ch03

EDP — EDO

$Y = Y(x)$

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = g(x) \quad --- (1)$$

$$x + y' = yx$$

$$x + y' - xy = 0$$

$F(x, y, y') = g(x)$ E.d. d'ordre 1

$F(x, y, y', y'') = h(x)$ E.d. d'ordre 2

$t + y' = e^{t}$ edo d'ordre 1

$t + y'' = e^{-t}$ " d'ordre 2

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

equation diff ordinaire Homogène

Déf 3 : on appelle solution ou intégrale d'EDO, toute fonction vérifiant cette equation

$$F(t, z, z') = y(t) \longrightarrow \text{E.d.o. d'ordre } 1 \qquad z = z(t)$$

Solution

Déf 4 : Résoudre ou intégrer une equation diff, c'est de trouver l'ensemble de toutes ses solutions.

Déf 5 (linéarité) : Une EDO d'ordre n est dite linéaire si elle peut être écrite sous la forme :

$$a_0(t)\,y + a_1(t)\,y' + a_2(t)\,y'' + \cdots + a_n(t)\,y^{(n)} = g(t)$$

$y' + y = t$ edo

$y + y' = t$ edo linéaire

$(y')^2 + y = t$ e.d.o non linéaire

$y'y = e^t$ " " "

1er ordre

$y'' + y' + y = \cos(t)$ e.d.o. 2nd ordre linéaire.

$(y'' + 2)^5 = t$ " " non-linéaire

Déf 6 : L'equation diff (1) est dite homogène si

$$g(x) = 0.$$

$y' + y + e^{x} = 0$ ← edo

$y' + y = -e^{x}$ edo non homogène

$y' + e^{x} y = 0$ edo linéaire homogène

$y'' + \sin(t) y' + \cos(t) = y$ edo de 2nd ordre linéaire non homogène

$y'' + \sin(t) y' - y = -\cos(t)$

EDO 1er ordre

$$F(x, y, y') = g(x).$$

1) $y' = g(x)$

2) EDO linéaire

3) E. Bernoulli.

1) $y' = g(x)$

$$\int y'(x)\,dx = \int g(x)\,dx$$

$$\boxed{y(x) = G(x) + C}$$

C : constante

G(x) : c'est la primitive de g.

Exemple : Résoudre l'edo suivante.

$$y' = e^{-2t}$$

$$2y' = t + \sin(t)$$

- $y' = e^{-2t} \Rightarrow \int y'(t)dt = \int e^{-2t}dt$

$$y(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t} + C_1$$: C_1 constante

- $2y' = t + \sin(t) \rightarrow y' = \frac{1}{2}(t + \sin(t))$

$$\int y'(t)dt = \frac{1}{2}\int (t + \sin(t))dt = \frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2} - \cos(t)\right) + K$$

2 EDO linéaire de 1ère ordre :

Elle est de la forme :

$$a(t)y' + b(t)y = g(t) \quad \text{—— } (2)$$

$a(t), b(t), g(t)$ fonction dét. continue $\Big)$ $a(t) \neq 0$

- $y_0(t) \rightarrow a(t)y' + b(t)y = 0$ EDO homog
  EDOSSM

- $y_p(t) \rightarrow$ Solut partic

$$\boxed{y(t) = y_0(t) + y_p(t)}$$

1. on cherche la solution de EDO homogène (EDSHa)

$$a(t)\,y' + b(t)\,y = 0 \qquad y' =$$

$$y' = \frac{dy}{dt}$$

$$a(t)\,\frac{dy}{dt} = -\,b(t)\,y$$

$$\frac{dy}{y} = -\,\frac{b(t)}{a(t)}\,dt$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int -\frac{b(t)}{a(t)}\,dt$$

$$\ln|y| = \int -\frac{b(t)}{a(t)}\,dt + K$$

$$|y| = e^{A(t)+K}$$

$$y = \pm e^{A(t)+K} = \pm e^{A(t)} e^{K} = Ce^{A(t)}$$

$$y_0(t) = C\exp\left(-\int \frac{b(t)}{a(t)}\,dt\right)$$

exp

$a(t)y' + b(t)y = g(t)$

$$y' + y = e^t$$

$$y' + y = 0$$

$$y_0(t) = C\exp\left(-\int dt\right)$$

$$y_0(t) = Ce^{-t}$$

$$\overbrace{a(t)}^{c}\,y' + \overbrace{b(t)}\,y = g(t) \quad \text{---} (3) \qquad a(t) \neq 0$$

1. La méthode d'identification
   - a, b constant
   - $g(t)$:
     - poly
     - fonct trig
     - e^{x}

2. La méthode de variation de la constante de Lagrange.

La méthode de Lagrange.

$$Y_0(t) = C\exp\left(-\int \frac{b(t)}{a(t)}\,dt\right)$$

$$y(t) = C(t)\exp\left(-\int \frac{b(t)}{a(t)}\,dt\right) \quad \text{---} (*)$$

$$y'(t) = C'(t)e^{A(t)} + C(t)\dot{A}(t)e^{A(t)} \quad \text{---} (**)$$

on remplace $(*)$ $(**)$ dans (2), on obtient

$$a(t)\left(c'(t)e^{A(t)} + c(t)A'(t)e^{A(t)}\right) + b(t)c(t)\exp\left(-\int \frac{b(t)}{a(t)}dt\right) = g(t)$$

$$a(t)c'(t)e^{A(t)} + \left(\cancel{a(t)}c(t)\left(-\frac{b(t)}{\cancel{a(t)}}\right)e^{A(t)}\right) + \left(b(t)c(t)e^{A(t)}\right) = g(t)$$

$$a(t)c'(t)e^{A(t)} = g(t)$$

$$c'(t) = \frac{g(t)}{a(t)} \cdot e^{-A(t)}$$

$$y(t) = c(t)\exp\left(-\int \frac{b(t)}{a(t)}dt\right)$$

$$\int c'(t)\,dt = \int \frac{g(t)}{a(t)} \cdot e^{-A(t)}\,dt$$

$$c(t) = \int \frac{g(t)}{a(t)} \cdot e^{-A(t)}\,dt + k$$

$$Y(t) = \left(\int \frac{g(t)}{a(t)} e^{-A(t)}\,dt + k \right) \exp A(t)$$

$$Y(t) = \underbrace{e^{A(t)} \int \frac{g(t)}{a(t)} e^{-A(t)}\,dt}_{Y_p(t)} + \underbrace{k e^{A(t)}}_{Y_0(t)}$$

$$y(t) = y_p(t) + y_c(t)$$

$$y' + y = e^{-t}$$

La méthode de variation de la constante.

$$y_0(t) = C \exp\Bigg(\underbrace{\int -\frac{b(t)}{a(t)}\,dt}_{A(t)}\Bigg)$$

$$y(t) = C(t)\, e^{A(t)}$$

$$y'(t) = C'(t)\, e^{A(t)} + C(t)\, A'(t)\, e^{A(t)}$$

$$A(t) = \int -\frac{b(t)}{a(t)}\,dt$$

$$\left(\int f(t)\,dt\right)' = f(t)$$

$$A'(t) = -\frac{b(t)}{a(t)}$$

$$y'(t) = c'(t)e^{A(t)} - c(t)\frac{b(t)}{a(t)}e^{A(t)}$$

$$a(t)y' + b(t)y = g(t) \quad \text{—— } ②$$

$$a(t)\left(c'(t)e^{A(t)} - c(t)\frac{b(t)}{a(t)}e^{A(t)}\right) +$$

$$b(t)\,c(t)e^{A(t)} = g(t)$$

$$a(t)c'(t)e^{A(t)} - c(t)\cancel{b(t)e^{A(t)}} + \cancel{b(t)}c(t)e^{A(t)} = g(t)$$

$$a(t)c'(t)e^{A(t)} = g(t)$$

$$c'(t) = \frac{g(t)}{a(t)}e^{-A(t)}$$

$$\int c'(t)\,dt = \int \frac{g(t)}{a(t)}e^{-A(t)}\,dt$$

$$c(t) = \int \frac{g(t)}{a(t)}e^{-A(t)}\,dt + K$$

La solu de (2) :

$$y(t) = \left(\int \frac{g(t)}{a(t)} e^{-A(t)} dt + k \right) e^{A(t)}$$

$$= \underbrace{\left(\int \frac{g(t)}{a(t)} e^{-A(t)} dt \right) e^{A(t)}}_{y_p(t)} + \underbrace{k e^{A(t)}}_{y_0(t)}$$

$$y(t) = y_p(t) + y_0(t)$$

Exemple : Résoudre l'edo :

$$2y' + ty = e^{t} \quad \text{— } (*)$$

$$y_0(t) = C \exp\left(-\int \frac{b(t)}{a(t)}\,dt\right)$$

ESSM : $2y' + ty = 0$

$$y_0(t) = C \exp\left(-\int \frac{t}{2}\,dt\right)$$

$$y_0(t) = C \exp\Bigg(\underbrace{-\frac{t^2}{4}}_{A(t)}\Bigg)$$

$$y(t) = C(t)\, e^{-t^2/4}$$

$$y'(t) = C'(t)\, e^{-t^2/4} - C(t)\frac{t}{2} e^{-t^2/4}$$

on remplace $y(t)$, $y'(t)$ dans $\circledast$

$$2y' + ty = e^{t}$$

$$2\left(c'(t) e^{-t^2/4} - c(t)\frac{t}{2} e^{-t^2/4}\right) + t\, c(t) e^{-t^2/4} = e^{t}$$

$$2c'(t) e^{-t^2/4} - \cancel{c(t) t e^{-t^2/4}} + \cancel{c(t) t e^{-t^2/4}} = e^{t}$$

$$2c'(t) e^{-t^2/4} = e^{t}$$

$$c'(t) = \frac{1}{2}\left(e^{t + t^2/4}\right)$$

1 $c(t) = \int c'(t)\,dt = \int \frac{1}{2} e^{t+t^2/4}\,dt$

$= \frac{1}{2}\int e^{t+\frac{t^2}{4}}\,dt$

$= \frac{1}{2}\int e^{t}\cdot e^{t^2/4}\,dt + K$

$y(t) = \left(\frac{1}{2} B(t) + k\right) e^{-t^2/4}$

$y(t) = \frac{1}{2} B(t) e^{-t^2/4} + k e^{-t^2/4}$

Sol gén de edo (*)

Exemple

$$3y' + y = e^{-x} \quad \ldots \quad (4)$$

1. ESSM: $3y' + y = 0$

$$y_0(x) = C\exp\left(-\int \frac{1}{3}\,dx\right)$$

$$y_0(x) = C e^{-\frac{x}{3}}$$

$$y(x) = C(x)\, e^{-x/3}$$

$$y'(x) = C'(x)\, e^{-\frac{x}{3}} - \frac{1}{3} C(x) e^{-x/3}$$

l'edo (4) devient :

$$3\left(c'(x)e^{-\frac{x}{3}} - \frac{1}{3}c(x)e^{-x/3}\right) + c(x)e^{-x/3} = e^{-x}$$

$$3c'(x)e^{-x/3} - \cancel{c(x)e^{-x/3}} + \cancel{c(x)e^{-x/3}} = e^{-x}$$

$$3c'(x)e^{-x/3} = e^{-x}$$

$$c'(x) = \frac{1}{3}e^{-x+x/3}$$

$$\frac{a}{e^{-x}} = ae^{x}$$

$$c(x) = \int c'(x)\,dx = \int \frac{1}{3}e^{-\frac{2x}{3}}\,dx + k$$

$$e^{ax} \to \frac{1}{a}e^{ax}$$

$$C(x) = \frac{1}{3}\left(-\frac{3}{2}e^{-\frac{2}{3}x}\right) + K$$

$$C(x) = -\frac{1}{2}e^{-2/3\,x} + K$$

$$Y(x) = \left(-\frac{1}{2}e^{-2/3\,x} + K\right)e^{-x/3}$$

$$Y(x) = \underbrace{-\frac{1}{2}e^{-x}}_{Y_p(x)} + \underbrace{K e^{-x/3}}_{Y_g(x)}$$

la méthode d'identificate $a(t)y' + b(t)y = g(t)$

$Y_0 = Ke^{ax}$ Y_p $Y = Y_0 + Y_p$

$g(x)$	Y_p
$P_n(x)$	$Q_n(x)$
$P_n(x)e^{ax}$	$Y_p = q_n(x)e^{ax}$ $Y_p = x q_n(x) e^{ax}$ si $Y_0(x) = Ke^{ax}$

$$y' + y = x^2$$

$$y_p(x) = ax^2 + bx + c$$

$$y_p'(x) = 2ax + b$$

$$2ax + b + ax^2 + bx + c = x^2$$

$$ax^2 + (2a+b)x + b + c = x^2$$

par iden : $\begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 0 \end{cases}$

$b + c = 0$

$\boxed{a = 1}$ $\boxed{b = -2}$ $\boxed{c = 2}$

$$y_p(x) = x^2 - 2x + 2$$

ESSM1 $y' + y = 0$

$$y_0(x) = C\exp\left(-\int dx\right)$$

$$y_0(x) = Ce^{-x}$$

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x) = Ce^{-x} + x^2 - 2x + 2$$

$$y' + y = x^2$$

$$y_0(x) = c\,e^{-x}$$

$$y = c(x)\,e^{-x}$$

$$y' = c'(x) \cdot e^{-x} - c(x)\,e^{-x}$$

$$c'(x)\,e^{-x} - c(x)\,e^{-x} + c(x)\,e^{-x} = x^2$$

$$c'(x)\,e^{-x} = x^2$$

$$c'(x) = x^2 e^{x}$$

$$C(x) = \int x^2 e^x \, dx + k$$

$$u = x^2 \rightarrow u' = 2x$$

$$v' = e^x \rightarrow v = e^x$$

$$C(x) = \left(\left[x^2 e^x \right] - \int 2x e^x \, dx \right) + k$$

$$u = 2x \qquad u' = 2$$

$$v' = e^x \rightarrow v = e^x$$

$$C(x) = x^2 e^x - \left((2x e^x) - 2e^x \right) + k$$

$$C(x) = (x^2 - 2x - 2) e^x + k)$$

$$y(x) = \left(\left(x^2 - 2x - 2\right)e^{x} + k\right)e^{-x}$$

$$y(x) = \underbrace{x^2 - 2x - 2}_{y_{pc}} + \underbrace{ke^{-x}}_{y_{cs}}$$