Chapitre 03

- EDP
- Fonction spécides
- EDO

EDO

- Linéarité
  - Non linéaire
  - Linéaire

EDO

- Ordre
  - 2^{nd} Ordre
    - Equations incomplètes
    - Equation différentielle linéaire
      - Equation différentielle linéaire de 2^{nd} ordre à cofficients constantes sans 2^{nd} membre
      - Equation différentielle linéaire de 2^{nd} ordre à cofficients constantes avec 2^{nd} membre
      - Equation différentielle linéaire de 2^{nd} ordre à cofficients variables sans 2^{nd} membre
      - Equation différentielle linéaire de 2^{nd} ordre à cofficients variables avec 2^{nd} membre
  - 1^{er} Ordre
    - Edo de la forme: $y' = g(t)$
    - Equation à variables séparables (ou séparées):
    - Equations différentielles linéaires du premier ordre
    - Equations de Bernoulli

- EDP
  - EDP linéaire de 2^{nd} ordre
    - forme générale
    - Classification
  - EDP linéaire de 1^{er} ordre
    - forme générale
    - Méthodes de résolution
      - 1_ Méthode de séparation des variables:
      - 2. Méthode des caractéristiques:

- Fonction spéciales
  - Fonction Gamma
  - Fonction Bêta
  - Fonction Zéta

Chapitre 03 : Equation différentiel ordinaire (EDO)
Equation aux dérivées partiels (EDP)

Equation différentielle ordinaire EDO

Définitions

Définition 1 : On appelle équation différentielle une relation entre la variable indépendante x. La fonction inconnue $y = f(x)$ et un certain nombre de ces dérivées, on écrit

$$(1) \ldots \quad F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = g(x)$$

$g(x)$: le 2^{nd} membre

Exemple :

$$t z'(t) + z(t) = 2t \cos(t)$$
$$v''(x) + v(x) = \alpha t^2$$
$$Y(\theta) - Y''(\theta) = g(\theta) + \theta^2$$

Rq : Si la fonction inconnue de l'équation différentielle dépond d'une seul variable indépendante, l'équation différentielle est dite ordinaire (EDO)

Définition 2 : On appelle ordre de l'équation différentielle l'ordre de la dérivée la plus élevée dans l'équation.

Exemple :

$$2y' + t = 3y \longrightarrow \text{edo d'ordre } 1$$
$$3y'' - yy' = t + 2 \longrightarrow \text{edo d'ordre } 2$$

Définition 3 : On appelle intégrale ou solution d'une équation différentielle toute fonction vérifiant cette équation.

Définition 4 : Résoudre ou intégrer une equation différentielle, c'est de trouver l'ensemble de toutes ses solutions.

Linéarité : Une EDO d'ordre n est dite Linéaire si elle peut-être écrite sous la forme :

$$a_n(x)\, y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = g(x) \quad \dots (*)$$

Exemple :

$t\, y^2 + y' = e^t \longrightarrow$ edo non linéaire.

$y'' + y' + y = \cos(t) \longrightarrow$ edo linéaire

$(y' + 2)^3 = y \longrightarrow$ edo non linéaire

Homogeneité :

L'équation différentielle (1) s'appelle **homogène si** le 2^{nd} membre

$$g(x) = 0$$

Exemple :

$y'' + y' + 3y = 0$ edo homogène

$y'' + y' + 3 = 0$ 〃 non homogène

$y' + y + e^t = 0$ 〃 〃 〃

Problème de Cauchy

On ne s'intéresse pas toujours à toutes les solution de l'edo (1), mais à certaines d'entre elle qui vérifient des conditions au problème posé.

- Dans le cas d'une edo du premier ordre, on cherche une solution y de l'equation:

$$F(x,y,y')=0$$

définie dans un intervalle contenant une valeur donnée x_0, et prenant en ce point une valeur $y_0=y(x_0)$.

$$\begin{cases} F(x,y,y')=0 \\ y_0=y(x_0). \end{cases}$$

(x_0,y_0) sont appelées les conditions initiales du problème.

- Dans le cas d'une edo du seconde ordre:

$$F(x,y,y',y'')=0$$

On cherche souvent une solution y, définie dans un intervalle contenant la valeur donnée x_0 et prenant en ce point, ainsi que sa dérivée.

$$\begin{cases} F(x,y,y',y'')=0 \\ y(x_0)=\alpha \quad , \quad y'(x_0)=\beta \end{cases}$$

(x_0,α,β) sont appelées les conditions initiales du problème.

Le **problème de Cauchy** est la recherche des solutions d'une equation différentielle vérifiant des conditions initiales imposées.

Exemple:

$$\begin{cases} y'+y=e^t \\ y(0)=10 \end{cases} \longleftarrow \text{condition initiale}$$

$$\begin{cases} y''-y'=y-\sin(2t) \\ y(0)=1 \quad , \quad y'(\frac{\pi}{2})=2 \end{cases}$$

conditions initiales

1. EDO d'ordre 1

1.1 Edo de la forme : $y' = g(x)$

On résoud cette équation en utilisant le principe suivant :

$$\boxed{f(x) = \int f'(x)\,dx + C}$$

Exemple :

- $z' = \frac{1}{t} \xrightarrow{z = z(t)} \int z'(t)\,dt = \int \frac{1}{t}\,dt$

  $z(t) = \ln|t| + k$

- $y'' = t^2 + 2 \xrightarrow{y = y(t)} \int y''(t)\,dt = \int (t^2 + 2)\,dt$

  $y'(t) = (\frac{t^3}{3} + 2t) + C$

  $\int y'(t)\,dt = \int (\frac{t^3}{3} + 2t + C)\,dt$

  $y(t) = \frac{t^4}{12} + t^2 + Ct + K$

1.2 - Equation à variables séparables (ou séparées) :

On considère une EDO de la forme

$$y' = \underbrace{\frac{dy}{dx}}_{(1^{er}\, m)} = \underbrace{g_1(x) \cdot g_2(y)}_{(2^{ed}\, m)} \quad \dots (1)$$

où le (2^{ed} m) est le produit d'une fonction g_1 dépendant seulement de x par une fonction g_2 dépendant seulement de y

On suppose que : ($g_2(y) \neq 0$), l'EDO (1) peut s'écrire sous la forme

$$\frac{dy}{g_2(y)} = g_1(x)\,dx \quad \dots (2)$$

En intégrant le (1^{er} m) de (2) par rapport à y, et le (2^{ed} m) de (2) par rapport à x. on trouve :

$$\int \frac{dy}{g_2(y)} = \int g_1(x)\,dx + C \qquad (C : \text{constante})$$

Ce qui donne la solution sous forme implicite : $G_2(y) + G_1(x) = C$

où
- G_2 : la primitive de $\frac{1}{g_2(y)}$
- G_1 : " " " $g_1(x)$

Exemple : Résoudre l'edo : $2xy' = y+1$;

1.3 - Equations différentielles linéaires du premier ordre :

Elle sont de la forme :

$$\boxed{a(x)\,y' + b(x)\,y = g(x)} \quad \ldots\ (3)$$

où $\begin{cases} a,\ b,\ g \text{ sont des fonctions données, continues sur un intervalle } I. \\ a(x) \neq 0 \quad \forall x \in J \subset I \end{cases}$

Toute solution de (3) est de la forme $\boxed{y_p(x) + y_0(x)}$ où

$y_p(x) \longrightarrow$ La solution particulière

$y_0(x) \longrightarrow$ La solution générale de l'equation homogène associée :

$$\boxed{a(x)\,y' + b(x)\,y = 0} \quad \ldots\ (4)$$

2.2.1 Recherche des solutions $y_0(x)$ de l'équation homogène (4) :

Les solutions de l'équation homogène (4) sont de la forme :

$$\boxed{y_0(x) = K \exp\left[-\int \frac{b(x)}{a(x)}\,dx\right]}$$

K : constante

2.2.2 Recherche d'une solution particulière $y_p(t)$:

On a deux méthodes pour déterminer la solution $y_p(x)$:

- La méthode de variation de la constante de Lagrange.
- La méthode d'identification.

• La méthode de variation de la constante de Lagrange.

$y_0(x)$ étant une solution non nulle de (4), on définit une fonction auxiliaire inconnue $K(x)$ tq :

$$y(x) = K(x)\exp\left[-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx\right] = K(x)e^{-F(x)} \quad ; F(x) = -\int \frac{b(x)}{a(x)}dx$$

soit solution de (3)

on calcule : $y'(x) = K'(x)e^{-F(x)} - K(x)F'(x)e^{-F(x)}$ ....(5)

en remplaçant (5) dans (3) on obtient :

$$K'(x) = \frac{g(x)}{y_0(x)},$$

se qui permet calculer $K(x)$:

$$K(x) = \int \frac{g(x)}{y_0(x)}dx + c$$

d'où $\quad y(x) = \left(\int \frac{g(x)}{y_0(x)}dx + c\right)e^{-F(x)}$

$$y(x) = \underbrace{\left(\int \frac{g(x)}{y_0(x)}dx\right)e^{-F(x)}}_{y_p(x)} + \underbrace{c\,e^{-F(x)}}_{y_0(x)}$$

$$y(x) = y_p(x) + y_0(x).$$

Exemple :

Résoudre l'edo :

$$2y' + y = e^{-x} \quad (*) \quad ; \qquad y = y(x)$$

Equation sans 2nd membre : $\quad 2y' + y = 0$

$$y_0 = C \exp\left(-\int \frac{1}{2}\,dx\right)$$

$$y_0 = C e^{-\frac{x}{2}}$$

Soit $y(x)$ la solution générale de $(*)$ tel que :

$$y(x) = C(x)\, e^{-\frac{x}{2}}$$

$$y'(x) = C'(x)\, e^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{2} C(x)\, e^{-x/2}$$

En remplaçant y', y dans $(*)$, on obtient :

$$2\left(C'(x)\, e^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{2} C(x)\, e^{-x/2}\right) + C(x)\, e^{-\frac{x}{2}} = e^{-x}$$

$$2C'(x)\, e^{-\frac{x}{2}} - \cancel{C(x)\, e^{-\frac{x}{2}}} + \cancel{C(x)\, e^{-\frac{x}{2}}} = e^{-x}$$

$$2C'(x)\, e^{-x/2} = e^{-x}$$

$$C'(x) = \frac{1}{2} e^{-x/2}$$

$$C(x) = \int C'(x)\,dx = \int \frac{1}{2} e^{-x/2}\,dx = -e^{-x/2} + K \qquad (K : \text{constante})$$

donc $\quad y(x) = \left(-e^{-x/2} + K\right) e^{-x}$

Ainsi $\quad \boxed{y(x) = K e^{-x} - e^{-\frac{3}{2}x}}$

1.4 - Equations de Bernoulli

l'équation différentielle

$$\boxed{y' + p(x)y = q(x)y^n} \quad \dots (2') \qquad y = y(x) \;;\; n \in \mathbb{R}$$

est appelée équation de Bernoulli.

- Cette équation est linéaire si : $n =$ ou $n = 1$
- Elle est non linéaire pour tout $n \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$.
- Pour la résolution de (2') on fait la transformation suivante :

$$z = y^{1-n} \iff z = \frac{y}{y^n} \iff y = y^n z \qquad (n \neq 1)$$

donc l'équation (2') devient une équation linéaire, en effet ;

on a : $z' = (1-n)y^{-n}y' \Rightarrow y' = \frac{1}{1-n}\, y^n z'$

et

$$y = y^n z$$

d'après (2') :

$$\frac{1}{1-n}\, y^n z' + p(x)\, y^n z = q(x)\, y^n$$

c-à-d : $z' + (1-n)\,p(x)\,z = (1-n)\,q(x)$ est une edo linéaire de 1er ordre

Exemple : $y' + \frac{1}{x}y - x^3 y^2 = 0 \quad \dots (*)$

est une équation de Bernoulli : $(n = 2 \;;\; p(x) = \frac{1}{x} \;;\; q(x) = x^3)$.

on fait la transformation suivante : $z = y^{1-2} = y^{-1} = \frac{1}{y}$

$$z' = -\frac{1}{y^2} \cdot y' \Rightarrow y' = -y^2 z'$$

et $y = y^2 z$

donc (*) devient : $-y^2 z' + \frac{1}{x} y^2 z = x^3 y^2$

$$z' - \frac{1}{x} z = -x^3 \longleftarrow \text{EDO linéaire de } 1^{er} \text{ ordre.}$$

2. EDO d'ordre 2

Définition: Une équation différentielle du deuxième (second = 2nd) ordre est de la forme :

$$y'' = F(x, y, y')$$

On a deux classes principales d'équations différentielles du deuxième ordre :

- Equation différentielle linéaire
  - à coefficients constantes.
  - à coefficients non constantes.
  - avec second membre
  - sans second membre.

- Equation incomplète.

On commence par le deuxième classe :

2.1 Equations incomplètes

2.1.1. Equation sous la forme : $\boxed{y'' = f(x, y')}$

On se ramène au équation de premier ordre en posant :

$$z = y' \ldots \quad (3')$$

alors :

$$z' = y'' = f(x, y') = f(x, z)$$

pour obtenir y, il doit résoudre l'équation (3').

Exemple : Intégrer l'équation différentielle :

$$(1 + x^2)y'' + xy' = ax \qquad a \in \mathbb{R}$$

2.1.2. Equation sous la forme: $\boxed{y'' = g(x)}$

$$\int y''(x)\,d = \int g(x)\,dx + K$$

$$y'(x) = g_1(x) + K_1$$ où g_1: la primitive de g.
K_1: constante.

$$\int y'(x)\,dx = \int (g_1(x) + K_1)\,dx$$

$$y(x) = g_2(x) + K_1 x + K_2$$ où g_2: La primitive de g_1
K_2: contante.

Exemple:

Intégrer l'edo suivante: $y'' - 5t^2 = 0$

$$y'' - 5t^2 = 0$$

$$y'' = 5t^2$$

$$y' = \int y''(t)\,dt = \int 5t^2\,dt = \frac{5t^3}{3} + \alpha$$ (α: constante)

$$y = \int y'(t)\,dt = \int \left(\frac{5t^3}{3} + \alpha\right) dt$$

$$\boxed{y(t) = \frac{5t^4}{12} + \alpha t + \beta}$$ (β: cst)

2.2 _ Equation différentielle linéaire

Equation différentielle linéaire de 2^{nd} ordre à cofficients constantes sans 2^{nd} membre

S'écrit sous la forme :

$$\boxed{ay'' + by' + cy = 0} \quad \cdots (4')$$

a, c, b sont des réels.

- Si $(a = 0)$ et $(b = 0)$ (4') c'est pas une equation différentielle.
- Si $(a = 0)$ et $(b \neq 0)$ (4') est une equation différentielle du 1^{er} ordre.

$$\boxed{by' + cy = 0} \xrightarrow{\text{La solution}} y' = Ke^{-\frac{cx}{b}} \qquad K = \text{constante}$$

- Si $(a \neq 0)$, on pose $y = e^{rx} \longrightarrow y' = re^{rx} \longrightarrow y'' = r^2 e^{rx}$, on a

$$ay'' + by' + cy = ar^2 e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = \underbrace{e^{rx}}_{\neq 0}(ar^2 + br + c) = 0$$

donc $\boxed{ar^2 + br + c = 0}$ (*) $\longleftarrow$ polynôme caractéristique

$\boxed{\Delta > 0}$ ■ $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ (*) admet 2 racines $\neq$ r_1, r_2'

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad\qquad r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

et l'équation différentielle (4') admette des solutions sous la forme :

$$\boxed{y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}} \; ; \; C_1 . C_2 \text{ constantes.}$$

$\boxed{\Delta = 0}$ ▪ $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ ⊛ admet une racine double r

et l'équation différentielle (4') admette des solutions sous la forme :

$$\boxed{y = (C_1 x + C_2)e^{rx}} \; ; \; C_1 . C_2 \text{ constantes.}$$

$\boxed{\Delta < 0}$ ▪ $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ ⊛ admet deux racines complexes conjuguées :

$$r_1 = \frac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \; ; \quad r_2 = \frac{-b - i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

$$r_1 = \alpha + i\beta \qquad r_2 = \alpha - i\beta$$

et l'équation différentielle (4') admette des solutions sous la forme :

$$\boxed{y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)\right)} \quad C_1 . C_2 : \text{constante}$$

Exemple : Résoudre les équation diff suivantes,

- $W'' + 4W = 0$ $\qquad W = W(t)$
- $z'' + z' = -\frac{z}{2}$ $\qquad z = z(x)$
- $y'' = -(2y' + y)$ $\qquad y = y(t)$

Equation différentielle linéaire de 2nd ordre à coefficients constantes avec 2nd membre

S'écrit sous la forme : $\boxed{ay'' + by' + cy = g(x)}$ ... (5')

$g(x)$ s'appelle le 2nd membre (fonction de x).

On obtient les solutions de l'équation (5') en ajoutant à la solution générale de (4'), une solution particulière de (5')

On étudier les cas selon la forme de 2nd membre.

1er cas : $g(x) = P(x)e^{\alpha x}$ (P : polynôme ; α : nombre complexe)

dans ce cas l'équation (5') admette une solution de la forme

$$\boxed{y_p = R(x)e^{\alpha x}} \quad (R : \text{polynôme})$$

tq :

Si α n'est pas racine de (*) $\longrightarrow$	$d^{\circ}(R) = d^{\circ}(P)$
Si α est racine simple de (*) $\longrightarrow$	$d^{\circ}(R) = d^{\circ}(P) + 1$
Si α est racine double de (*) $\longrightarrow$	$d^{\circ}(R) = d^{\circ}(P) + 2$

$\rightarrow$ (*) : polynôme caractéristique : $ar^2 + br + c$

Exemple :

Résoudre :

- $y'' - 4y' + 2y = 5$
- $z'' - 5z' + 6z = 2e^{4t}$
- $y'' - 3y' + 2y = x^2 - 3x + 2$
- $z'' - 2z' + \frac{3z}{4} = \sin(t)$.
- $y'' + y = \cos(t)$

Définition d'une fonction à plusieurs variables

Définition : Une application définie sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ et prenant des valeurs réelles dans $\mathbb{R}$, est appelée fonction à n variables :

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \longmapsto f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

exemple : La préssion P d'un gaz parfait est une fonction de 3 variables

$$P(N, V, T) = \frac{NRT}{V}$$

T : sa température
V : son volume
N : Le nombre de moles
R : une constante.

Dérivées partielles : Les dérivées partielles secondes de la fonction $z = f(x, y)$ sont :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)\right) \qquad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)\right) \qquad \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)\right)$$

exemple : $f(x, y) = y \ln x$

on a : $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) = \frac{-y}{x^2}$; $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) = \frac{1}{x}$

$\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) = 0$; $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y) = \frac{1}{x}$

Théorème de Schwartz :

Soit f une fonction de deux variables, si les dérivées partielles mixtes de second ordre existent et sont $\boxed{\text{continues}}$, alors :

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

pour simplifier la notation on écrit : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

Matrice hessienne :

On appelle matrice hessienne en un point (x_0, y_0) d'une fonction f à 2 variables, la matrice :

$$Q = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

Extrema d'une fonction à deux variables :

Théorème : Soit f une fonction à deux variables x et y.

Si f admet un extremum local en un point (x_0, y_0) et que est dérivable par rapport à x en x_0 et par rapport à y en y_0, alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

Minimum ou maximum ?

Soit f une fonction à deux variables est dérivable deux fois.

Notons par Δ le déterminant de la matrice hessienne Q

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

- Si $\Delta > 0$ et $r = \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} > 0 \Rightarrow (x_0,y_0)$ est un minimum
- Si $\Delta > 0$ et $r = \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} < 0 \Rightarrow (x_0,y_0)$ est un maximum
- Si $\Delta < 0 \Rightarrow (x_0,y_0)$ est un point selle (pas d'extremum)
- Si $\Delta = 0 \Rightarrow$ cas indéterminé.

Exemple : trouver l'extremum de la fonction : $f(x,y) = x^2+y^2$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2y = 0 \Rightarrow y = 0$$

$(0,0)$ est un extremum.

$(0,0)$ est un extremum minimum ou maximum ?

$$\Delta = \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y}\right)^2 = 4$$

$\Delta > 0$ et $\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2} = 2 > 0 \Rightarrow (0,0)$ est un minimum.

Dérivation d'une fonction composé :

Soit $z = f(x,y)$ où $x = e(t)$, $y = h(t)$

On a : $$\frac{\partial}{\partial t} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) \cdot \frac{\partial}{\partial t} e(t) + \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) \cdot \frac{\partial h(t)}{\partial t}$$

exemple : $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$, $x = a\cos t$, $y = a\sin t$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,y)$$

Différentielles

Définition : On appelle différentielle partielle par rapport à x_k d'une fonction f à n variables, l'expression :

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k$$

Définition : On appelle différentielle d'une fonction f à n variables l'expression :

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

(en physique : on l'appelle parfois différentielle total (ou total exacte))

Exemple : Calculer dU de la fonction :

$$U(x.y) = x^2 + y$$

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy$$

$$dU = 2x\, dx + dy$$

Equation aux dérivées partielles EDP

Définition: Une équation aux dérivées partielles (EDP) d'ordre 1 s'écrit:

$$F\left(x, y, u(x,y), \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right) = 0$$

et une EDP d'ordre 2 s'écrit:

$$F\left(x, y, u(x,y), \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}, \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y}\right) = 0$$

Notation:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_x = \dot{u}_x = u'_x$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_{xx} = \ddot{u}_{xx} = u''_{xx}$$

Exemple:

1 - $\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + u(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} = 0$ (Une équation d'onde de choc)

2 - $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0$ (l'équation de Laplace)

3 - $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} = 0$ (variante de l'équation des ondes).

EDP linéaire de 1er ordre

forme générale

La forme générale d'une EDP linéaire de 1er ordre est :

$$a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)\,u = g(x,y)$$

$u = u(x,y)$

Exemple :

1) $y\, v_x - x\, v_y = 2v$ $\qquad v = v(x,y)$

2) $u_t = u_x$ $\qquad u = u(t,x)$

Méthodes de résolution

La résolution d'une EDP nécessite un bagage mathématique important.

Dans ce chapitre on va étudier deux techniques usuelles

- la méthode de séparation des variables.
- La méthode des caractéristiques.

1 - Méthode de séparation des variables :

Soit l'EDP : $\dfrac{\partial u}{\partial y} = y \dfrac{\partial u}{\partial x}$ (1) / $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto u(x,y)$

On pose : $u(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$ $\quad \alpha \gamma \quad \alpha$

X : fonction dépend que de x.
Y : fonction dépend que de y. $\quad ab \cdot cd \quad \frac{a}{c} : \frac{d}{b}$

Donc (1) $\Rightarrow$ $X(x) Y'(y) = y X'(x) Y(y)$

$$\Longrightarrow \frac{X'(x)}{X(x)} = \frac{Y'(y)}{y\,Y(y)} = c \qquad (c \in \mathbb{R})$$

On a donc deux équations différentielles (edo) d'ordre 1 :

$$\left\{ \frac{X'}{X} = c \ (2) \quad ; \quad \frac{Y'}{yY} = c \ (3) \right\} \qquad (c \in \mathbb{R})$$

EDO (2) :

$$\frac{X'}{X} = c \iff \int \frac{X'}{X}\,dx = \int c\,dx$$
$$\iff \ln|X| = cx + k \qquad (k \in \mathbb{R})$$
$$\iff X = K_1 e^{cx} \qquad (K_1 = \pm e^{k})$$
$$\iff \boxed{X(x) = K_1 e^{cx}}$$

EDO (3) :

$$\frac{Y'}{yY} = c \iff \frac{Y'}{Y} = cy$$
$$\iff \int \frac{Y'}{Y}\,dy = \int cy\,dy$$
$$\iff \ln|Y| = \frac{cy^2}{2} + k' \qquad (k' \in \mathbb{R})$$
$$\iff Y = K_2 e^{c\frac{y^2}{2}} \qquad (K_2 = \pm e^{k'})$$
$$\iff \boxed{Y(y) = K_2 e^{c\frac{y^2}{2}}}$$

Donc la solution générale de (1) s'écrit :

$$u(x,y) = X(x)\cdot Y(y) = K_1 e^{cx} \cdot K_2 e^{c\frac{y^2}{2}}$$
$$= K_1 \cdot K_2\, e^{c\left(x+\frac{y^2}{2}\right)}$$

$$\boxed{u(x,y) = K \exp\left(c\left(x+\frac{y^2}{2}\right)\right)} \;/\; K = K_1 \cdot K_2$$

Exercice

Résoudre l'EDP suivante en utilisant la méthode de séparation des variables :

a) $$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad u = u(x,y)$$

b) $$\frac{2\,\partial v}{x\,\partial z} = \frac{\partial v}{2z\,\partial x} \qquad v = v(z,x)$$

2. Méthode des caractéristiques :

Pour résoudre l'EDP d'ordre 1 suivante :

$$P(x,y,f)\frac{\partial f}{\partial x} + Q(x,y,f)\frac{\partial f}{\partial y} = R(x,y,f) \qquad (*)$$

où $R(x,y,f)$ est non identiquement nulle. On fait les étapes suivantes :

a) on vérifie si $R(x,y,f) = 0$ définie une solution.

b) Dans le domaine où $R(x,y,f)$ est non nulle, on cherche deux fonctions U et V (s'appelles intégrales premières) du système caractéristique :

$$\frac{dx}{P(x,y,f)} = \frac{dy}{Q(x,y,f)} = \frac{df}{R(x,y,f)}$$

La solution du problème posé $(*)$ est alors définie par :

$$F(\,U(x,y,f)\,;\,V(x,y,f)) = 0 \;\ldots\; (1) \qquad (\text{forme implicite})$$

Il faut au moins qu'une des deux fonctions U et V dépende de f.

F : fonction arbitraire

on peut réécrire (1) sous une forme explicite c.à.d : $f = G(x,y)$

Exemple: Soit l'EDP

$z = z(x,y)$

$$(x^2-1)\frac{\partial z}{\partial x} + 2xy\frac{\partial z}{\partial y} + 4xz = 0$$

$(x^2-1)z_x + 2xy\,z_y = -4xz$

Système caractéristique:
$$\frac{dx}{(x^2-1)} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{-4xz}$$

$$\frac{dx}{(x^2-1)} = \frac{dy}{2xy} \iff \frac{2x}{x^2-1}\,dx = \frac{dy}{y}$$

$$\Rightarrow \int \frac{2x}{x^2-1}\,dx = \int \frac{dy}{y}$$

$$\Rightarrow \ln|x^2-1| = \ln|y| + k_1 \qquad (k_1 \in \mathbb{R})$$

$$x^2-1 = K_1|y| \qquad (K_1 = \pm e^{k_1})$$

$$K_1 = \frac{x^2-1}{|y|} = u(x,y)$$

$$\frac{dx}{(x^2-1)} = \frac{dz}{-4xz} \Rightarrow \frac{2x}{x^2-1}\,dx = \frac{-dz}{2z}$$

$$\Rightarrow \int \frac{2x}{x^2-1}\,dx = \int \frac{-dz}{2z} \qquad (k_2 \in \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow \ln|x^2-1| = \ln|z|^{-1/2} + k_2$$

$$x^2-1 = \frac{K_2}{\sqrt{z}} \qquad K_2 = \pm e^{k_2}$$

$$K_2 = \sqrt{z}\,(x^2-1)$$

Donc les intégrales premières soient : $\mathcal{C}_1(x,y,z) = \dfrac{x^2-1}{|y|} = u(x,y,z)$

$$\mathcal{C}_2(x,y,z) = \sqrt{z}\,(x^2-1) = v(x,y,z)$$

Donc la solution générale est de la forme : $F\left(\dfrac{x^2-1}{|y|},\ \sqrt{z}\,(x^2-1)\right) = 0$

explicitement : $\sqrt{z}\,(x^2-1) = G\left(\dfrac{x^2-1}{|y|}\right) \Rightarrow \sqrt{z} = \dfrac{G\left(\frac{x^2-1}{|y|}\right)}{x^2-1}$

$$\Rightarrow z = \left(\frac{G\left(\frac{x^2-1}{|y|}\right)}{x^2-1}\right)^2$$

$$\boxed{z = \frac{H\left(\frac{x^2-1}{|y|}\right)}{(x^2-1)^2}} \quad \text{où } H = G^2$$

EDP linéaire de 2^{nd} ordre

forme générale

La forme générale d'une EDP linéaire de 2^{nd} ordre est :

$$\boxed{A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}+C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}+D(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+E(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+F(x,y)u=G(x,y) \quad (12)$$

La partie principale.

$u = u(x,y)$

Exemple :

1) $\ddot{u}_{xx} + \ddot{u}_{yy} = 0$

2) $x\ddot{u}_{xy} = 0$

3) $x\dot{u}_{x} + \ddot{u}_{xx} + u = 2y$

Classification

Le type d'EDP (12) dépend du signe de : $B^2 - 4AC$.

on a trois classes :

Si $B^2-4AC>0$, alors l'EDP est dite hyperbolique.

Si $B^2-4AC=0$, alors l'EDP est dite parabolique.

Si $B^2-4AC<0$, alors l'EDP est dite elliptique.

Exemple :

1) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ (équation des ondes)

$B^2 - 4AC = 16 > 0$. l'équation des ondes est hyperbolique.

2) $\dfrac{\partial u}{\partial t} - 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ (équation de la diffusion)

$B^2 - 4AC = 0$. L'équation de la diffusion est parabolique.

3) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ (équation de Laplace)

$B^2 - 4AC = -4 < 0$, l'équation de Laplace est elliptique.


اللهم صل وسلم
على نبينا محمد