

TD. n°5: Couples aléatoires

Exercice 1: La loi jointe du couple (X, Y) est donnée par le tableau suivant :

Y	0	1	2	3
X	0.22	0.20	0.00	0.02
0	0.22	0.20	0.00	0.02
1	0.05	α	0.04	0.01
2	0.04	0.07	0.02	0.22

- 1) Déterminer la constante α .
- 2) Déterminer les lois marginales de X et Y .
- 3) Calculer $E(X)$ et $E(Y)$.
- 4) Déterminer la loi conditionnelle de X sachant que $Y=2$.
- 5) Calculer $E(X|Y=2)$ et $\text{Var}(X|Y=2)$.
- 6) Calculer $\text{Cov}(X, Y)$, puis le coefficient de corrélation.
- 7) Étudier l'indépendance de X et Y .

Exercice 2: Soit un couple de variable aléatoire de densité conjointe

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} \alpha e^{-x-2y} & \text{si } x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

- 1) Déterminer α pour que f soit la densité jointe de X et Y .
- Déterminer les lois marginales de X et de Y .
- 3) Déterminer les densités conditionnelles.
- 4) Calculer $E(X|Y=y)$ et $E(Y|X=x)$.
- 5) Calculer les fonctions de répartition marginales F_X et F_Y .

2)

Exercice 3: Soit un couple de variables aléatoires de densité conjointe

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{si } 0 < x < y \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

- 1) Déterminer les lois marginales de X et de Y .
- 2) Déterminer les densités conditionnelles.
- 3) En déduire $E(Y|X=x)$, puis l'espérance conditionnelle $E(Y|X)$.
- 4) Déterminer la loi conjointe du couple (Z, T) défini par

$$\begin{cases} Z = X + Y \\ T = Y - X \end{cases}$$

- 5) En déduire les densités marginales de Z et T .

Devoir à rendre obligatoirement le lundi 08 mai 2023 pendant la séance du cours

ça fera une partie de la note du contrôle

Exercice 1: Soit X une variable aléatoire discrète dont la loi est donnée par:

k	-2	-1	0	1	2
P(X=k)	4/9	2/9	1/9	1/9	1/9

- 1) Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y=X^2$.
- 2) Déterminer la loi conjointe de (X,Y) .
- 3) Les variables X et Y sont-elles indépendantes?
- 4) Calculer $\text{Cov}(X,Y)$.

Exercice 2: Soit un couple de variable aléatoire de densité conjointe

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} K & \text{si } (x,y) \in D(x,y) \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

$$\text{Avec } D(x,y) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1, x+y \leq 1\}$$

- 1) Déterminer K pour que f soit la densité jointe de X et Y .
- 2) Déterminer les lois marginales de X et de Y et dites si X et Y sont indépendantes?
 - 1) Calculer la covariance de X et Y ainsi que la corrélation entre X et Y
 - 2) Déterminer les densités conditionnelles .
- 3) On pose $U=X+Y$ et $V=2Y$. Déterminer la densité du couple (U,V) .

