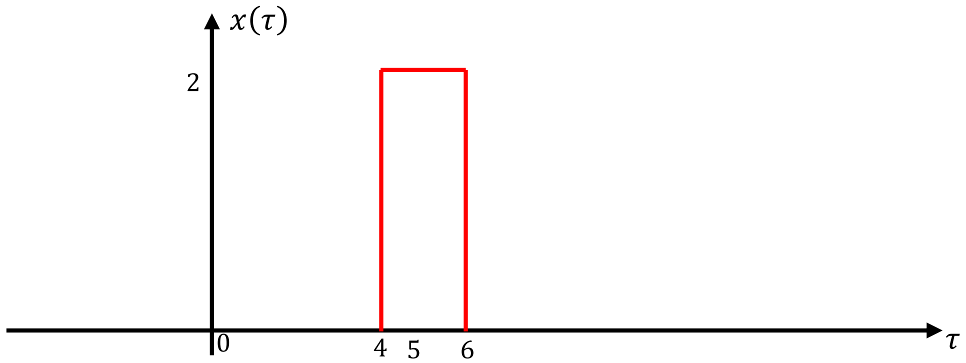
$$x(t) = 2\, Rect\left[\frac{(t-5)}{2}\right] = \begin{cases} 2 & si \ |t-5| < \frac{2}{2} \Leftrightarrow 4 < t < 6 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

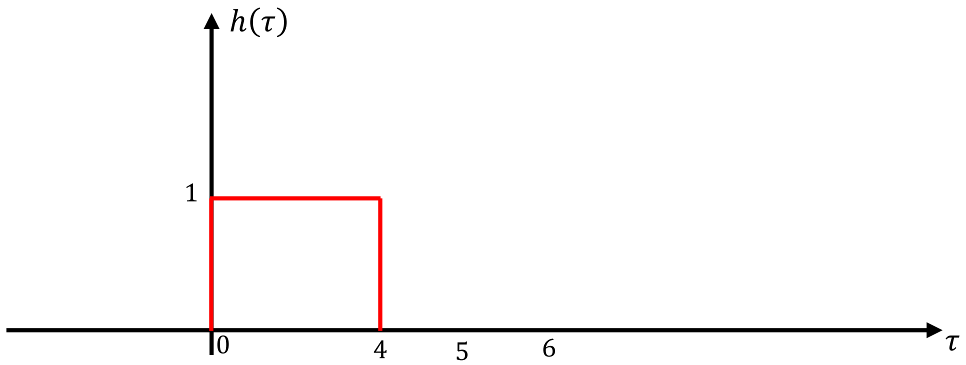
$$h(t) = Rect\left[\frac{(t-2)}{4}\right] = \begin{cases} 1 & si \ |t-2| < \frac{4}{2} \Leftrightarrow 0 < t < 4 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

mibousahla@gmail.com

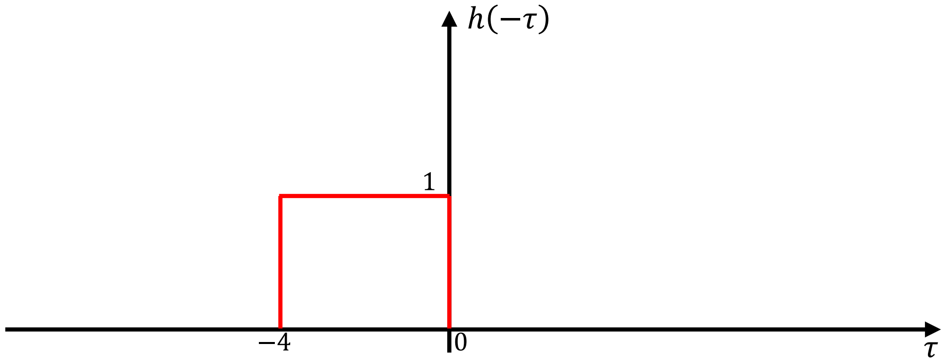


$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\ d\tau$$

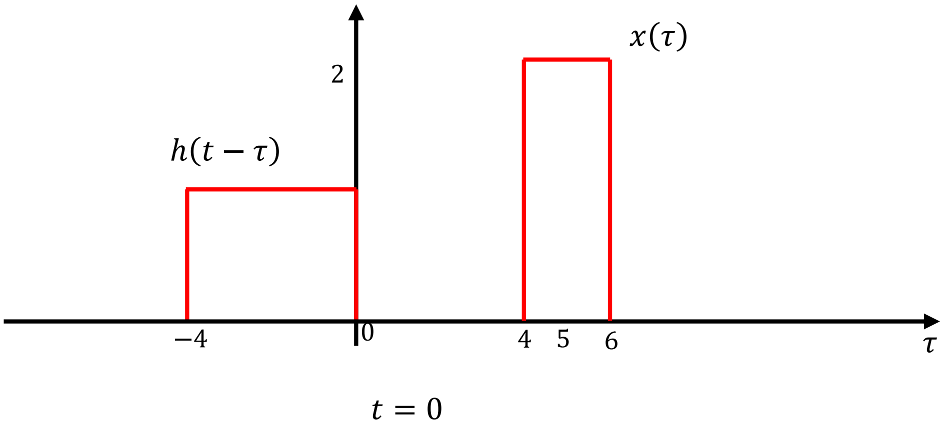




mibousahla@gmail.com



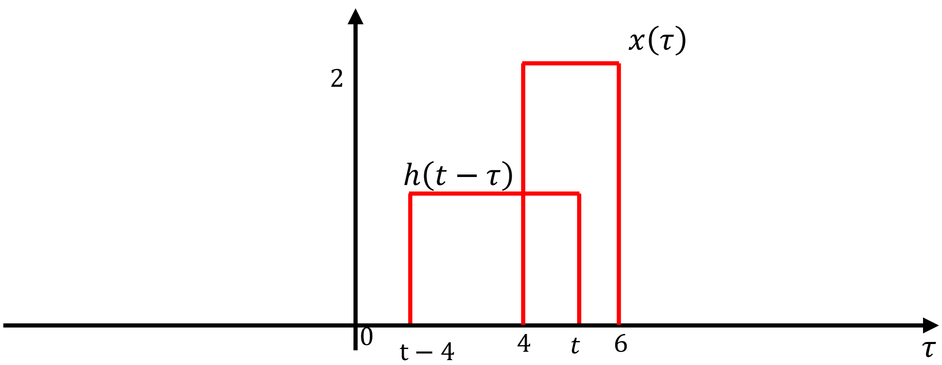
3° étape : calcul de : $x(\tau)\ h(t-\tau)$



1° cas : $t < 4$ pas de chevauchement entre les signaux $x(\tau)$ *et* $h(t-\tau)$.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\ d\tau\ = 0$$

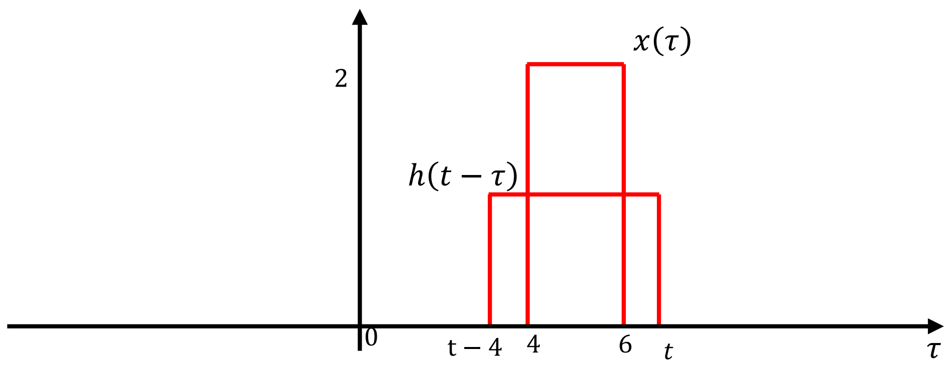
2° cas : $4 \leq t < 6$ il y a chevauchement entre les signaux $x(\tau)$ *et* $h(t-\tau)$.



mibousahla@gmail.com

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\ d\tau\ = \int_{4}^{t} x(\tau)\, h(t-\tau)\ d\tau\ = \int_{4}^{t} 2\ 1\ d\tau\ = 2\tau|_4^t = 2t-8$$

3° cas : $t \geq 6\ \ et\ \ t-4 < 4\ \ ou\ \ 6 \leq t < 8$ il y a chevauchement entre $x(\tau)\ \ et\ \ h(t-\tau)$.

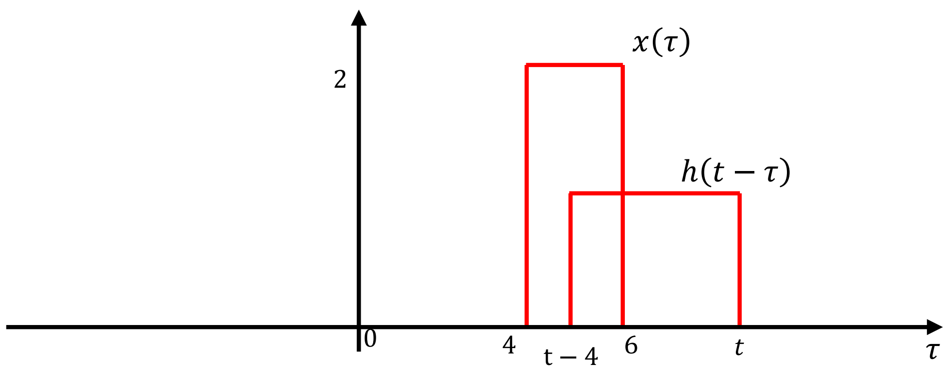


$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\ d\tau\ = \int_{4}^{6} x(\tau)\, h(t-\tau)\ d\tau\ = \int_{4}^{6} 2\ 1\ d\tau\ = 2\tau|_4^6 = 4$$

4° cas : $t \geq 8\ \ et\ \ t-4 < 6\ ou\ \ 8 \leq t < 10$ il y a chevauchement entre $x(\tau)\ \ et\ \ h(t-\tau)$.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\ d\tau\ = \int_{t-4}^{6} x(\tau)\, h(t-\tau)\ d\tau\ = \int_{t-4}^{6} 2\ 1\ d\tau\ = 2\tau|_{t-4}^{6}$$

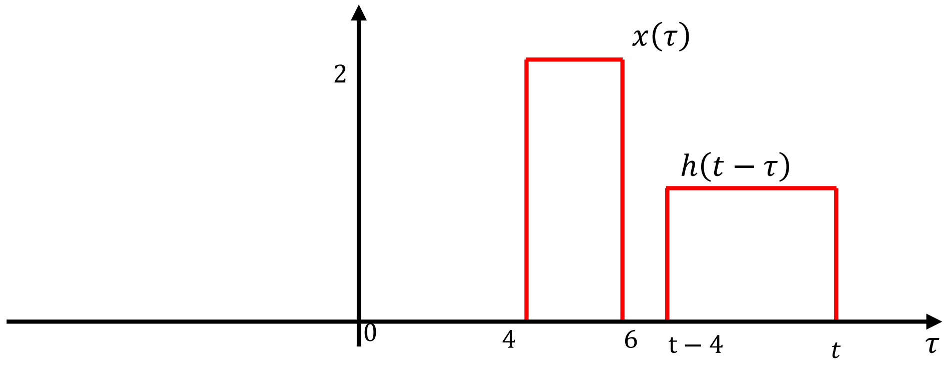
$$= -2t+20$$



4° cas : $t-4 \geq 6\ \ et\ \ \ ou\ \ t \geq 10$ il y a pas de chevauchement entre $x(\tau)\ \ et\ \ h(t-\tau)$.

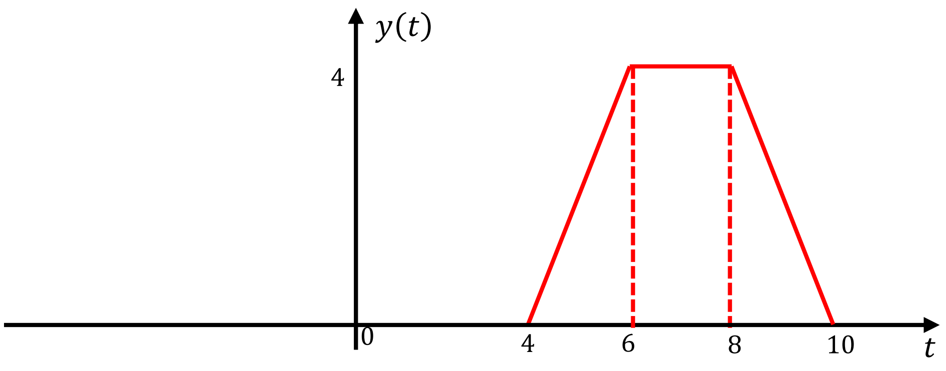
$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\ d\tau\ = 0$$

mibousahla@gmail.com



Finalement :

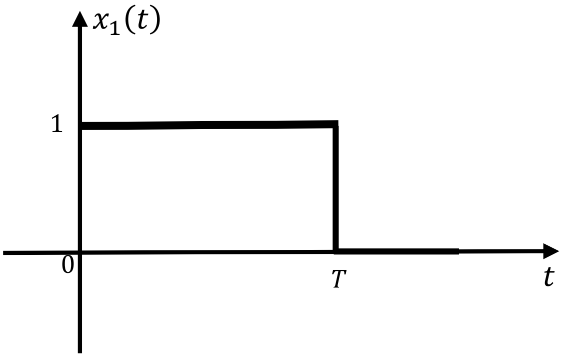
$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\; d\tau \; = \begin{cases} 0 \;\; si \quad t < 4 \\ 2t - 8 \;\; si \; 4 < \; t < 6 \\ 4 \;\; si \; 6 < \; t < 8 \\ -2t - 20 \;\; si \;\; 8 < \; t < 10 \\ 0 \;\; si \; t \geq 10 \end{cases}$$

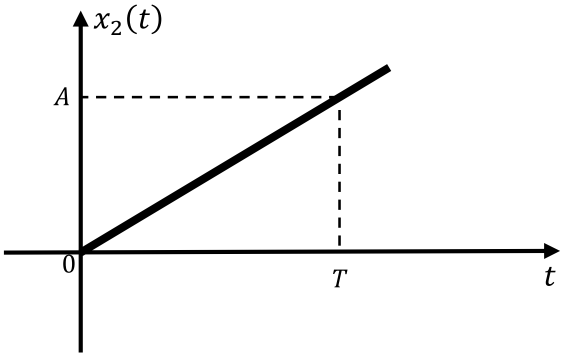


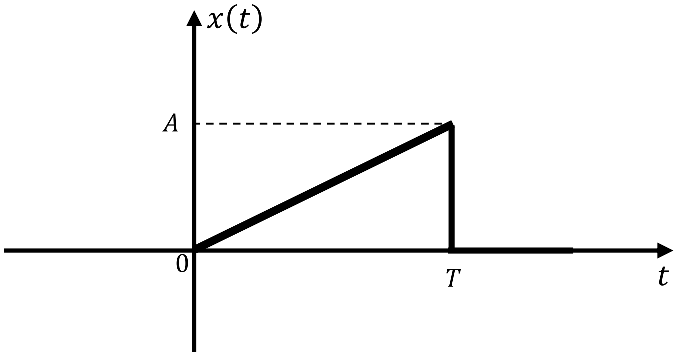
Exercice n° 3 :

1. Représentation du signal $x(t)$

mibousahla@gmail.com





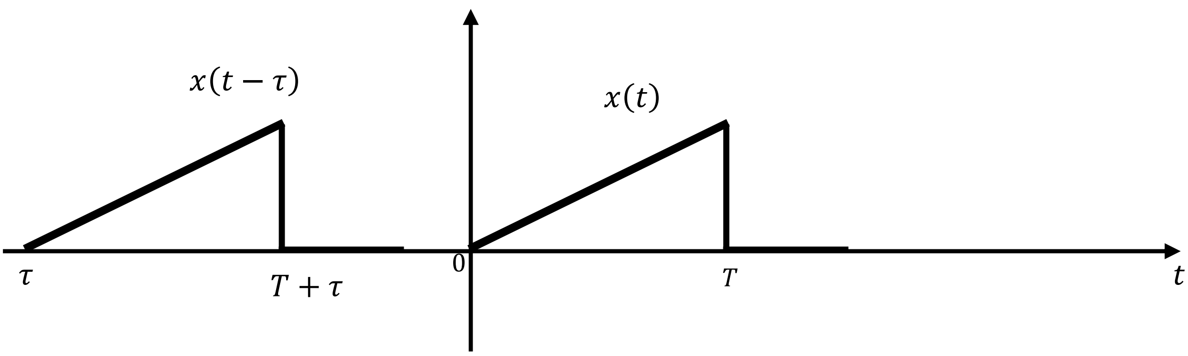


2. Calcul de la fonction d'autocorrélation $C_{xx}(\tau)$:

$$C_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, x^*(t-\tau)\ dt\ = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, x(t-\tau)\ dt$$

$$C_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A}{T} t[u(t) - u(t-T)]\ \ \frac{A}{T}(t-\tau)\ [u(t-\tau) - u(t-\tau-T)]\ dt$$

$$C_{xx}(\tau) = \frac{A^2}{T^2} \int_{-\infty}^{+\infty} t[u(t) - u(t-T)]\ (t-\tau)[u(t-\tau) - u(t-\tau-T)]\ dt$$



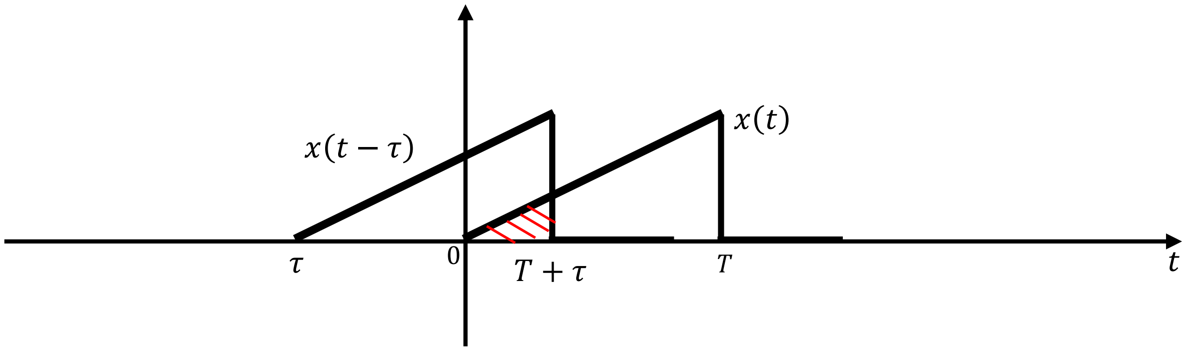
mibousahla@gmail.com

1ème cas :

$$T + \tau < 0 \Longrightarrow \tau < -T \Longrightarrow C_{xx}(\tau) = 0$$

2ème cas :

$$\tau < 0 \; et \; T + \tau > 0 \Longrightarrow -T < \tau < 0 \Longrightarrow il \; y \; a \; intersection$$



$$C_{xx}(\tau) = \frac{A^2}{T^2}\int_0^{T+\tau} t\,(t-\tau)\;dt \;= \frac{A^2}{T^2}\int_0^{T+\tau}(t^2 - t\,\tau)\;dt$$

$$C_{xx}(\tau) = \frac{A^2}{T^2}\quad\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}\,\tau\right]_0^{T+\tau}$$

$$C_{xx}(\tau) = \frac{A^2}{T^2}\quad\left[\frac{(T+\tau)^3}{3} - \frac{(T+\tau)^2}{2}\,\tau\right]$$

$$C_{xx}(\tau) = \frac{A^2}{T^2}\quad\left[\frac{(T^3 + \tau^3 + \tau\,T^2 + \;T\,\tau^2 + 2\,\tau^2 + 2T\tau)}{3} - \frac{(\,T^2 + \;\tau^2 + 2T\tau)}{2}\,\tau\right]$$

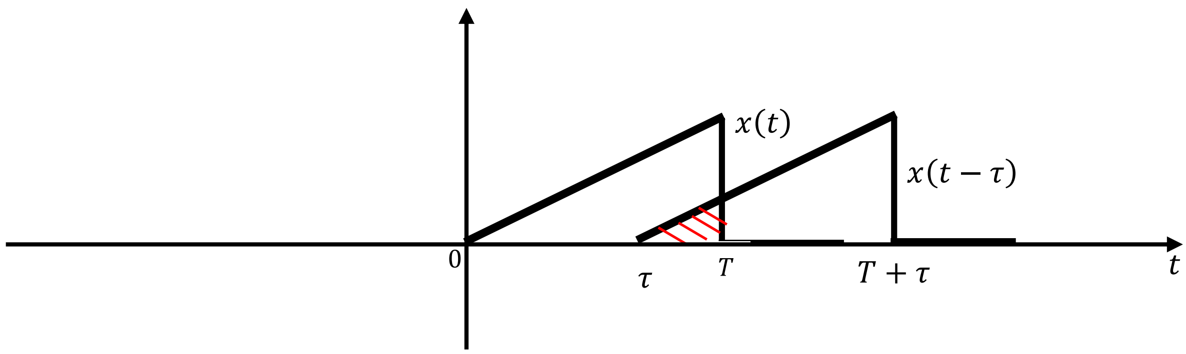
$$C_{xx}(\tau) = \frac{A^2}{T^2}\quad\left[\frac{(T^3 + \tau^3 + \tau\,T^2 + \;T\,\tau^2 + 2\,T\,\tau^2 + 2T^2\tau)}{3} - \frac{(\,\tau T^2 + \;\tau^3 + 2T\tau^2)}{2}\right]$$

$$C_{xx}(\tau) = \frac{A^2}{6T^2}\quad[2T^3 + 2\tau^3 + 2\tau\,T^2 + 2\,T\,\tau^2 + 4\,T\tau^2 + 4\tau T^2 - 3\tau T^2 - \;3\tau^3 - 6T\tau^2\,]$$

$$C_{xx}(\tau) = \frac{A^2}{6T^2}\quad[-\tau^3 + 3\tau\,T^2 + 2T^3]$$

3ème cas :

$$T < \tau < 0 \; et \; T + \tau > 0 \Longrightarrow -T < \tau < 0 \Longrightarrow il \; y \; a \; intersection$$



mibousahla@gmail.com

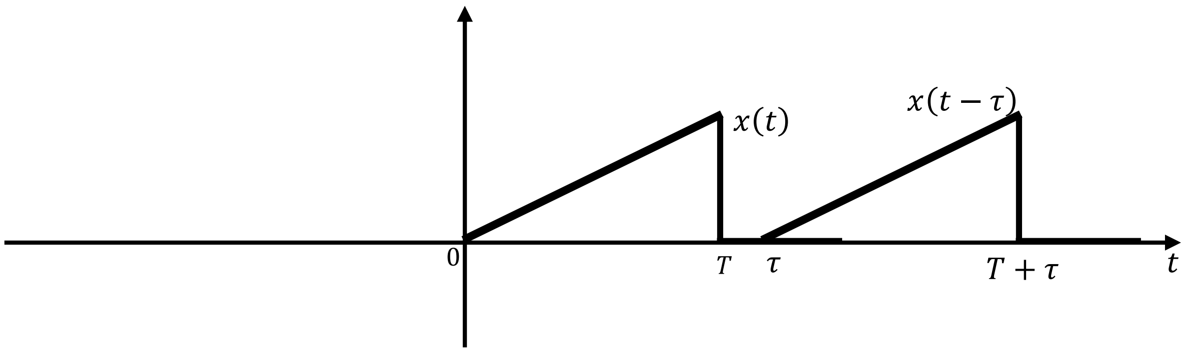
$$C_{xx}(\tau) = \frac{A^2}{T^2}\int_{\tau}^{T} t\,(t-\tau)\;dt \;= \frac{A^2}{T^2}\int_{\tau}^{T} (t^2 - t\,\tau)\;dt$$

$$C_{xx}(\tau) = \frac{A^2}{T^2}\quad\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}\,\tau\right]_{\tau}^{T} = \frac{A^2}{T^2}\quad\left(\frac{T^3}{3} - \frac{T^2}{2}\,\tau - \frac{\tau^3}{3} + \frac{\tau^3}{2}\right)$$

$$C_{xx}(\tau) = \frac{A^2}{6T^2}\quad\left(\frac{T^3}{3} - \frac{T^2}{2}\,\tau - \frac{\tau^3}{3} - \frac{\tau^3}{2}\right) = \frac{A^2}{6T^2}\quad(\tau^3 - 3\tau T^2 + 2T^3)$$

4ème cas :

$\tau > T \Longrightarrow C_{xx}(\tau) = 0$



$$C_{xx}(\tau) = \begin{cases} 0 & si\ \tau < -T \\ \dfrac{A^2}{6T^2}\quad[-\tau^3 + 3\tau\,T^2 + 2T^3] & si\quad -T < \tau < 0 \\ \dfrac{A^2}{6T^2}\quad(\tau^3 - 3\tau T^2 + 2T^3) & si\quad 0 < \tau < T \\ 0 & si\quad \tau > T \end{cases}$$

3. L'énergie du signal à partir de sa fonction d'autocorrélation :

$$E_x = C_{xx}(0) = \frac{A^2}{6T^2}2T^3 = \frac{A^2}{3}T$$

mibousahla@gmail.com

Bibliographie

[1] Traitement des signaux et acquisition de données. 3e édition Francis Cottet
[2] Théorie et Traitement du Signal. DUNOD Messaoud Benidir.

[3] Signaux et Systèmes Discrets. ENSSAT - Université de Rennes 1. Olivier Sentieys.

[4] Aide-mémoire Traitement du Signal. Dunod, Paris. Francis Cottet.

[5] Cours de Traitement du Signal, première partie. Ecole Polytechnique Universitaire de Paris. J.L. Zarader.

[6] Théorie élémentaire du signal. Luc Jolivet Rabah Labbas. Lavoisier 2005.

[7] Cours de Traitement du Signal, seconde partie. Ecole Polytechnique Universitaire de Paris. J.L. Zarader.

mibousahla@gmail.com