حلول تمارين الفصل الرابع :

التمرين الأوّل:

X :عدد الأعطاب اليومية لجهاز حاسوب

$X=x_i$	0	1	2	3	4	5	$\sum$
$P(X=x_i)$	6α	5α	4α	3α	2α	α	$\alpha 21$
$P(X=x_i)$	$\frac{6}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{21}{21}$
$p(x_i \leq x)$	$\frac{6}{21}$	$\frac{11}{21}$	$\frac{15}{21}$	$\frac{18}{21}$	$\frac{20}{21}$	$\frac{21}{21}$	/
$x_i * p(x_i)$	$\frac{0}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{8}{21}$	$\frac{9}{21}$	$\frac{8}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{25}{21}$

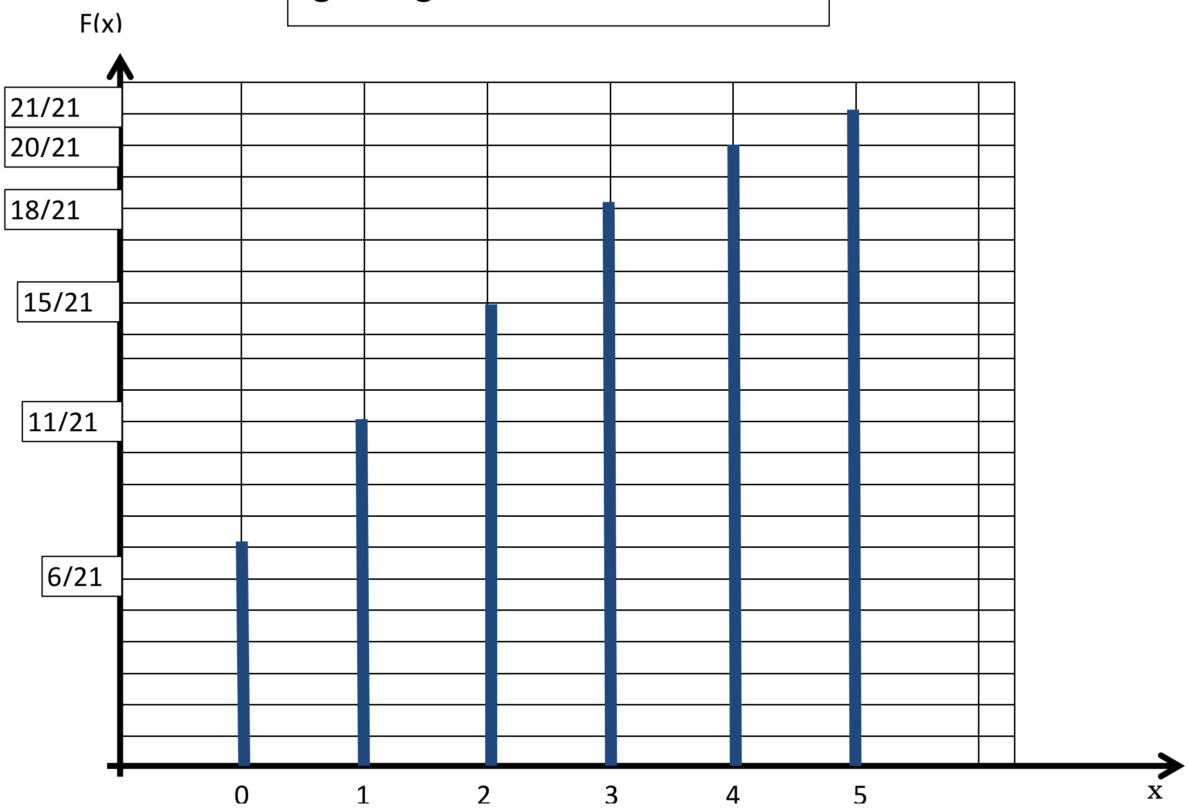
1/ عينة قيمة α

$$\sum p(x_i) = 1 \quad ; 21\alpha = 1 \quad ; \alpha = \frac{1}{21}$$

2/ أكتب دالة التوزيع المتجمع ومثلها بيانيا.

$$F(x) = \begin{cases} \frac{6}{21} & si \;\; x \leq 0 \\ \frac{11}{21} & si \;\; x \leq 1 \\ \frac{15}{21} & si \;\; x \leq 2 \\ \frac{18}{21} & si \;\; x \leq 3 \\ \frac{20}{21} & si \;\; x \leq 4 \\ \frac{21}{21} & si \;\; x \leq 5 \end{cases}$$

أعمدة تكرارية لدالة التوزيع المتجمع



3/ أحسب احتمال عدد الأعطاب في يوم ما لجهاز الحاسوب لا يزيد عن 4.

$$p(x \leq 4) = F(x = 4) = \frac{20}{21}$$

$$p(x \leq 4) = p(x = 4) + p(x = 3) + p(x = 2) + p(x = 1) + p(x = 0)$$
$$= \frac{2}{21} + \frac{3}{21} + \frac{4}{21} + \frac{5}{21} + \frac{6}{21} = \frac{20}{21}$$

$$p(x \leq 4) = 1 - p(x > 4) = 1 - p(x \geq 5) = 1 - p(x = 5) = 1 - \frac{1}{21} = \frac{20}{21}$$

أحسب احتمال عدد الأعطاب في يوم لجهاز الحاسوب لا يقل عن 2.

$$p(x \geq 2) = 1 - p(x < 2) = 1 - p(x \leq 1) = 1 - F(x = 1) = 1 - \frac{11}{21} = \frac{10}{21}$$

أحسب احتمال عدد الأعطاب في يوم لجهاز الحاسوب أكبر تماما من 1 واصغر أو يساوي 4.

$$p(1 < x \leq 4) = p(x = 2) + p(x = 3) + p(x = 4) = \frac{4}{21} + \frac{3}{21} + \frac{2}{21} = \frac{9}{21}$$

بفتح المتراجحة مع نفي المتراجحة اذا سبقت بناقص

$$p(1 < x \leq 4) = p(x > 1) - p(x > 4)$$
$$= [p(x = 2) + p(x = 3) + p(x = 4) + p(x = 5)] - [p(x = 5)]$$
$$= p(x = 2) + p(x = 3) + p(x = 4) = \frac{4}{21} + \frac{3}{21} + \frac{2}{21} = \frac{9}{21}$$

$$p(1 < x \leq 4) = p(x \leq 4) - p(x \leq 1)$$
$$= [p(x = 4) + p(x = 3) + p(x = 2) + p(x = 1) + p(x = 0)]$$
$$- [p(x = 1) + p(x = 0)] = p(x = 4) + p(x = 3) + p(x = 2)$$
$$= \frac{2}{21} + \frac{3}{21} + \frac{4}{21} = \frac{9}{21}$$

4/ أحسب العدد اليومي المتوسط لأعطاب الحاسوب.

$$E(x) = \sum x_i * p(x_i) = \frac{25}{21} = 1.19 \cong 1$$

التمرين الثاني:

X: مدة المكالمة الهاتفية التي تصل إلى مكتب معين بالدقائق:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{\alpha x}{2}} & si\ x \geq 0 \\ 0 & si\ x < 0 \end{cases}$$

1/ عين قيمة الثابت α.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1\ ; \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha x}{2}}\, dx = 1\ \ ; \frac{-2}{\alpha}\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha x}{2}}\, dx = 1$$

$$\frac{-2}{\alpha}\left[e^{-\frac{\alpha x}{2}}\right]_0^{+\infty} = 1\ ; \frac{-2}{\alpha} * (0 - 1) = 1\ \ ;\ \frac{2}{\alpha} = 1\ ; \alpha = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & si\ x \geq 0 \\ 0 & si\ x < 0 \end{cases}$$

2/ أحسب احتمال أن تفوق مدة مكالمة وصلت إلى هذا المكتب 03 دقائق.

$$p(x > 3) = \int_{3}^{+\infty} e^{-x}\, dx = [-e^{-x}]_3^{+\infty} = (0 + e^{-3}) = e^{-3}$$

3/ أحسب احتمال أن لا تفوق مكالمة وصلت إلى هذا المكتب 03 دقائق.

$$p(x < 3) = 1 - p(x > 3) = 1 - e^{-3}$$

4/ أحسب احتمال أن تفوق مدّة مكالمة واحدة على الأقل من بين ثلاثة مكالمات وصلت إلى هذا المكتب دقيقتين.

$$p(x > 2) = \int_{2}^{+\infty} e^{-x}\, dx = [-e^{-x}]_{2}^{+\infty} = (0 + e^{-2}) = e^{-2}$$

الطريقة الاولى ليكن y هو عدد المكالمات التي تفوق دقيقتين من بين 3 مكالمات

$$p(y > 1) = p(y = 1) + p(y = 2) + p(y = 3)$$

$$\begin{aligned} p(y \geq 1) &= C_3^1 \times p(x > 2) \times p(x < 2) \times p(x < 2) + C_3^2 \times p(x > 2) \\ &\quad \times p(x > 2) \times p(x < 2) + C_3^3 \times p(x > 2) \times p(x > 2) \times p(x > 2) \\ &= e^{-2} \times (1 - e^{-2}) \times (1 - e^{-2}) + e^{-2} \times e^{-2} \times (1 - e^{-2}) \\ &\quad + e^{-2} \times e^{-2} \times e^{-2} \\ &= 3e^{-2} - 6e^{-4} + 3e^{-6} + 3e^{-4} - 3e^{-6} + e^{-6} \\ &= 3e^{-2} - 3e^{-4} + e^{-6} = 0.3535 \end{aligned}$$

باستخدام الحادث العكسي

$$\begin{aligned} p(y \geq 1) &= 1 - p(y < 1) = 1 - p(y \leq 0) = 1 - p(x = 0) \\ &= 1 - [p(x < 2) \times p(x < 2) \times p(x < 2)] \\ &= 1 - [(1 - e^{-2}) \times (1 - e^{-2}) \times (1 - e^{-2})] = 1 - [(1 - e^{-2})^3] \\ &= 1 - (0.86466)^3 = 0.3535 \end{aligned}$$

5/ أحسب المدة المتوسطة وتباين مدّة المكالمات التي تصل إلى هذا المكتب.

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \times f(x)\, dx = \int_{0}^{+\infty} x \;\; e^{-x}\, dx$$

نستعمل التكامل بالتجزئة

$$\int U \times V' = [U \times V] - \int U' \times V$$

$$U = x \qquad U' = 1$$

$$V = -e^{-x} \qquad V' = e^{-x}$$

$$\int_0^{+\infty} x \ \ e^{-x}\,dx = [-x \ \times e^{-x}]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} - e^{-x} dx$$

$$\int_0^{+\infty} x \ \ e^{-x}\,dx = (0-0) + [-e^{-x}]_0^{+\infty} = \big(0-(-1)\big) = 1$$

حساب التباين :

$$v(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \times f(x)\,dx - E^2(x)$$

$$v(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \times \ \ e^{-x}\,dx - E^2(x)$$

$$\int U \times V' = [U \times V] - \int U' \times V$$

$$U = x^2 \qquad U' = 2x$$

$$V = -e^{-x} \qquad V' = e^{-x}$$

$$\int_0^{+\infty} x^2 \times \ \ e^{-x}\,dx = [-x^2 \ \times e^{-x}]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} x\, e^{-x} dx$$

$$\int_0^{+\infty} x^2 \times \ \ e^{-x}\,dx = 2\int_0^{+\infty} x\, e^{-x} dx = 2 \times 1 = 2$$

$$v(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \times f(x)\,dx - E^2(x) = 2 - 1^2 = 1$$

<u>التمرين الرابع:</u>

x يمثل عدد الثلاجات المباعة في اليوم لبائع الأجهزة الكهرومنزلية

x_i	2	3	4	5	6	$\sum$
$p(x = x_i)$	0,10	0,25	0,35	0,19	0,11	1

$x_i \times p(x_i)$	0.20	0.75	1.4	0.95	0.66	3.96
${x^2}_i \times p(x_i)$	0.4	2.25	5.6	4.75	3.96	16.96

علما أنّ الربح المحقق في كل ثلاجة يقدر بــ 1000 دج. أحسب:

1) متوسط عدد الثلاجات المباعة في اليوم.

$$E(x) = \sum x_i \times p(x_i) = 3.96 \cong 4$$

2) قيمة التباين لهذا المتغير.

$$V(x) = \sum {x^2}_i \times p(x_i) - E^2(x) = 16.96 - 3.96^2 = 1.2784$$

3) أحسب الربح المتوسط في اليوم E(y).

$$y = 1000\,x\ ; E(y) = E(1000\,x)\,,$$
$$E(y) = 1000\,E(x) = 1000 \times 3.96 = 3960$$

4) قيمة التباين للربح (y).

$$y = 1000\,x\ ; V(y) = V(1000\,x)\,,$$
$$V(y) = 1000^2\,V(x) = 1000000 \times 1.2784 = 1278400$$

<u>التمرين الخامس:</u>

x يمثل عدد الحلويات المباعة في اليوم

	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	$\sum$
P(x=x_i)	*0,05*	*0,07*	*0,10*	*k*	*0,15*	0,13	0,012	0,09	0,08	0,06	0.742+k
$p(x = x_i)$	*0,05*	*0,07*	*0,1*	*0,258*	*0,15*	*0,13*	*0,012*	*0,09*	*0,08*	*0,06*	1
$p(x_i \le x)$	*0,05*	*0,12*	*0,22*	*0,478*	*0,628*	*0,758*	*0,77*	*0,86*	*0,94*	*1*	
$x_i \times p(x_i)$	*1,5*	*2,17*	*3,2*	*8,514*	*5,1*	*4,55*	*0,432*	*3,33*	*3,04*	*2,34*	34,176
${x^2}_i \times p(x_i)$	45	67,27	102,4	280,962	173,4	159,25	15,552	123,21	115,52	91,26	1173,824

1) أوجد قيمة الثابت k.

$$\sum p(x_i) = 1 \quad ; 0.742 + k = 1 \quad ; k = 1 - 0.742 = 0.258$$

2) أوجد دالة التوزيع المتجمع.

$$F(x) = \begin{cases} 0.05 & si \;\; x \leq 30 \\ 0.12 & si \;\; x \leq 31 \\ 0.22 & si \;\; x \leq 32 \\ 0.478 & si \;\; x \leq 33 \\ 0.628 & si \;\; x \leq 34 \\ 0.758 & si \;\; x \leq 35 \\ 0.77 & si \;\; x \leq 36 \\ 0.86 & si \;\; x \leq 37 \\ 0.94 & si \;\; x \leq 38 \\ 1 & si \;\; x \leq 39 \end{cases}$$

3) أحسب المنوال.

$$M_o \equiv p_{max}(x_i)\,; M_o \equiv 0.258 \;\; ; \; M_o = 33$$

4) نعتبر الربح المحقق يأخذ العلاقة التالية: y=50x+8 أحسب التوقع الرياضي والتباين لهذا المتغير.

$$y = 50x + 8 \quad ; E(y) = E(50\,x + 8) \quad ; E(y) = 50 \times E(x) + 8$$

$$E(x) = \sum x_i \times p(x_i) = 34.176 \cong 34$$

$$E(y) = 50 \times E(x) + 8 = 50 \times 34.176 + 8 = 1716.8$$

$$y = 50x + 8 \quad ; V(y) = V(50\,x + 8) \quad ; V(y) = 50^2 \times V(x)$$

$$V(x) = \sum x^2{}_i \times p(x_i) - E^2(x) = 1173.824 - 34.176^2 = 5.825024$$

$$V(y) = 50^2 \times V(x) = 50^2 \times 5.825024 = 14562.56$$