TD n°04 Lois de probabilités continues

Exercice 01.

I. La distribution exponentielle est utilisée pour modéliser le temps entre une séquence d'événements: temps d'attente, temps entre les arrivées, durée de vie du matériel, temps de panne, temps entre les appels etc... .
La distribution exponentielle d-une variable aléatoire X a une densité:

$$f_X(x)=\lambda e^{\lambda x} \quad \text{pour} \quad x \geq 0$$

1) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
2) Écrire la fonction de répartition de X.

II. La durée de vie en année, d'un ordinateur avant la première panne suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}5$.

1) Quelle est la durée de vie moyenne d'un ordinateur?
2) Quelle est la probabilité que l''ordinateur ne connaisse pas de panne au cours des cinq premières années?
3) Quelle est la probabilité que l'ordinateur tombe en panne avant la fin de la quatrième année?
4) L'ordinateur n'a connu aucune panne les quatre premières années. Quelle est la probabilité qu'il ne connaisse aucune panne l'année suivante ?

Exercice 02:

I. On définit la fonction Gamma par

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt.$$

On montre que

$$\int_0^\infty \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx = 1$$

Que conclure?

II. Des utilisateurs visitent un certain site Internet en moyenne de 12 visites par minute. Chaque sixième visiteur reçoit une promotion sous forme d'un bannière flash. Quelle est la loi du temps entre les promotions consécutives?

III. La durée de vie d'une puce de mémoire d'un ordinateur est distribuée selon une loi Gamma avec d'espérance $\mu =$ 12 ans et un écart type $\sigma = 4$ ans.

1) Quelle sont les paramètres de la loi Gamma dans cette situation?
2) Quelle est la probabilité qu'une telle puce survit entre 8 et 10 ans?

Exercice 03: soit Z une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite.

1) Déterminer z >0 tel que $P(-z<Z<z) \simeq 0{,}95$
2) soit X une variable aléatoire suivant une loi normale de moyenne 8 et de variance 4. Donner des valeurs approchées pour $P(X<7{,}5)$, $P(X>8{,}5)$, $P(6{,}5<X<10)$ et $P(X>6|X>5)$.
3) Supposons que X est d'espérance et variance inconnus. Calculer les deux paramètre sachant que: $P(X<-1) \simeq 0{,}05$ et $P(X>3) \simeq 0{,}12$.

Exercice 04: Parmi toutes les puces informatiques produites par une certaine usine, 6 % sont défectueuses. Un échantillon de 400 puces est sélectionné pour inspection.
(a) Quelle est la probabilité que cet échantillon contienne entre 20 et 25 puces défectueuses?

Table N(0,1)

	0,00	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706