COURS DE MATHÉMATIQUES

Terminale S

Valère BONNET (valere.bonnet@gmail.com)

29 mai 2011

Lycée PONTUS DE TYARD
13 rue des Gaillardons
71100 CHALON SUR SAÔNE
Tél. : (33) 03 85 46 85 40
Fax : (33) 03 85 46 85 59
FRANCE

Table des matières

Chapitre I

Vocabulaire de la logique

I.1 Qu'est-ce qu'une proposition ?

DÉFINITION I.1.1 PROPOSITION

Une *proposition* est un énoncé qui est soit vrai soit faux.

Exemple *Considérons un quadrilatère ABCD, dans le plan.*
On peut envisager les propositions, P : « ABCD est un carré » ;
Q : « ABCD est un parallélogramme ».
Suivant la nature du quadrilatère ABCD la proposition P, comme la proposition Q, est soit vraie, soit fausse.

I.2 Négation d'une proposition

DÉFINITION I.2.1

La négation d'une proposition P est la proposition, notée « non P » ou « $\overline{\mathrm{P}}$ » ou encore « $\neg$P », qui est fausse lorsque P est vraie et vraie lorsque P est fausse.

Exemples
1. *Reprenons les propositions de l'exemple précédent.*
On a, $\overline{P}$: « ABCD n'est pas un carré » ; $\overline{Q}$: « ABCD n'est pas un parallélogramme ».
2. *Soit n un nombre entier.*
La négation de T : « n est pair » ; est $\overline{\mathrm{T}}$: « n n'est pas pair » ;
c'est-à-dire : « n est impair ».
3. *Soit x un nombre réel.*
La négation de R : « $x > 2$ » ; est , $\overline{\mathrm{R}}$: « $x \leqslant 2$ ».
4. *La négation de S : « pour tout réel x : $0 \leqslant x^2$ » ; est $\overline{\mathrm{S}}$: « il existe un réel x (au moins) tel que : $0 > x^2$ ».*

Remarques
1. *La négation de la négation d'une proposition P, c'est-à-dire $\overline{\overline{P}}$, est* synonyme *de la proposition P elle même. On écrit : $\overline{\overline{P}} \equiv P$.*
2. *Désignons par K l'intervalle $]2;+\infty[$ et par $\overline{K}$ le complémentaire de K dans $\mathbb{R}$; $\overline{K}$ est donc l'intervalle $]-\infty;2]$.*
Les propositions R et $\overline{R}$ s'écrivent alors R : « $x \in K$ » ; et $\overline{R}$: « $x \in \overline{K}$ ».
En effet, les propositions « $x \notin K$ » et « $x \in \overline{K}$ » sont synonymes.

I.3 Le « et »

DÉFINITION I.3.1

Soit Q, P deux propositions.
La proposition (P et Q) est la proposition qui est vraie lorsque P et Q sont toutes deux vraies, et fausse dans le cas contraire.

Exemples
1. *Soit x un nombre réel, on considère les propositions P : « $1 < x$ » ; Q : « $x \leqslant 3$ ».*
P et Q est la proposition : « $1 < x$ et $x \leqslant 3$ » ; c'est-à-dire : « $1 < x \leqslant 3$ ».
2. *Considérons un quadrilatère ABCD et les propositions P : « ABCD a deux côtés perpendiculaires » ; Q : « ABCD est un parallélogramme ».*
On a, P et Q : « ABCD est un parallélogramme qui a deux côtés perpendiculaires ».

Remarques
1. *Dans le premier exemple, si on désigne par I l'intervalle $]1;+\infty[$ et par J l'intervalle $]-\infty;3]$, P et Q s'écrivent respectivement : « $x \in I$ » et « $x \in J$ ». La proposition (P et Q) s'écrit alors : « $x \in I \cap J$ ». En effet, les propositions « $x \in I$ et $x \in J$ » et « $x \in I \cap J$ » sont synonymes.*
2. *La proposition P et Q est parfois notée : $P \wedge Q$.*

Exemple *Soit A et B parties d'un univers Ω et x un élément de Ω. Considérons les propositions P : « $x \in \mathrm{A}$ » et Q : « $x \in \mathrm{B}$ ». La proposition $P \wedge Q$: « $x \in \mathrm{A}$ et $x \in \mathrm{B}$ » est synonyme de :« $x \in \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ »*

I.4 Le « ou »

Dans le langage courant, le mot « ou » a deux sens distincts : un sens exclusif comme dans l'affirmation « le menu propose fromage ou dessert », et un sens inclusif comme dans la phrase « Les Canadiens parlent l'anglais ou le français ». Dans le premier cas il signifie « soit fromage,soit dessert », dans le second cas il n'est pas exclu que certains Canadiens parlent les deux langues. C'est dans ce sens inclusif que « ou » est utilisé en mathématiques et en logique. Quand il est utilisé dans son sens exclusif, en général on le précise.

DÉFINITION I.4.1
Soit Q, P deux propositions.
La proposition (P ou Q) est la proposition qui est vraie lorsque l'une au moins des propositions Q, P est vraie, et fausse dans le cas contraire.

Exemple *Soit x un nombre réel, on considère les propositions P : « $x \leqslant 1$ » ; Q : « $3 < x$ ».*
P ou Q est la proposition : « $x \leqslant 1$ ou $3 < x$ ».

Remarques
1. *Reprenons les intervalles I et J introduits dans la remarque précédente.*
Les propositions P et Q s'écrivent respectivement : « $x \in \overline{I}$ » et « $x \in \overline{J}$ ».
La proposition (P ou Q) s'écrit alors : « $x \in \overline{I} \cup \overline{J}$ ».
En effet, les propositions « $x \in \overline{I}$ ou $x \in \overline{J}$ » et « $x \in \overline{I} \cup \overline{J}$ » sont synonymes.
2. *La proposition P ou Q est parfois notée : $P \vee Q$*

Exemple *Soit A et B parties d'un univers Ω et x un élément de Ω. Considérons les propositions P : « $x \in \mathrm{A}$ » et Q : « $x \in \mathrm{B}$ ». La proposition $P \vee Q$: « $x \in \mathrm{A}$ et $x \in \mathrm{B}$ » est synonyme de :« $x \in \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ »*

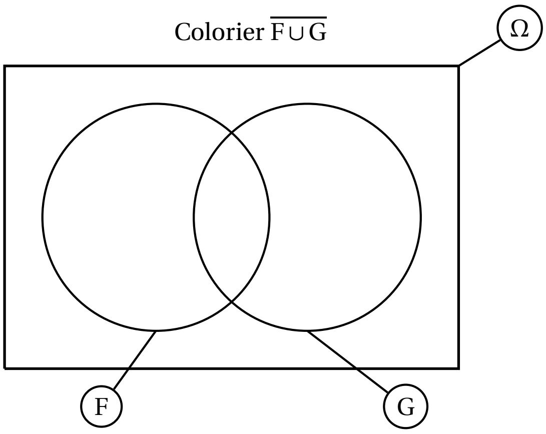
I.5 Propositions et parties d'un ensemble

Nous avons constaté à travers les remarques précédentes et nous admettons que de façon générale :
- la négation est aux propositions ce que le complémentaire est aux parties d'un ensemble ;
- la conjonction (le « et ») est aux propositions ce que l'intersection est aux parties d'un ensemble ;
- la disjonction (le « ou ») est aux propositions ce que l'union est aux parties d'un ensemble.

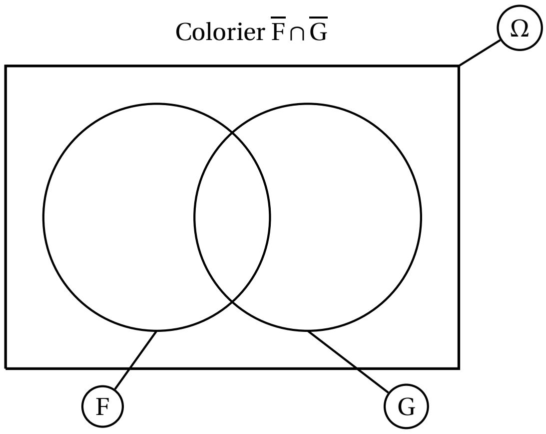
I.6 Lois de MORGAN

F et G désignent deux parties d'un ensemble Ω.

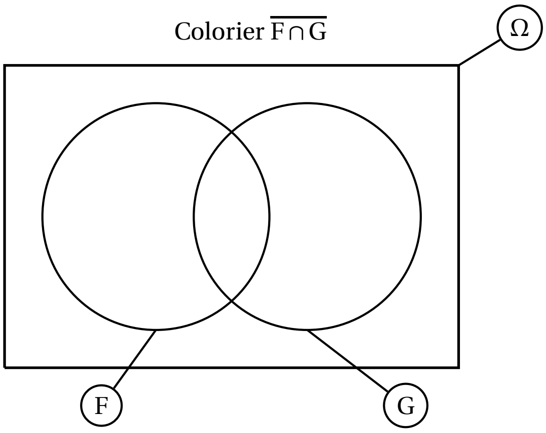
Colorier $\overline{\mathrm{F}\cup\mathrm{G}}$



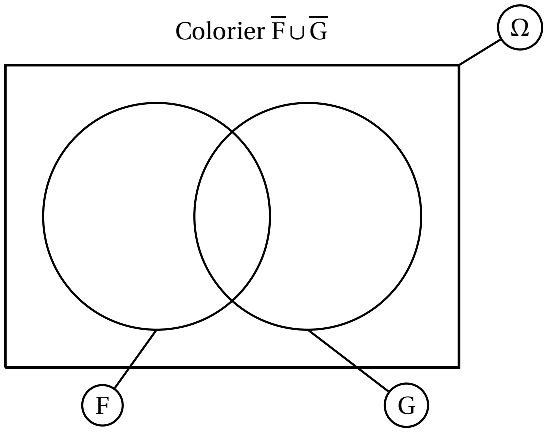
Colorier $\overline{\mathrm{F}}\cap\overline{\mathrm{G}}$



Colorier $\overline{\mathrm{F}\cap\mathrm{G}}$



Colorier $\overline{\mathrm{F}}\cup\overline{\mathrm{G}}$



Soit Q, P deux propositions. Dire que la proposition (P ou Q) est fausse signifie que les propositions Q, P sont toutes deux fausses.
La proposition (non(P ou Q)) est donc synonyme de la proposition ((non P) et (non Q)).

$$\overline{\mathrm{P}\vee\mathrm{Q}}\equiv\overline{\mathrm{P}}\wedge\overline{\mathrm{Q}}$$

De même, dire que la proposition (P et Q) est fausse signifie que l'une au moins des propositions Q, P est fausse.
La proposition (non(P et Q)) est donc synonyme de la proposition ((non P) ou (non Q)).

$$\overline{\mathrm{P}\wedge\mathrm{Q}}\equiv\overline{\mathrm{P}}\vee\overline{\mathrm{Q}}$$

Exemples
1. *x désigne un nombre réel.*
La négation de « $0 < x$ et $x \leqslant 1$ » est « $0 \geqslant x$ ou $x > 1$ ».
La négation de « $0 < x$ ou $x \leqslant -1$ » est « $0 \geqslant x$ et $x > -1$ ».
2. *ABCD désigne un quadrilatère.*
La négation de « ABCD est un parallélogramme mais n'est pas un carré » est « ABCD est un carré ou n'est pas un parallélogramme».

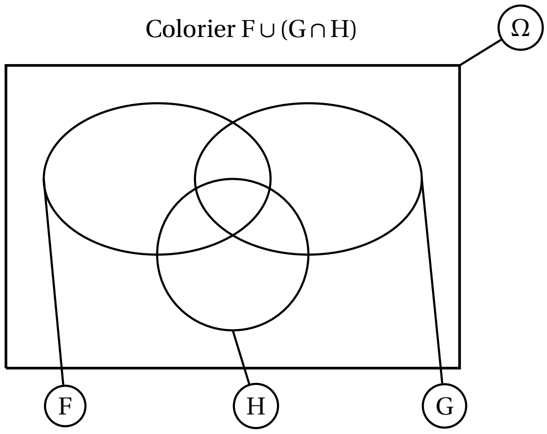
Remarque *Les formules : $\overline{F\cup G}=\overline{F}\cap\overline{G}$; $\overline{F\cap G}=\overline{F}\cup\overline{G}$; $\overline{P\vee Q}\equiv\overline{P}\wedge\overline{Q}$ et $\overline{P\wedge Q}\equiv\overline{P}\vee\overline{Q}$; sont appelées lois (ou formules) de Morgan*[1].

I.7 Opérations sur les parties d'un ensemble

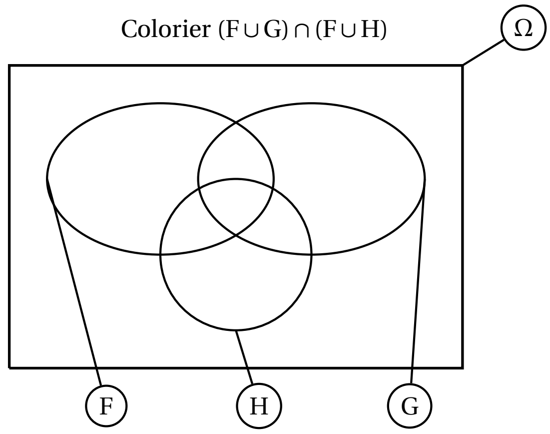
Soit Ω un ensemble. L'ensemble des parties de Ω est noté : $\mathscr{P}(\Omega)$.
F, G et H désignent trois éléments de $\mathscr{P}(\Omega)$.

1. MORGAN (AUGUSTUS DE) *Inde 1806 - Londres 1871*, mathématicien et logicien britannique.

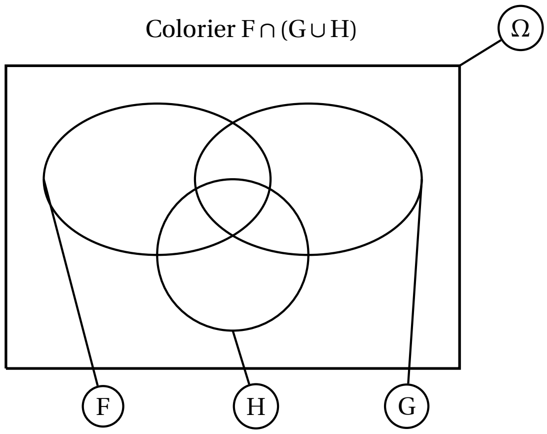
Colorier $F \cup (G \cap H)$



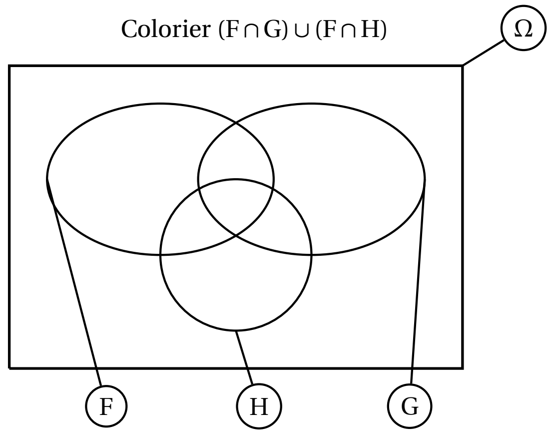
Colorier $(F \cup G) \cap (F \cup H)$



Colorier $F \cap (G \cup H)$



Colorier $(F \cap G) \cup (F \cap H)$



THÉORÈME I.7.1

Soit Ω un ensemble. Pour tous éléments F, G, H de $\mathscr{P}(\Omega)$, on a :

$F \cap G = G \cap F$	$\cap$ est commutative dans $\mathscr{P}(\Omega)$;
$F \cup G = G \cup F$	$\cup$ est commutative dans $\mathscr{P}(\Omega)$;
$F \cap (G \cap H) = (F \cap G) \cap H$	$\cap$ est associative dans $\mathscr{P}(\Omega)$;
$F \cup (G \cup H) = (F \cup G) \cup H$	$\cup$ est associative dans $\mathscr{P}(\Omega)$;
$F \cap (G \cup H) = (F \cap G) \cup (F \cap H)$	dans $\mathscr{P}(\Omega)$ $\cap$ est distributive par rapport à $\cup$;
$F \cup (G \cap H) = (F \cup G) \cap (F \cup H)$	dans $\mathscr{P}(\Omega)$ $\cup$ est distributive par rapport à $\cap$;
$\Omega \cap F = F \cap \Omega = F$	Ω est élément neutre pour $\cap$ dans $\mathscr{P}(\Omega)$;
$\emptyset \cup F = F \cup \emptyset = F$	$\emptyset$ est élément neutre pour $\cup$ dans $\mathscr{P}(\Omega)$.

Remarques

1. *Lorsque Ω est non vide, $\left(\mathscr{P}(\Omega), \cup\right)$ et $\left(\mathscr{P}(\Omega), \cap\right)$ ne sont pas des groupes car la plupart des éléments ne sont pas inversibles.*
Par exemple il n'existe pas d'élément Ω' dans $\mathscr{P}(\Omega)$ tel que : $\Omega \cup \Omega' = \emptyset$.
2. *L'associativité permet de légitimer des écritures telles que $F \cup G \cup H$ ou $F \cap G \cap H$.*

On peut réécrire le théorème précédent en remplaçant les parties de Ω par des propositions. On obtient alors le théorème suivant.

THÉORÈME I.7.2

Soit P, Q, R trois propositions.
Les propositions (P et Q) et (Q et P) sont synonymes.
Les propositions (P ou Q) et (Q ou P) sont synonymes.
Les propositions (P et (Q et R)) et ((P et Q) et R) sont synonymes.
Les propositions (P ou (Q ou R)) et ((P ou Q) ou R) sont synonymes.
Les propositions (P et (Q ou R)) et ((P et Q) ou (P et R)) sont synonymes.
Les propositions (P ou (Q et R)) et ((P ou Q) et (P ou R)) sont synonymes.

Remarques

1. *Pour démontrer les propriétés du théorème ci-dessus, on peut utiliser un tableau de vérité. Par exemple le tableau ci-dessous envisage dans les trois premières colonnes tous les cas possibles et on constate qu'a chaque fois les propositions (P et (Q ou R)) et ((P et Q) ou (P et R)) ont la même valeur, ce qui prouve qu'elles sont synonymes.* ***2.*** *Pour démontrer les propriétés du théorème I.7.1, on peut utiliser également un tableau de vérité. Par exemple la propriété*

P	Q	R	P et (Q ou R)	(P et Q) ou (P et R)
vrai	vrai	vrai	vrai	vrai
faux	vrai	vrai	faux	faux
vrai	faux	vrai	vrai	vrai
faux	faux	vrai	faux	faux
vrai	vrai	faux	vrai	vrai
faux	vrai	faux	faux	faux
vrai	faux	faux	faux	faux
faux	faux	faux	faux	faux

TABLE I.1 –

$F \cap (G \cup H) = (F \cap G) \cup (F \cap H)$ signifie que pour tout élément x, les propositions $x \in F \cap (G \cup H)$ et $x \in (F \cap G) \cup (F \cap H)$ sont synonymes ; ce qui est démontré par le tableau de vérité suivant.

$x \in$ F	$x \in$ G	$x \in$ H	$x \in$ F $\cap$ (G $\cup$ H)	$x \in$ (F $\cap$ G) $\cup$ (F $\cap$ H)
vrai	vrai	vrai	vrai	vrai
faux	vrai	vrai	faux	faux
vrai	faux	vrai	vrai	vrai
faux	faux	vrai	faux	faux
vrai	vrai	faux	vrai	vrai
faux	vrai	faux	faux	faux
vrai	faux	faux	faux	faux
faux	faux	faux	faux	faux

TABLE I.2 –

I.8 Implications

I.8.1 Introduction

Considérons un quadrilatère ABCD, dans le plan, et les propositions P : « ABCD est un carré » et Q : « ABCD est un parallélogramme ». On sait que : « si ABCD est un carré, alors ABCD est un parallélogramme ». On dit que la proposition P implique la propositions Q ; on écrit : P $\Rightarrow$ Q.

Lorsque P $\Rightarrow$ Q, on dit que P est une condition suffisante de Q (pour que ABCD soit un parallélogramme, il suffit que ABCD soit un carré) ou que Q est une condition nécessaire de P (pour que ABCD soit un carré, il faut que ABCD soit un parallélogramme).

En logique, on déduit d'une proposition fausse n'importe qu'elle autre proposition, vraie ou fausse. Donc si la proposition P est fausse alors la proposition P $\Rightarrow$ Q est vraie. Ainsi, P $\Rightarrow$ Q est synonyme de (Q ou non P).

Remarques

1. *Dans une argumentation une implication se reconnaît généralement à la structure « si ... alors ... », mais il arrive qu'elle soit moins reconnaissable. Ainsi on énonce parfois : « Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit. »*
Cette phrase signifie : « Si un triangle est rectangle, alors le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit.»

2. *En mathématique, pour démontrer une proposition Q on démontre souvent une proposition du type : (P et (P $\Rightarrow$ Q)). En pratique, ce type d'argumentation (appelée* modus ponens*) se traduit par une structure « P donc Q » qui signifie que l'on sait d'une part que P est vrai et d'autre part que P $\Rightarrow$ Q.*

3. *Il existe une autre règle, appelée* modus tollens *qui permet de déduire $\overline{P}$ de $\big((P \Rightarrow Q)$ et $\overline{Q}\big)$.*
Le modus tollens *est à la base du raisonnement par l'absurde.*

I.8.2 Réciproque d'une implication

La réciproque de l'implication « P $\Rightarrow$ Q » est l' implication « Q $\Rightarrow$ P » (ou « P $\Leftarrow$ Q »).

Exemples

1. *Considérons un quadrilatère ABCD.*

L'implication « si ABCD est un carré, alors ABCD est un parallélogramme » est vrai et pourtant son implication réciproque, « si ABCD est un parallélogramme, alors ABCD est un carré », est fausse.
2. *Considérons un triangle ABC et désignons par a, b, c les distances respectives BC, AC, AB. Le théorème de Pythagore peut s'énoncer ainsi : « si le triangle ABC est rectangle en A, alors $a^2 = b^2 + c^2$ ».*
La réciproque du théorème de Pythagore peut s'énoncer ainsi : « si $a^2 = b^2 + c^2$, alors le triangle ABC est rectangle en A ». Nous savons que la réciproque du théorème de Pythagore est vraie.

I.8.3 Contraposée d'une implication

La contraposée de l'implication « $\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}$ » est l'implication « $\overline{\mathrm{Q}} \Rightarrow \overline{\mathrm{P}}$ » (ou « $\overline{\mathrm{P}} \Leftarrow \overline{\mathrm{Q}}$ »).
Exemple *Considérons un quadrilatère ABCD.*
La contraposée de l'implication « si ABCD est un carré, alors ABCD est un parallélogramme » est l'implication « si ABCD n'est pas un parallélogramme, alors ABCD n'est pas un carré ».

Nous constatons que ces deux dernières implications sont vraies. Plus généralement, on a la propriété suivante.
THÉORÈME I.8.1
Deux implications contraposées sont synonymes.

Démonstration En effet : $(\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}) \equiv \left(\mathrm{Q} \vee \overline{\mathrm{P}}\right) \equiv \left(\overline{\mathrm{P}} \vee \overline{\left(\overline{\mathrm{Q}}\right)}\right) \equiv \left(\overline{\mathrm{Q}} \Rightarrow \overline{\mathrm{P}}\right)$. □

Exercice I.8.1. ***Soit n un nombre entier, démontrer que si n^2 est impair, alors n est impair.***
Solution *On sait que le produit de deux entiers pairs est pair. Donc, en particulier, si n est pair alors n^2 est pair ; donc, par contraposition, si n^2 n'est pas pair alors n n'est pas pair ; c'est-à-dire si n^2 est impair, alors n est impair.* □

I.8.4 Implication contraire

L'implication contraire de « $\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}$ » est l'implication « $\mathrm{P} \Rightarrow \overline{\mathrm{Q}}$ ».
Les propositions « $\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}$ » et « $\mathrm{P} \Rightarrow \overline{\mathrm{Q}}$ » ne sont pas équivalentes et l'une n'est pas la négation de l'autre.

I.9 Double implication ou équivalence

Lorsqu'une implication « $\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}$ » et sa réciproque « $\mathrm{P} \Leftarrow \mathrm{Q}$ » sont toutes les deux vraies, on dit qu'on a une double implication. Les propositions P et Q sont dites équivalentes, ce qui se note : $\mathrm{P} \Leftrightarrow \mathrm{Q}$.

Dans les propriétés et les raisonnements, les équivalences sont signalées par des expressions telles que « si et seulement si » ou « équivaut à ».
Exemple *Considérons un triangle ABC et désignons par a, b, c les distances respectives BC, AC, AB.*
Le théorème de Pythagore et sa réciproque peuvent être regroupés dans l'énoncé suivant :
« Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $a^2 = b^2 + c^2$. »

Remarques
1. *Lorsque la réciproque d'une implication est fausse, on n'a pas l'équivalence. Ainsi, en reprenant l'exemple du quadrilatère ABCD, l'énoncé « si ABCD est un carré, alors ABCD est un parallélogramme », en revanche l'énoncé « ABCD est un carré si et seulement si ABCD est un parallélogramme » est faux.*
2. *Si deux propositions sont équivalentes alors, par contraposition leurs négations sont équivalentes.*

Exemple *Soit x un nombre réel.*
On a : $|x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$;
donc, par contraposition : $|x| \geqslant 2 \Leftrightarrow x \leqslant -2$ ou $2 \leqslant x$.

I.10 Formules récapitulatives

Les principales propriétés évoquées dans cet exposé sont résumées par les formules suivantes.

$$\overline{\overline{\mathrm{P}}} \equiv \mathrm{P}$$

$$\left.\begin{array}{rcl}\overline{\mathrm{P}\wedge\mathrm{Q}} & \equiv & \overline{\mathrm{P}}\vee\overline{\mathrm{Q}} \\ \overline{\mathrm{P}\vee\mathrm{Q}} & \equiv & \overline{\mathrm{P}}\wedge\overline{\mathrm{Q}}\end{array}\right\} \quad \text{(lois de Morgan)}$$

$$\left.\begin{array}{rcl}\mathrm{P}\wedge\mathrm{Q} & \equiv & \mathrm{Q}\wedge\mathrm{P} \\ \mathrm{P}\vee\mathrm{Q} & \equiv & \mathrm{Q}\vee\mathrm{P}\end{array}\right\} \quad \text{(commutativité)}$$

$$\left.\begin{array}{rcl}\mathrm{P}\wedge(\mathrm{Q}\wedge\mathrm{R}) & \equiv & (\mathrm{P}\wedge\mathrm{Q})\wedge\mathrm{R} \\ \mathrm{P}\vee(\mathrm{Q}\vee\mathrm{R}) & \equiv & (\mathrm{P}\vee\mathrm{Q})\vee\mathrm{R}\end{array}\right\} \quad \text{(associativité)}$$

$$\left.\begin{array}{rcl}\mathrm{P}\wedge(\mathrm{Q}\vee\mathrm{R}) & \equiv & (\mathrm{P}\wedge\mathrm{Q})\vee(\mathrm{P}\wedge\mathrm{R}) \\ \mathrm{P}\vee(\mathrm{Q}\wedge\mathrm{R}) & \equiv & (\mathrm{P}\vee\mathrm{Q})\wedge(\mathrm{P}\vee\mathrm{R})\end{array}\right\} \quad \text{(distributivité)}$$

$$\left.\begin{array}{rcl}(\mathrm{P}\Rightarrow\mathrm{Q}) & \equiv & \left(\overline{\mathrm{P}}\Leftarrow\overline{\mathrm{Q}}\right) \\ (\mathrm{P}\Leftrightarrow\mathrm{Q}) & \equiv & \left(\overline{\mathrm{P}}\Leftrightarrow\overline{\mathrm{Q}}\right)\end{array}\right\} \quad \text{(contraposée)}$$

I.11 Raisonnement par récurrence

Considérons les premiers entiers naturels non nuls et comparons la somme de leurs cubes au carré de leur somme.

On a :

$$\begin{array}{rcl}1^3=1 & \text{et} & 1^2=1 \\ 1^3+2^3=9 & \text{et} & (1+2)^2=9 \\ 1^3+2^3+3^3=36 & \text{et} & (1+2+3)^2=36 \\ 1^3+2^3+3^3+4^3=100 & \text{et} & (1+2+3+4)^2=100\end{array}$$

Cette étude nous amène à conjecturer que pour tout entier naturel non nul n, la proposition

$$\mathrm{P}_n : « \, 1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2 \, »$$

est vraie. Il est malheureusement impossible d'examiner la véracité de chacune de ces propositions. Pour démontrer ces propositions, nous allons utiliser une nouvelle méthode de raisonnement appelée *raisonnement par récurrence* dont le principe est le suivant : on vérifie que la première proposition est vraie et on démontre que chacune des propositions implique la proposition suivante ; on prouve ainsi, de proche en proche, que toutes les propositions sont vraies.

– D'après l'étude menée, P_1 est vraie.
– Supposons la proposition P_k vraie pour un certain $k\in\mathbb{N}^*$ (*hypothèse de récurrence*) ; c'est-à-dire : $1^3+2^3+\cdots+k^3=(1+2+\cdots+k)^2$; déduisons-en que la proposition P_{k+1} est vraie ; c'est-à-dire : $1^3+2^3+\cdots+k^3+(k+1)^3=\big(1+2+\cdots+k+(k+1)\big)^2$;
  On a :

$$\begin{array}{rcll}1^3+2^3+\cdots+k^3+(k+1)^3 & = & (1+2+\cdots+k)^2+k(k+1)^2+(k+1)^2 & \text{(hypothèse de récurrence et développement)} \\ & = & \left[\dfrac{k(k+1)}{2}\right]^2+2\dfrac{k(k+1)}{2}(k+1)+(k+1)^2 & \text{(somme de termes d'une suite arithmétique)} \\ & = & \left[\dfrac{k(k+1)}{2}+(k+1)\right]^2 & \text{(identité remarquable)} \\ & = & \big(1+2+\cdots+k+(k+1)\big)^2 & \text{(somme de termes d'une suite arithmétique)}\end{array}$$

Donc, par récurrence, pour tout entier naturel non nul n :

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2$$

Pour démontrer par récurrence qu'une proposition P_n est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0, on procède en deux étapes :
– on vérifie que la proposition P_{n_0} est vraie
– on démontre, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à n_0, que si P_k est vraie alors P_{k+1} est vraie.

Exercice I.11.1. ***Démontrer que pour tout entier naturel n, 10^n-1 est multiple de 9.***

Solution *Considérons pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ la proposition P_n : « 10^n-1 est multiple de 9 ».*
$10^0-1=1-1=0=9\times0$ donc P_0 est vraie.
Soit k un entier naturel. Supposons que 10^k-1 soit multiple de 9, démontrons que $10^{k+1}-1$ est multiple de 9.
$10^{k+1}-1=\underbrace{9\times10^k}_{\text{multiple de 9}}+\underbrace{10^k-1}_{\text{multiple de 9 d'après l'hypothèse de récurrence}}$; donc $10^{k+1}-1$, comme somme de multiples de 9, est multiple de 9.
D'où, par récurrence, pour tout entier naturel n, 10^n-1 est multiple de 9. □

Exercice I.11.2. ***(Inégalité de BERNOULLI)***
Démontrer que pour tout réel α vérifiant $\alpha\geqslant-1$ et pour tout entier naturel non nul n, $(1+\alpha)^n\geqslant1+n\alpha$.

Solution *Soit* α *un réel vérifiant* $\alpha \geqslant -1$. *Considérons pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *la proposition* B_n *: «* $(1+\alpha)^n \geqslant 1+n\alpha$ *».*
Pour $n=1$, *on a :* $(1+\alpha)^n = 1+\alpha$ *et* $1+n\alpha = 1+\alpha$ *; donc* B_1 *est vraie.*
Soit k *un entier naturel. Supposons que :* $(1+\alpha)^n \geqslant 1+n\alpha$ *; démontrons que :* $(1+\alpha)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)\alpha$.
On a : $(1+\alpha)^n \geqslant 1+n\alpha$ *et* $1+\alpha$ *est positif, donc par produit :* $(1+\alpha)^{n+1} \geqslant (1+n\alpha)(1+\alpha)$.
Or : $(1+n\alpha)(1+\alpha) = 1+(n+1)\alpha + n\alpha^2$ *et* $n\alpha^2 \geqslant 0$ *; donc :* $(1+n\alpha)(1+\alpha) \geqslant 1+(n+1)\alpha$ *; puis par transitivité :* $(1+\alpha)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)\alpha$.
Donc par récurrence, pour tout entier naturel non nul n, *on a :* $(1+\alpha)^n \geqslant 1+n\alpha$. □

Remarques
1. *La première étape du raisonnement (vérifier que la première proposition est vraie) est essentielle. En considérant les propositions* Q_n *: «* 10^n *est multiple de 9 » ; on démontre comme dans l'exercice I.11.1. que pour tout* k *:* $\mathrm{Q}_k \Rightarrow \mathrm{Q}_{k+1}$ *; et pourtant aucune des propositions* Q_n *n'est vraie.*
2. *Lorsqu'un raisonnement par récurrence est entrepris, l'expression « donc par récurrence » doit apparaître dans l'argumentation. Si de plus l'hypothèse de récurrence n'est pas utilisée, le raisonnement est alors faux.*

Chapitre II

Révisions

II.1 Identités remarquables

On obtient les identités remarquables suivantes par simple développement. Elles servent à développer des expressions factorisées ou à factoriser des expressions développées.

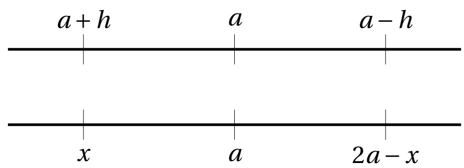
$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 && \text{(II.1)}\\
(a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2 && \text{(II.2)}\\
(a-b)(a+b) &= a^2-b^2 && \text{(II.3)}\\
(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 && \text{(II.4)}\\
(a+b)^3 &= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 && \text{(II.5)}\\
(a-b)(a^2+ab+b^2) &= a^3-b^3 && \text{(II.6)}\\
(a+b)(a^2-ab+b^2) &= a^3+b^3 && \text{(II.7)}
\end{aligned}
$$

II.2 Éléments de symétries d'une courbe

Dans toute cette partie f désignera une fonction numérique à variable réelle, D_f son ensemble de définition et $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique relativement à un repère orthogonal $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.

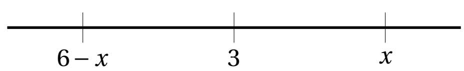
II.2.1 Symétries dans $\mathbb{R}$

Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout réel h, $a+h$ et $a-h$ sont symétriques par rapport à a ; en effet leur demi-somme vaut a. De même x et $2a-x$ sont symétriques par rapport à a.



Dans tout ce document f désignera une fonction numérique à variable réelle, D_f son ensemble de définition et $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique relativement à un repère orthogonal $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.

Exemple *Le symétrique de x par rapport à 3 est $6-x$.*



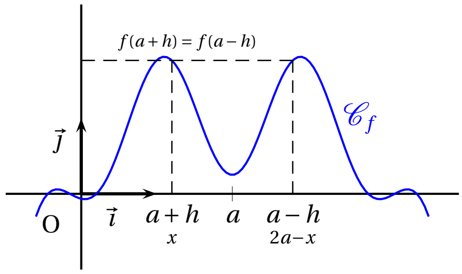
II.2.2 Axe de symétrie d'une courbe

Une observation graphique permet d'énoncer les théorèmes suivants que nous admettons.

THÉORÈME II.2.1

La courbe $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe d'équation $x = a$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \textbf{(1)} & \mathrm{D}_f \text{ est symétrique par rapport à } a. \\ \textbf{(2)} & \text{Pour tout réel } h \text{ tel que } a+h \in \mathrm{D}_f : \\ & f(a+h) = f(a-h). \end{cases}$$



Remarque *La condition (2) du théorème II.2.1 peut également s'écrire :*
$\forall x \in \mathrm{D}_f,\ f(2a-x) = f(x)$

Exercice II.2.1. ***Démontrer que la droite D d'équation $x = 2$ est axe de symétrie de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction $f : x \mapsto x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 8$.***

Solution *f est une fonction polynôme, son ensemble de définition est donc $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 2.*
1re méthode *Soit h un réel, on a :*

$$\begin{aligned} f(2+h) &= (2+h)^4 - 8(2+h)^3 + 22(2+h)^2 - 24(2+h) + 8 \\ &= (2+h)^3(2+h-8) + 22h^2 + 88h + 88 - 48 - 24h + 8 \\ &= (h^3 + 6h^2 + 12h + 8)(h-6) + 22h^2 + 64h + 48 \\ &= h^4 - 24h^2 - 64h - 48 + 22h^2 + 64h + 48 \\ &= h^4 - 2h^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(2-h) &= (2-h)^4 - 8(2-h)^3 + 22(2-h)^2 - 24(2-h) + 8 \\ &= (2-h)^3(2-h-8) + 22h^2 - 88h + 88 - 48 + 24h + 8 \\ &= (-h^3 + 6h^2 - 12h + 8)(-h-6) + 22h^2 - 64h + 48 \\ &= h^4 - 24h^2 + 64h - 48 + 22h^2 - 64h + 48 \\ &= h^4 - 2h^2 \end{aligned}$$

Pour tout réel h tel que $2 + h \in D_f$, on a : $f(2+h) = f(2-h)$;
donc la droite D d'équation $x = 2$ est axe de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$.

2e méthode *Pour tout réel $x \in D_f$, on a :*

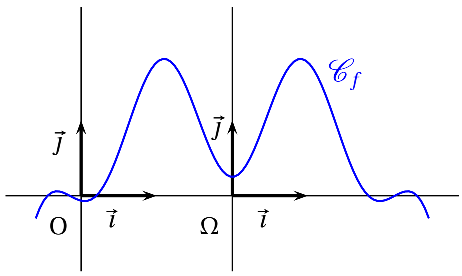
$$\begin{aligned} f(4-x) &= (4-x)^4 - 8(4-x)^3 + 22(4-x)^2 - 24(4-x) + 8 \\ &= (4-x)^3(4-x-8) + 22x^2 - 176x + 352 - 96 + 24x + 8 \\ &= -(x+4)\left(-x^3 + 12x^2 - 48x + 64\right) + 22x^2 - 152x + 264 \\ &= x^4 - 8x^3 + 128x - 256 + 22x^2 - 152x + 264 \\ &= x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 8 \\ &= f(x); \end{aligned}$$

donc la droite D d'équation $x = 2$ est axe de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$. □

On peut également traiter le problème par un changement d'origine.

THÉORÈME II.2.2

Soit $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique d'une fonction f relativement à un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ et Ω le point de coordonnées $(a, 0)$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe d'équation $x = a$ si et seulement si $\mathscr{C}_f$ est la représentation graphique d'une fonction paire relativement au repère $\left(\Omega; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.



Exercice II.2.2. ***Démontrer que la droite D d'équation $x = 2$ est axe de symétrie de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction $f : x \mapsto x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 8$.***

Solution *Soit $\Omega(2,0)$, M un point du plan, (x, y) ses coordonnées dans le repère $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ et (X,Y) ses coordonnées dans le repère $\left(\Omega;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$. On a donc :*

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\Omega\mathrm{M}} + \overrightarrow{\mathrm{O}\Omega} \text{ avec } \overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}\ ;\ \overrightarrow{\Omega\mathrm{M}} = \mathrm{X}\,\vec{\imath} + \mathrm{Y}\,\vec{\jmath} \text{ et } \overrightarrow{\mathrm{O}\Omega} = 2\,\vec{\imath}$$

Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont le même couple de coordonnées, on a donc la formule de changement de repère :

$$\begin{cases} x = \mathrm{X} + 2 \\ y = \mathrm{Y} \end{cases}.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{C} &\iff y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 8 \\ &\iff \mathrm{Y} = (\mathrm{X}+2)^4 - 8(\mathrm{X}+2)^3 + 22(\mathrm{X}+2)^2 - 24(\mathrm{X}+2) + 8 \\ &\ \ \vdots \\ &\iff \mathrm{Y} = \mathrm{X}^4 - 2\mathrm{X}^2 \end{aligned}$$

La fonction polynôme $p : x \mapsto x^4 - 2x^2$ est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :

$$p(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 = x^4 - 2x^2 = p(x).$$

Donc p est une fonction paire et par suite la droite D d'équation $x = 2$ est axe de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$. □

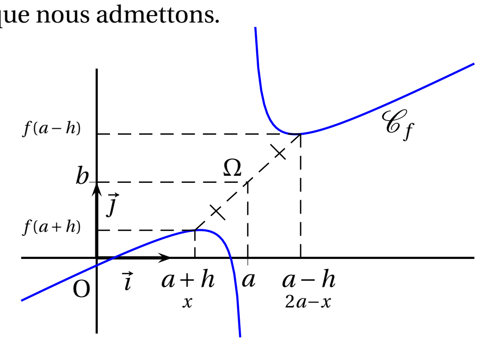
II.2.3 Centre de symétrie d'une courbe

Une observation graphique permet d'énoncer les théorèmes suivants que nous admettons.

Théorème II.2.3

La courbe $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport au point $\Omega(a,b)$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \textbf{(1)} & \mathrm{D}_f \text{ est symétrique par rapport à } a. \\ \textbf{(2)} & \text{Pour tout réel } h \text{ tel que } h \in \mathrm{D}_f : \\ & \dfrac{f(a+h)+f(a-h)}{2} = b. \end{cases}$$



Remarque *La condition (2) du théorème II.2.3 peut également s'écrire :*
$\forall x \in \mathrm{D}_f,\ 2b - f(2a-x) = f(x)$

Exercice II.2.3. ***Démontrer que le point $\Omega(2;1)$ est centre de symétrie de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2-3x+3}{x-2}$.***

Solution *f est une fonction rationnelle, son ensemble de définition est $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ et D_f est symétrique par rapport à 2.*

1re méthode *Soit h un réel tel que $2+h \in D_f$, on a :*

$$\begin{aligned} f(2+h) &= \frac{(2+h)^2 - 3(2+h) + 3}{(2+h)-2} \\ &= \frac{h^2 + 4h + 4 - 3h - 6 + 3}{h} \\ &= h + 1 + \frac{1}{h} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f(2-h) &= \frac{(2-h)^2 - 3(2-h) + 3}{(2-h)-2} \\ &= \frac{h^2 - 4h + 4 + 3h - 6 + 3}{-h} \\ &= -h + 1 - \frac{1}{h} \end{aligned}$$

Pour tout réel h tel que $2+h \in D_f$, on a :

$$\frac{f(2+h)+f(2-h)}{2} = \frac{1}{2}\left(h + 1 + \frac{1}{h} - h + 1 - \frac{1}{h}\right) = 1$$

donc le point $\Omega(2;1)$ est centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$.

***2^e^ méthode** Pour tout x de D_f, on a :*

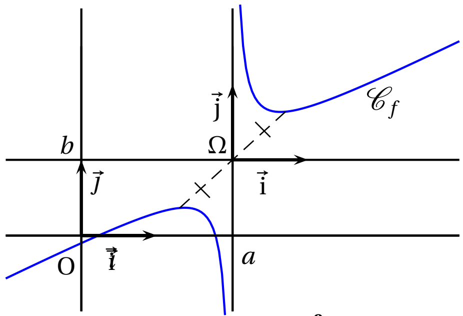
$$\begin{aligned}
2-f(4-x) &= 2-\frac{(4-x)^2-3(4-x)+3}{(4-x)-2}\\
&= \frac{2(2-x)-\left(x^2-8x+16+3x-12+3\right)}{2-x}\\
&= \frac{-x^2+3x-3}{2-x}\\
&= f(x)
\end{aligned}$$

donc le point $\Omega(2;1)$ est centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$. □

On peut également traiter le problème par un changement d'origine.

THÉORÈME II.2.4

Soit $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique d'une fonction f relativement à un repère orthogonal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et Ω le point de coordonnées (a,b).
La courbe $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à Ω si et seulement si $\mathscr{C}_f$ est la représentation graphique d'une fonction impaire relativement au repère $(\Omega;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.



Exercice II.2.4. ***Démontrer que le point $\Omega(2;1)$ est centre de symétrie de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2-3x+3}{x-2}$.***

***Solution** Soit M un point du plan, (x,y) ses coordonnées dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et (X,Y) ses coordonnées dans le repère $(\Omega;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On a donc :*

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{\Omega M}+\overrightarrow{O\Omega} \text{ avec } \overrightarrow{OM}=x\,\vec{\imath}+y\,\vec{\jmath}\,;\ \overrightarrow{\Omega M}=X\,\vec{\imath}+Y\,\vec{\jmath} \text{ et } \overrightarrow{O\Omega}=2\,\vec{\imath}+\vec{\jmath}$$

Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont le même couple de coordonnées, on a donc la formule de changement de repère :

$$\left\{\begin{array}{l} x=X+2\\ y=Y+1\end{array}\right. .$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
M\in\mathscr{C} &\iff y=\frac{x^2-3x+3}{x-2}\\
&\iff Y+1=\frac{(X+2)^2-3(X+2)+3}{(X+2)-2}\\
&\ \ \vdots\\
&\iff Y=X+\frac{1}{X}
\end{aligned}$$

La fonction rationnelle $g : x\mapsto x+\frac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout réel non nul x :

$$g(-x)=(-x)+\frac{1}{-x}=-\left(x+\frac{1}{x}\right)=-g(x).$$

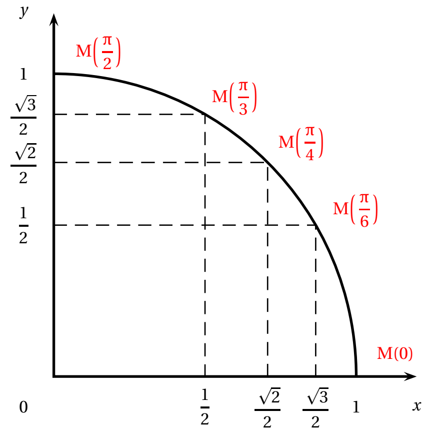
Donc g est une fonction impaire et par suite le point $\Omega(2;1)$ est centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$. □

II.3 Trigonométrie

II.3.1 Quelques valeurs remarquables

Le tableau ci-dessus a été vu en classe de 2^e^.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non déf.



Pour tout réel x, on a :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1\,; \tag{II.8}$$

$$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \text{ et } -1 \leqslant \sin x \leqslant 1 \tag{II.9}$$

II.3.2 Quelques formules

II.3.2.a Formules de symétries

Les formules de ce paragraphe se déduisent des figures II.1 et II.2.
Pour tout réel x, on a :

$$\cos(-x) = \cos x \qquad \cos(\pi - x) = -\cos x \qquad \cos(\pi + x) = -\cos x \tag{II.10}$$

$$\sin(-x) = -\sin x \qquad \sin(\pi - x) = \sin x \qquad \sin(\pi + x) = -\sin x \tag{II.11}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x \tag{II.12}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos x \tag{II.13}$$

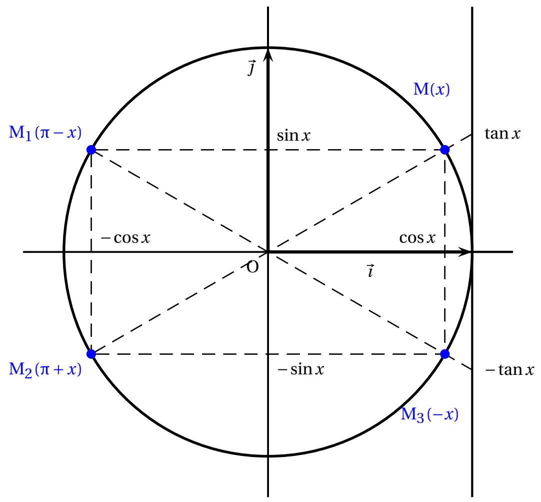


FIGURE II.1 – Images de x, $-x$, $\pi - x$ et $\pi + x$

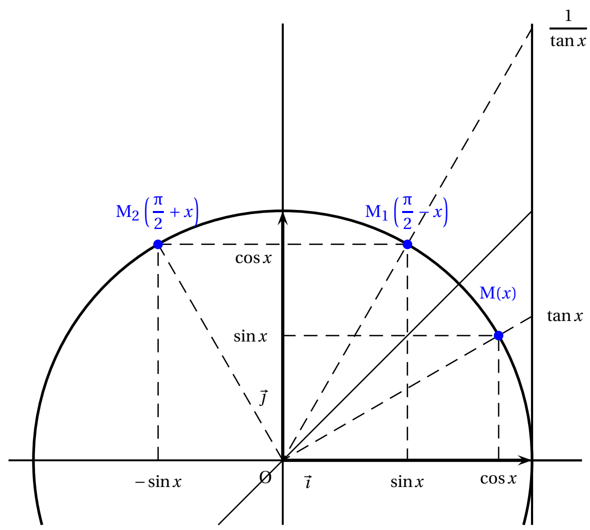


FIGURE II.2 – Images de x, $\frac{\pi}{2} - x$ et $\frac{\pi}{2} + x$

Si de plus x n'est pas multiple $\frac{\pi}{2}$, on a :

$$\tan(-x) = -\tan x \qquad \tan(\pi - x) = -\tan x \qquad \tan(\pi + x) = \tan x \tag{II.14}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x} \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\frac{1}{\tan x} \tag{II.15}$$

II.3.2.b Formules d'addition

Pour tous réel a et b, on a :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \qquad \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \tag{II.16}$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \qquad \sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a \tag{II.17}$$

Si de plus ni a ni b ni $a+b$ ne sont de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), on a :

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \qquad \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} \tag{II.18}$$

II.3.2.c Formules de duplication

En prenant : $a = b = x$; dans les formules (II.16), (II.17) et (II.18), on obtient les formules suivantes. Pour tout réel x, on a :

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x \qquad \sin 2x = 2 \sin x \cos x \tag{II.19}$$

Si de plus x n'est pas multiple $\frac{\pi}{4}$, on a :

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} \tag{II.20}$$

En posant : $t = \tan \frac{x}{2}$; on déduit des formules (II.19) et (II.20), lorsque t et $\tan x$ son définis :

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \tan x = \frac{2t}{1-t^2} \tag{II.21}$$

II.3.2.d Sommes différences et produits de fonction circulaires

En posant $p = a+b$ et $q = a-b$ dans (II.16) et (II.17), on démontre que pour tous réels p et q, on a :

$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \qquad \sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \tag{II.22}$$
$$\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \qquad \sin(p) - \sin(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \tag{II.23}$$

On déduit par addition ou soustraction dans les formules (II.16) et (II.17) que pour tous réels a et b :

$$\cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b) \tag{II.24}$$
$$\sin a \sin b = \cos(a+b) - \cos(a-b) \tag{II.25}$$
$$\sin a \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b) \tag{II.26}$$

II.3.3 Équations trigonométriques

II.3.3.a $\cos x = \cos\alpha$

THÉORÈME II.3.1
Soit α un nombre réel.

$$\cos x = \cos\alpha \iff \left|\begin{array}{c} x = \alpha + k2\pi \\ \text{ou} \\ x = -\alpha + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

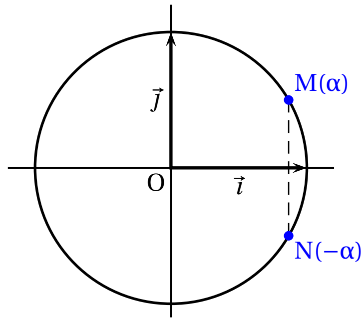


FIGURE II.3 – Équation $\cos x = \cos\alpha$

Remarque *On peut aussi écrire :*

$$\cos x = \cos\alpha \iff \left|\begin{array}{c} x \equiv \alpha \,(\text{mod}\, 2\pi) \\ \textit{ou} \\ x \equiv -\alpha \,(\text{mod}\, 2\pi) \end{array}\right.$$

Exercice II.3.1. ***Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique (unité graphique : 3 cm).***
a. $2\cos x = -1$.
b. $\cos 2x = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

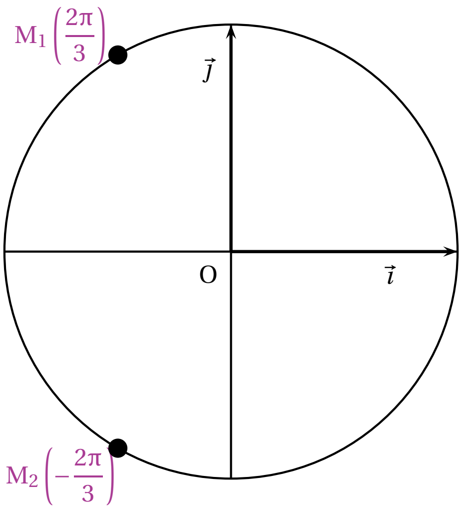


FIGURE II.4 – Images des solutions de (E_1)

Solution ***a.*** *Résolvons l'équation :*

$$2\cos x = -1 \qquad (E_1)$$

On a :

$$\begin{aligned} (E_1) &\iff \cos x = -\frac{1}{2} \\ &\iff \cos x = \cos\frac{2\pi}{3} \\ &\iff \left|\begin{array}{l} x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \\ \qquad \textit{ou} \\ x = -\frac{2\pi}{3} + k'2\pi \ (k' \in \mathbb{Z}) \end{array}\right. \end{aligned}$$

Les images des solutions sur le cercle trigonométrique sont représentées sur la figure II.4.

b. *Résolvons l'équation :*

$$\cos 2x = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \qquad (E_2)$$

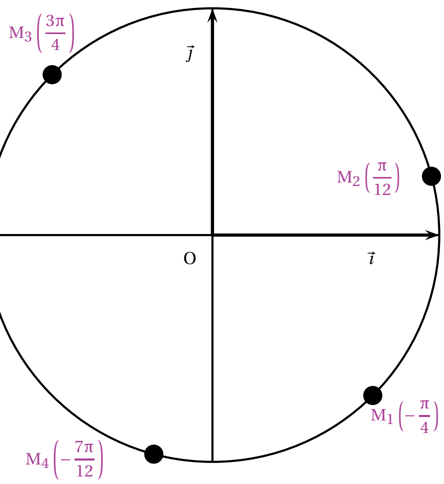


FIGURE II.5 – Images des solutions de (E_2)

On a :

$$\begin{aligned} (E_2) &\iff \left|\begin{array}{l} 2x = x - \frac{\pi}{4} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \\ \qquad \textit{ou} \\ 2x = -x + \frac{\pi}{4} + k'2\pi \ (k' \in \mathbb{Z}) \end{array}\right. \\ &\iff \left|\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \\ \qquad \textit{ou} \\ 3x = \frac{\pi}{4} + k'2\pi \ (k' \in \mathbb{Z}) \end{array}\right. \\ &\iff \left|\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \\ \qquad \textit{ou} \\ x = \frac{\pi}{12} + k'\frac{2\pi}{3} \ (k' \in \mathbb{Z}) \end{array}\right. \end{aligned}$$

Les images des solutions sur le cercle trigonométrique sont représentées sur la figure II.5.□

II.3.3.b $\sin x = \sin\alpha$

THÉORÈME II.3.2

Soit α un nombre réel.

$$\sin x = \sin\alpha \quad\Longleftrightarrow\quad \left|\begin{array}{c} x = \alpha + k2\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

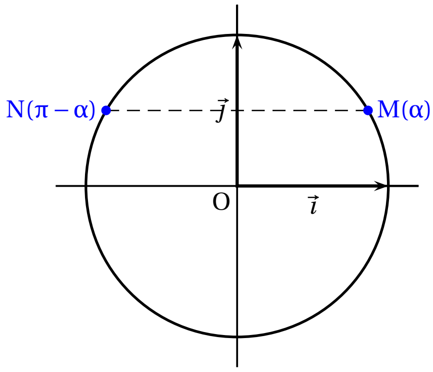


FIGURE II.6 – Équation $\sin x = \sin\alpha$

Remarque *On peut aussi écrire :*

$$\sin x = \sin a \quad\Longleftrightarrow\quad \left|\begin{array}{c} x \equiv \alpha\,(\mathrm{mod}\,2\pi) \\ \textit{ou} \\ x \equiv \pi - \alpha\,(\mathrm{mod}\,2\pi) \end{array}\right.$$

Exercice II.3.2. ***Résoudre dans $\mathbb{R}$ et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique (unité graphique : 3 cm) : $2\sin^2 x = 1$.***

Solution *Résolvons l'équation :*

$$2\sin^2 x = 1 \tag{E$_3$}$$

On a : $(E_3) \Longleftrightarrow \sin^2 x - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0$

$$\Longleftrightarrow \left(\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \textit{ ou } \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Longleftrightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{4} \textit{ ou } \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \left|\begin{array}{c} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \\ \textit{ou} \\ x = \pi - \frac{\pi}{4} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \\ \textit{ou} \\ x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \\ \textit{ou} \\ x = \pi + \frac{\pi}{4} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{array}\right.$$

$$(E_3) \Longleftrightarrow \left|\begin{array}{c} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \\ \textit{ou} \\ x = 3\frac{\pi}{4} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \\ \textit{ou} \\ x = 7\frac{\pi}{4} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \\ \textit{ou} \\ x = 5\frac{\pi}{4} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{array}\right.$$

$$(E_3) \Longleftrightarrow \left|\begin{array}{c} x = \frac{\pi}{4} + (4k) \times \frac{\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z}) \\ \textit{ou} \\ x = \frac{\pi}{4} + (4k+1) \times \frac{\pi}{2} ; (k \in \mathbb{Z}) \\ \textit{ou} \\ x = \frac{\pi}{4} + (4k+3) \times \frac{\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z}) \\ \textit{ou} \\ x = \frac{\pi}{4} + (4k+2) \times \frac{\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z}) \end{array}\right.$$

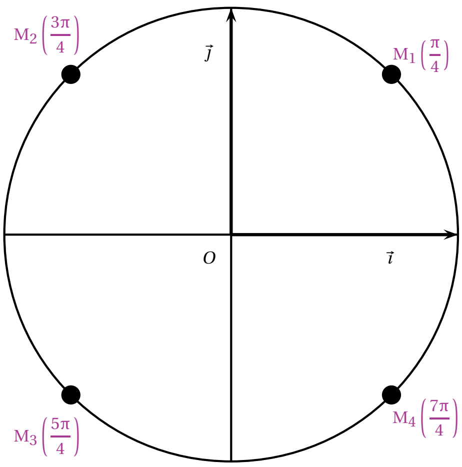


FIGURE *II.7 – Images des solutions de (E$_3$)*

Or $(4k)$, $(4k+1)$, $(4k+2)$, $(4k+3)$ *sont des entiers et réciproquement tout entier* n *est de la forme :* $4k + r$ *avec* $r \in$

$\{0;1;2;3\}$ *; en effet, k et r sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de n par 4 ; donc :*

$$\boxed{(\mathrm{E}_3) \Longleftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2} \ (n \in \mathbb{Z})}$$

Les images des solutions sur le cercle trigonométrique sont représentées sur la figure II.7. □

II.3.3.c $\tan x = \tan\alpha$

THÉORÈME II.3.3
Soit α un nombre réel tel que $\tan\alpha$ soit défini.

$$\tan x = \tan\alpha \iff x = \alpha + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Remarque *On peut aussi écrire :*

$$\tan x = \tan\alpha \iff x \equiv \alpha \,(\mathrm{mod}\, \pi)$$

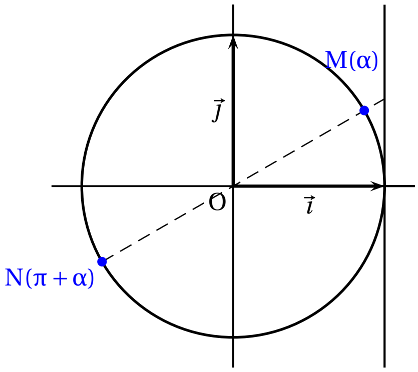


FIGURE II.8 – Équation $\tan x = \tan\alpha$

II.3.3.d $a\cos x + b\sin x = c$

On rappelle que les formules de passages entre coordonnées rectangulaires et coordonnées polaires sont par : $\begin{cases} r &= \sqrt{a^2+b^2} \\ \cos\theta &= \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\theta &= \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$

et $\begin{cases} a &= r\cos\theta \\ b &= r\sin\theta \end{cases}$.

Pour plus de précisions, on pourra se référer au paragraphe VII.2.4 page 81. On se propose de résoudre l'équation :

$$a\cos x + b\sin x = c \tag{II.27}$$

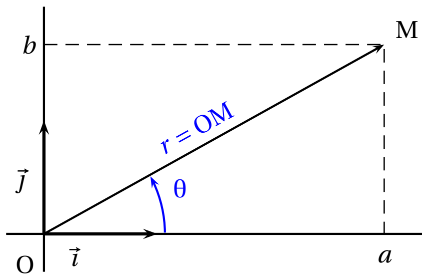


FIGURE II.9 – Coordonnées polaires

Où a, b, c sont des réels tels que a et b ne soient pas tous nuls.

Posons : $\begin{cases} r &= \sqrt{a^2+b^2} \\ \cos\theta &= \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\theta &= \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$; on a alors : $\begin{cases} a &= r\cos\theta \\ b &= r\sin\theta \end{cases}$; d'où il vient :

$$(\text{II.9}) \iff r\cos\theta\cos x + r\sin\theta\sin x = c \iff \cos(x-\theta) = \frac{c}{r}.$$

On est ainsi ramené au type d'équation étudié au paragraphe II.3.3.a (page 15).

Exercice II.3.3. ***Résoudre dans $\mathbb{R}$ et représenter sur le cercle trigonométrique les solutions de l'équation :***

$$\mathbf{3\cos x + \sqrt{3}\sin x = -3} \tag{II.28}$$

Solution *On a :* $\sqrt{3^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ *; on en déduit que :*

$$
\begin{aligned}
\text{(II.28)} \quad & \iff 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right) = -3 \\
& \iff \cos x \cos\frac{\pi}{6} + \sin x \sin\frac{\pi}{6} = -\frac{3}{2\sqrt{3}} \\
& \iff \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{5\pi}{6} \\
& \iff \left|\begin{array}{l} x - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \\ \quad \textit{ou} \\ x - \dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}) \\
& \iff \left|\begin{array}{l} x = \pi + k2\pi \\ \quad \textit{ou} \\ x = -\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})
\end{aligned}
$$

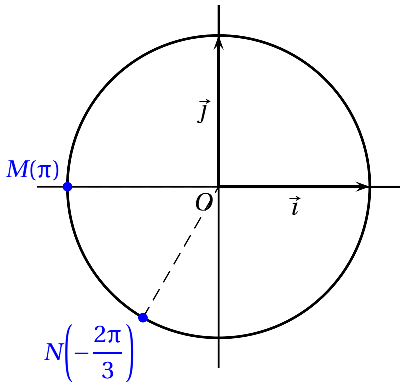


FIGURE *II.10 – Images des solutions de l'équation* (II.28)

□

II.4 Géométrie du triangle

Dans toute cette partie ABC désigne un triangle, $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$, désignent respectivement les angles géométriques $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$, $\widehat{ACB}$; a, b, c désignent respectivement les distances BC, CA et AB et $\mathscr{A}$ désigne l'aire du triangle ABC.

II.4.1 Aire d'un triangle

Comme chacun sait, l'aire d'un triangle se calcule par la formule :

$$\mathscr{A} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}.$$

Dans le triangle ABC ci-contre, si on choisit AB pour base alors la hauteur CH est déterminée par :

$$\text{CH} = \text{BC}\cos\widehat{\text{ABC}} = a\sin\widehat{\text{B}}.$$

On en déduit que : $\mathscr{A} = \frac{1}{2}ca\sin\widehat{\text{B}}$.

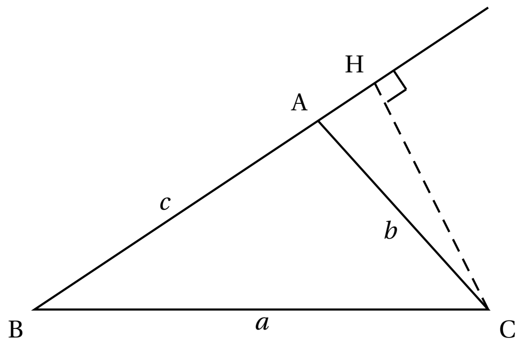


FIGURE II.11 –

Plus généralement :

$$\mathscr{A} = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{\text{A}} = \frac{1}{2}ca\sin\widehat{\text{B}} = \frac{1}{2}ab\sin\widehat{\text{C}} \tag{II.29}$$

II.4.2 Théorème des sinus

THÉORÈME II.4.1

Soit ABC un triangle et $\mathscr{A}$ son aire et R le rayon de son cercle circonscrit, on a :

$$\frac{2\mathscr{A}}{abc} = \frac{\sin\widehat{\text{A}}}{a} = \frac{\sin\widehat{\text{B}}}{b} = \frac{\sin\widehat{\text{C}}}{c} = \frac{1}{2\text{R}}.$$

DémonstrationEn multipliant (II.29) membre à membre par $\frac{2}{abc}$, il vient :

$$\frac{2\mathscr{A}}{abc} = \frac{\sin\widehat{\text{A}}}{a} = \frac{\sin\widehat{\text{B}}}{b} = \frac{\sin\widehat{\text{C}}}{c}.$$

Les trois angles du triangle ABC ne peuvent être tous droits ou obtus, car sinon leur somme serait strictement supérieure à un angle plat. On en déduit que l'un des angles au moins est aigu, par exemple $\widehat{\text{C}}$. Soit I le milieu du segment [AB] et O le centre du cercle circonscrit. Le triangle OAB est isocèle en O et, d'après le théorème de l'angle inscrit, $\widehat{\text{AOB}} = 2\widehat{\text{ACB}}$. On en déduit que le triangle OBI est rectangle en I et que : $\widehat{\text{BOI}} = \widehat{\text{C}}$; d'où il vient : $\frac{c}{2} = \text{BI} = \text{R}\sin\widehat{\text{C}}$; donc : $\frac{\sin\widehat{\text{C}}}{c} = \frac{1}{2\text{R}}$. □

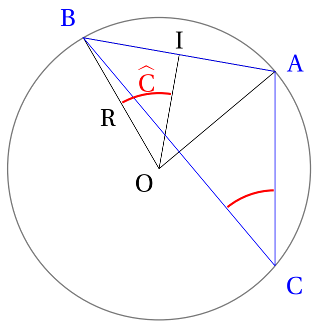


FIGURE II.12 –

II.4.3 Théorème d'Al Kashi

Théorème II.4.2
Soit ABC un triangle, on a :
(1) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$
(2) $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\widehat{B}$
(3) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}$

Démonstration (1) On a : $a^2 = \overrightarrow{BC}^2 = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)^2 = AC^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$.
On démontre de même **(2)** et **(3)**. □

Remarques
1. *Lorsque l'un des angles est droit, on retrouve le théorème de* Pythagore *; en effet si par exemple l'angle* $\widehat{A}$ *est droit,* ***(1)*** *devient :* $a^2 = b^2 + c^2$.
2. *Le théorème des sinus (II.4.1) et le théorème d'*Al Kashi *(II.4.2) permettent lorsqu'elle est possible la résolution des triangles*[1].

II.4.4 Théorème de la médiane

Théorème II.4.3
Soit ABC un triangle et A' le milieu de [BC], on a :
(1) $2AA'^2 = AB^2 + AC^2 - \frac{1}{2}BC^2$;
(2) $AA'^2 = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}BC^2$.

Démonstration (1) On a :
$$\begin{aligned}2AA'^2 &= \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA'}\right)^2 + \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA'}\right)^2\\ &= \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)^2 + \left(\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)^2\\ &= AB^2 + \frac{1}{4}BC^2 + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB} + AC^2 + \frac{1}{4}BC^2 + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}\\ &= AB^2 + AC^2 + \frac{1}{2}BC^2 + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CB}\\ &= AB^2 + AC^2 - \frac{1}{2}BC^2\end{aligned}$$
(2) En utilisant **(1)**, il vient : $\frac{1}{2}BC^2 = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{2}\left(2AA'^2 + \frac{1}{2}BC^2 - 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)$;
d'où l'on tire : $AA'^2 = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}BC^2$. □

II.5 Polynômes du second degré

Un polynôme P de degré 2 défini par $P(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$), est aussi appelé trinôme du second degré. L'objectif de cette section est de savoir factoriser $P(x)$, résoudre l'équation $P(x) = 0$, étudier le signe $P(x)$ suivant les valeurs de x, représenter graphiquement P et trouver l'extremum de P.

II.5.1 Forme canonique

Pour factoriser un polynôme P, de la forme : $P(x) = ax^2 + bx + c$; on écrit $P(x)$ sous forme canonique pour faire apparaître soit la différence de deux carrés (auquel cas $P(x)$ est factorisable) soit la somme de deux carrés (auquel cas $P(x)$ n'est pas factorisable). La forme canonique de $P(x)$ est : $P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$. Pour obtenir cette formule, on utilise la démarche explicitée dans le tableau ci-dessous.

1. Résoudre un triangle : étant donnés un certain nombre d'angles et de côtés d'un triangle, déterminer les angles et les côtés non donnés.

étapes	cas particulier	cas général
1.	$P(x)=3x^2+5x-7$	$P(x)=ax^2+bx+c$
	$P(x)=3\left(x^2+\frac{5}{3}x-\frac{7}{3}\right)$	$P(x)=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$
2.	$P(x)=3\left(x^2+2\frac{5}{6}x+\left(\frac{5}{6}\right)^2-\left(\frac{5}{6}\right)^2-\frac{7}{3}\right)$	$P(x)=a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right)$
	$P(x)=3\left[\left(x+\frac{5}{6}\right)^2-\left(\frac{5}{6}\right)^2-\frac{7}{3}\right]$	$P(x)=a\left[\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right]$
	$P(x)=3\left[\left(x+\frac{5}{6}\right)^2-\frac{25}{36}-\frac{84}{36}\right]$	$P(x)=a\left[\left(x-\frac{b}{a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{4ac}{4a^2}\right]$
	$P(x)=3\left[\left(x+\frac{5}{6}\right)^2-\frac{109}{36}\right]$	
3.	$P(x)=3\left[\left(x+\frac{5}{6}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{109}}{6}\right)^2\right]$	$P(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$
	$P(x)=3\left(x+\frac{5}{6}-\frac{\sqrt{109}}{6}\right)\left(x+\frac{5}{6}+\frac{\sqrt{109}}{6}\right)$	
	$P(x)=3\left(x-\frac{-5+\sqrt{109}}{6}\right)\left(x-\frac{-5-\sqrt{109}}{6}\right)$	

Récapitulatif des étapes

1. On met, si besoin est, le coefficient dominant en facteur
2. On reconnaît la somme des termes de degrés 2 et 1 comme le début d'une identité remarquable.
3. Si l'expression entre crochets est la différence de deux quantités positives, alors on reconnaît la différence de deux carrés et on factorise; sinon, l'expression entre crochets est la somme de deux quantités positives et il n'existe pas de factorisation en produit de facteur de degré un à coefficient réels.

DÉFINITION II.5.1

Le nombre, Δ, défini par : $\Delta=b^2-4ac$; est appelé *discriminant* de P.

La forme canonique de P devient alors :

$$P(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right] \tag{II.30}$$

II.5.2 Représentation graphique et sens de variation

Le plan est muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
D'après (II.30), pour tout réel x :

$$P(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a} \tag{II.31}$$

Introduisons la fonction $u : x\mapsto ax^2$ et $\mathscr{C}_u$ sa représentation graphique. D'après (II.31) la courbe, $\mathscr{P}$, de P est l'image de $\mathscr{C}_u$ par la translation de vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}-\frac{b}{2a}\\-\frac{\Delta}{4a}\end{pmatrix}$.

THÉORÈME II.5.1

La représentation graphique $\mathscr{P}$ de $P(x)=ax^2+bx+c$ (avec $a\neq 0$) est une parabole d'axe parallèle à Oy et de sommet $S\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$; de plus, dans le repère $(S;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, $\mathscr{P}$ a pour équation : $Y=aX^2$.

Remarque *D'après (II.31) on a :* $P\left(-\frac{b}{2a}\right)=-\frac{\Delta}{4a}$ *; donc en pratique on obtient l'ordonnée de S en calculant* $P\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

Exemple *On se propose de représenter graphiquement la fonction f définie par :* $f(x)=x^2-5x+4$.
On a : $-\frac{b}{2a}=\frac{5}{2}$ *et* $f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{25}{4}-\frac{5}{2}+4=\frac{16}{4}-\frac{25}{4}=-\frac{9}{4}$.
Introduisons le point $S\left(\frac{5}{2};-\frac{9}{4}\right)$, *dans le repère* $(S;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, $\mathscr{C}_f$ *a pour équation :* $Y=X^2$.
Nous en déduisons la courbe de la figure II.13.

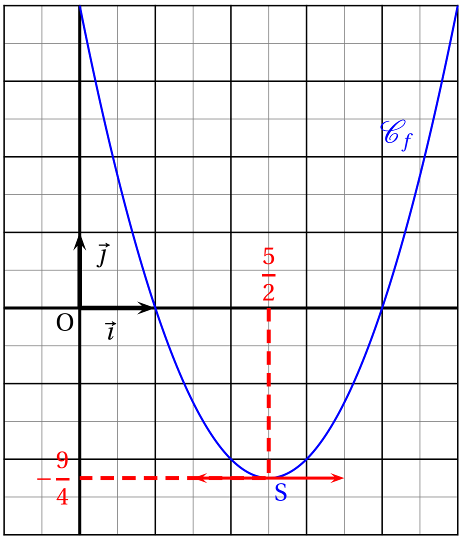


FIGURE II.13 – Représentation graphique de f.

On déduit du théorème II.5.1 le tableau de variations de P en fonction du signe de a.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-\frac{\Delta}{4a}$	↗ $+\infty$

FIGURE II.14 – Lorsque $a>0$.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$-\frac{\Delta}{4a}$	↘ $-\infty$

FIGURE II.15 – Lorsque $a<0$.

II.5.3 Factorisation et résolution d'équations

Dans une décomposition en produit, tout facteur de degré1 apporte une racine au polynôme. On en déduit que si P peut se décomposer en produit de deux facteurs de degré 1 alors P a au moins une racine. Ou encore, par contraposition : Si un polynôme de degré 2 n'a pas de racine alors on ne peut pas le décomposer en produit de deux facteurs de degré 1.

Reprenons la forme canonique de P, (II.30) dans le cas où : $\Delta>0$. On a alors :

$$\mathrm{P}(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right]=a\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right).$$

On en déduit la factorisation :

$$\mathrm{P}(x)=a\left(x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right).$$

En particulier P a deux racines distinctes :

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\qquad \text{et}\qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Nous en déduisons le théorème suivant.

Théorème II.5.2

Soit $\mathrm{P} : x \mapsto ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$) un trinôme du second degré et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

Si $\Delta > 0$ P a deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

et pour tout réel x :

$$\mathrm{P}(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Si $\Delta = 0$ P a une racine double :

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

et pour tout réel x :

$$\mathrm{P}(x) = a(x - x_0)^2.$$

Si $\Delta < 0$ P n'a pas de racine et n'est pas factorisable en produit de deux facteurs de degré 1 à coefficients réels.

Remarques

1. *Si on remplace Δ par 0 dans les formules de calcul de x_1 et x_2, on obtient : $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = x_0$.*

2. *Si a et c sont de signes contraires, alors $\Delta > 0$ et P a deux racines distinctes.*

3. *Bien qu'exhaustive, cette méthode n'est pas opportune dans le cas ou la factorisation du polynôme est immédiate (identité remarquable ou polynôme P qui est la somme de 2 monômes).*

4. *Le théorème II.5.2 peut être aussi bien utilisé pour factoriser un polynôme du second degré,P, que pour résoudre l'équation, $\mathrm{P}(x) = 0$ (voir corollaire II.5.3).*

Exercice II.5.1. ***Factoriser lorsque cela est possible.***

a. $\mathbf{P}(x) = 2x^2 + 3x - 6.$

b. $\mathbf{P}(x) = 2x^2 - 8x + 8.$

c. $\mathbf{P}(x) = 2x^2 - 5x + 8.$

d. $\mathbf{P}(x) = -5x^2 + 3x + 2.$

Solution

a. *On a : $\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 57$; donc $\Delta > 0$ et P a deux racines :*

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{57}}{4} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-3 + \sqrt{57}}{4}.$$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\mathbf{P}(x) = 2\left(x - \frac{-3 - \sqrt{57}}{4}\right)\left(x - \frac{-3 + \sqrt{57}}{4}\right)}.$$

b. Méthode des identités

$$\boxed{\mathbf{P}(x) = 2\left(x^2 - 4x + 4\right) = 2(x-2)^2}.$$

Méthode du discriminant *On a : $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 2 \times 8 = 0$; donc $\Delta = 0$ et P a une racine double :*

$$x_0 = \frac{8}{4} = 2.$$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\mathbf{P}(x) = 2(x-2)^2}.$$

c. *On a : $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times (8) = 39$; donc $\Delta < 0$.*

$$\boxed{\textit{P n'est pas factorisable.}}$$

d. Méthode de la racine évidente *On voit que 1 est racine évidente, donc pour tout réel x :*

$$\boxed{\mathbf{P}(x) = (x-1)(-5x-2)}.$$

Méthode du discriminant *On a : $\Delta = 3^2 - 4 \times (-5) \times 2 = 49 = 7^2$; donc $\Delta > 0$ et P a deux racines :*

$$x_1 = \frac{-3-7}{-10} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-3+7}{-10} = -\frac{2}{5}.$$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\mathbf{P}(x) = 2(x-1)\left(x+\frac{5}{2}\right)}.$$

□

Corollaire II.5.3

Soit a, b et c trois réels (avec $a \neq 0$), E l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{E}$$

et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

Si $\Delta > 0$ (E) a deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Si $\Delta = 0$ (E) a une seule solution :

$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

Si $\Delta < 0$ (E) n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Exercice II.5.2. ***Résoudre dans $\mathbb{R}$.***

a. $3x^2 + 5x - 7 = 0$.

b. $3x^2 - 5x - 2 = 0$.

c. $3x^2 + 5x + 7 = 0$.

d. $-5x^2 + 4x - \frac{4}{5} = 0$.

Solution a. *On a : $\Delta = 25 - 4 \times 3 \times (-7) = 109$; donc $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions :*

$$x_1 = \frac{-5-\sqrt{109}}{6} \quad \textit{et} \quad x_2 = \frac{-5+\sqrt{109}}{6}.$$

$$\boxed{\mathbf{S} = \left\{\frac{-5-\sqrt{109}}{6}, \frac{-5+\sqrt{109}}{6}\right\}}.$$

b. Méthode de la racine évidente *On voit que 2 est racine évidente, donc pour tout réel x :*

$$3x^2 - 5x - 2 = (x-2)(3x+1).$$

$$\boxed{\mathbf{S} = \left\{2; -\frac{1}{3}\right\}}.$$

c. *On a : $\Delta = 25 - 4 \times 3 \times 7 = -59$; donc $\Delta < 0$.*

$$\boxed{\mathbf{S} = \emptyset}.$$

d. Méthode des identités

$$-5x^2 + 4x - \frac{4}{5} = -5\left(x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{4}{25}\right) = -5\left(x - \frac{2}{5}\right)^2.$$

$$\boxed{\mathbf{S} = \left\{\frac{2}{5}\right\}}.$$

Méthode du discriminant *On a : $\Delta = 16 - 4 \times (-5) \times \left(-\frac{4}{5}\right) = 0$; donc $\Delta = 0$, l'équation a une seule solution :*

$$x_0 = \frac{-4}{-10} = \frac{2}{5}.$$

$$\boxed{\mathbf{S} = \left\{\frac{2}{5}\right\}}.$$

□

II.5.4 Signe d'un trinôme

On se propose de déterminer le signe de $\mathrm{P}(x) = ax^2 + bx + c$ en fonction de x. On a vu en II.5.3 que lorsque $\Delta > 0$, on a la factorisation :

$$\mathrm{P}(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)\,.$$

Donc en supposant que $x_1 < x_2$, on en déduit le tableau suivant :

x		x_1		x_2	
a	signe de a				
$x - x_1$	$-$	0	$+$		$+$
$x - x_2$	$-$		$-$	0	$+$
$\mathrm{P}(x)$	signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a

Lorsque $\Delta < 0$, d'après (II.30) : $\mathrm{P}(x) = a\underbrace{\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right]}_{\text{strictement positif}}$; donc P est du signe de a.

Nous en déduisons le théorème suivant.

Théorème II.5.4

Soit $\mathrm{P} : x \mapsto ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$) un trinôme du second degré et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

Si $\Delta > 0$ $\mathrm{P}(x)$ est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe contraire à l'intérieur.

Si $\Delta = 0$ $\mathrm{P}(x)$ est du signe de a et s'annule en $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.

Si $\Delta < 0$ $\mathrm{P}(x)$ est du signe de a.

Exercice II.5.3. ***Étudier le signe des polynômes suivants.***

a. $\mathbf{P_1 : x \mapsto -2x^2 + 3x + 4}$.

b. $\mathbf{P_2 : x \mapsto 3x^2 + 3x + 4}$.

c. $\mathbf{P_3 : x \mapsto -5x^2 + 2x - \frac{1}{5}}$.

Solution **a.** *On a :* $\Delta = 9 - 32 = 41$ *; donc* $\Delta > 0$ *et* P_1 *a deux racines :*

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{41}}{-4} \qquad \textit{et} \qquad x_2 = \frac{-3 + \sqrt{41}}{-4}.$$

On en déduit que le signe de P_1 *est donné par le tableau suivant.*

x		$\dfrac{3-\sqrt{41}}{4}$		$\dfrac{3+\sqrt{41}}{4}$	
$\mathrm{P}_1(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

b. *On a :* $\Delta = 9 - 48 = -39$ *; donc* $\Delta < 0$.

$$\boxed{\mathbf{P_2 > 0} \textbf{\textit{ sur }} \mathbb{R}.}$$

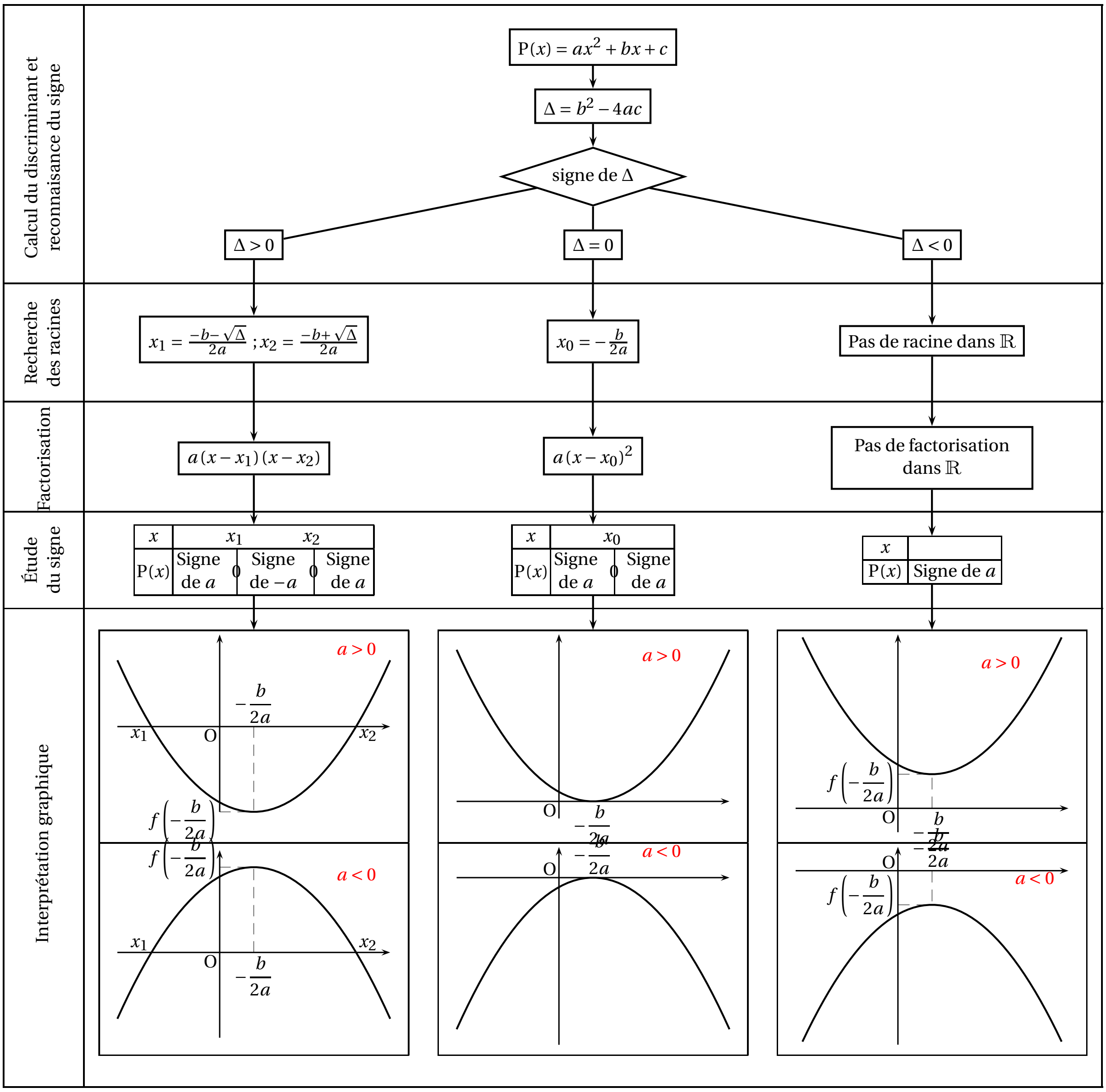
c. *On a :* $\Delta = 4 - 4 = 0$ *; donc* $\Delta = 0$ *et* P_3 *a une seule racine :*

$$x_0 = \frac{-2}{-10} = \frac{2}{5}.$$

$$\boxed{\mathbf{P_2 \geqslant 0} \textbf{\textit{ sur }} \mathbb{R} \textbf{\textit{ et }} \mathbf{P_2} \textbf{\textit{ est s'annule seulement en }} \mathbf{\frac{2}{5}}.}$$

□

II.5.5 Tableau récapitulatif



II.5.6 Compléments

THÉORÈME II.5.5 SOMME ET PRODUIT DES RACINES

Soit $ax^2 + bx + c$ un trîome du second degré qui a deux racines : x_1 et x_2. On a :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

THÉORÈME II.5.6 ÉQUATIONS EN SOMME ET PRODUIT

Soit deux nombres dont on connaît le produit P et somme S. Ces deux nombres sont les racines du trinôme :

$$x^2 - Sx + P.$$

II.5.7 Travaux dirigés

II.5.7.a Factorisation d'expressions bicarrées

Les trinômes bicarrés sont les trinômes de la forme $\mathrm{P} : x \mapsto ax^4 + bx^2 + c$.
L'objectif de ce travail dirigé est de dégagé à travers quelques exemples une méthode générale permettant de décomposer n'importe quel trinôme bicarré en produit de deux facteurs de degré 2.

Partie A – avec le discriminant

Factoriser (lorsque c'est possible) les polynômes suivants en utilisant la méthode du discriminant (*on pourra poser :* $\mathrm{X} = x^2$).
1. $\mathrm{P}_1 : x \mapsto 2x^4 + 3x^2 - 1$.
2. $\mathrm{P}_2 : x \mapsto x^4 + x^2 + 1$.
3. $\mathrm{P}_3 : x \mapsto 6x^4 - 5x^2 - 6$.
4. $\mathrm{P}_4 : x \mapsto x^4 + 16$.
5. $\mathrm{P}_5 : x \mapsto 2x^4 - 7x^2 + 6$.
6. $\mathrm{P}_6 : x \mapsto 2x^4 - x^2 + 8$.

Partie B – sans le discriminant

On constate que certains polynômes considérés ci-dessus ont un discriminant strictement négatif et ne sont donc pas factorisables par la méthode du discriminant. On se rappelle alors que cette méthode découle de la forme canonique que nous avions obtenue en factorisant par le coefficient dominant puis en considérant les deux premiers termes du facteur de degré 2 comme le début d'un carré. L'idée est alors, non pas de considérer les deux premiers termes du facteur de degré 2 comme le début d'un carré, mais de considérer les termes extrêmes du facteur de degré 2 comme les termes extrêmes d'un carré.
Factoriser les polynômes qui ne l'ont pas été dans la partie **A.**

II.5.7.b Équations en somme et produit

1. Soit $\mathrm{P} : x \mapsto ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré dont le discriminant est strictement positif.
Exprimer en fonction de a, b et c la somme et produit des racines.
2. Soit α et β deux nombres dont on connaît la somme, s et le produit, p.
Démontrer que α et β sont les racines du polynôme : $\mathrm{P} : x \mapsto x^2 - sx + p$.
3. Un rectangle a pour périmètre 24 et pour aire 35, déterminer ses dimensions.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 1 \end{cases}$
5. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = -12 \end{cases}$

II.5.8 Exercices

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique : 1 cm).
II.5.a. Écrire $\mathrm{Q} : x \mapsto x^2 - 2x + 2$ sous forme canonique.
II.5.b. Écrire $\mathrm{Q} : x \mapsto 4x^2 - 2x + 2$ sous forme canonique.
II.5.c. Écrire $\mathrm{R} : x \mapsto -5x^2 + 10x + 2$ sous forme canonique.
II.5.d. Tracer la courbe $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2 - 2x + 2$.
II.5.e. Tracer la courbe $\mathscr{P}$ d'équation $y = -3x^2 - 12x - 4$.

II.6 Exercices résolus

Exercice II.6.1. ***Le plan est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique : 1 cm).***
Représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{x+1}$.
Solution *L'ensemble de définition de f est $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. On a :*

$$\begin{array}{r|l} 2x+1 & x+1 \\ \cline{2-2} -1 & 2 \end{array}$$

Donc pour tout $x \in \mathrm{D}_f$ *:*

$$f(x) = \frac{2(x+1)-1}{x+1} = -\frac{1}{x+1} + 2.$$

On en déduit que la courbe représentative de f, $\mathscr{C}_f$, *est l'image de l'hyperbole* $\mathscr{H}$ *d'équation :* $y = -\frac{1}{x}$ *; par la translation de vecteur* $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$. *On en déduit le graphique de la figure II.16.* □

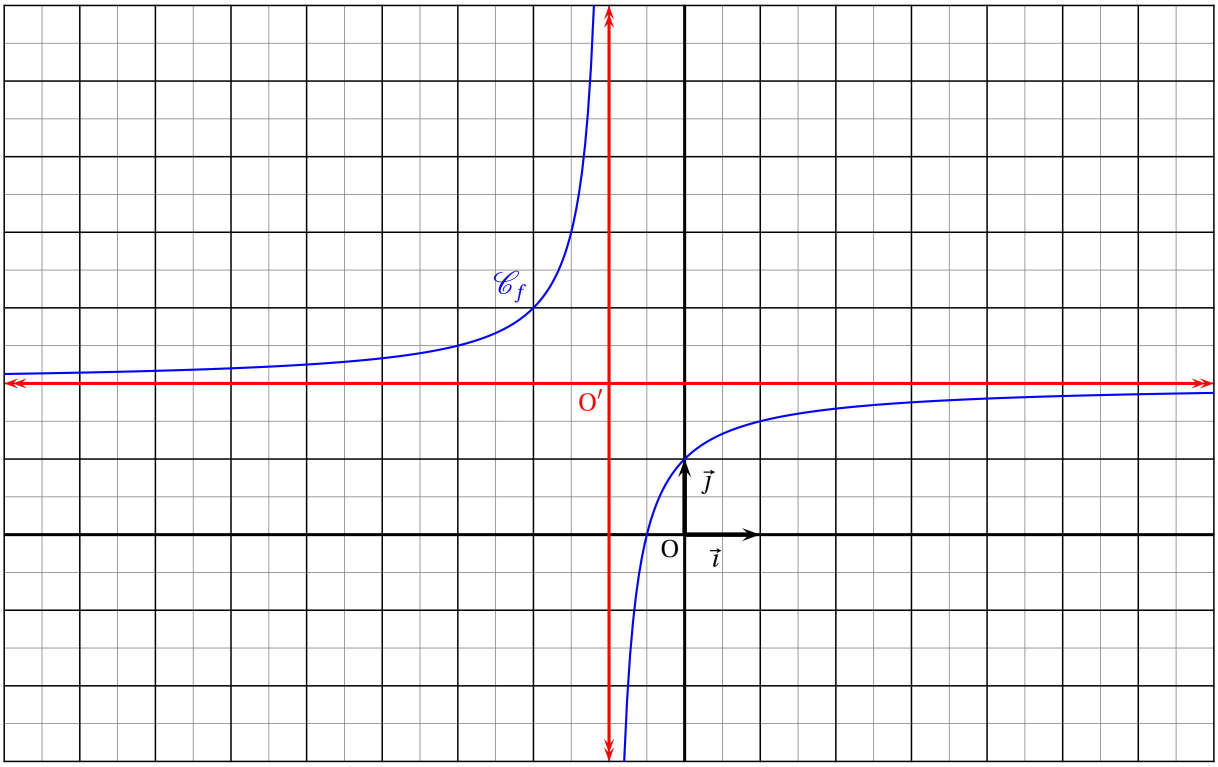


FIGURE II.16 – Représentation graphique de f.

Pour représenter graphiquement une fonction homographique, on peut transformer son écriture en utilisant une division de fonctions affines puis en déduire la courbe par un argument de fonctions associées.

Exercice II.6.2. ***m* désigne un nombre réel. On considère les fonctions** $f_m : x \mapsto mx + 5m + 3$ **et** $h : x \mapsto \frac{-x-2}{x+3}$ **ainsi que leurs représentations graphiques respectives** $\mathscr{D}_m$ **et** $\mathscr{H}$**.**

1. Déterminer, suivant les valeurs de m**, le nombre de points d'intersection des courbes** $\mathscr{D}_m$ **et** $\mathscr{H}$**.**

2. Démontrer que les droites $\mathscr{D}_m$ **concourent en un point A dont il conviendra de préciser les coordonnées.**

3. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ **(unité graphique : 1 cm).**

Tracer $\mathscr{H}$, $\mathscr{D}_{-4}$, $\mathscr{D}_{-1}$ **et** $\mathscr{D}_0$**.**

Solution **1.** *Pour tout réel* m, *les abscisses des points d'intersection des courbes* $\mathscr{D}_m$ *et* $\mathscr{H}$ *sont les solutions de l'équation :*

$$f_m(x) = h(x) \qquad (\mathrm{E}_m)$$

dont l'ensemble de validité est $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$.
Les courbes $\mathscr{D}_m$ *et* $\mathscr{H}$ *ont autant de points d'intersection que* (E_m) *a de solutions.*

$$\begin{aligned}(\mathrm{E}_m) \quad &\iff \quad mx + 5m + 3 = \frac{-x-2}{x+3}\\ &\iff \quad mx^2 + 3mx + 5mx + 15m + 3x + 9 = -x - 2\\ &\iff \quad mx^2 + (8m+4)x + 15m + 11 = 0.\end{aligned}$$

(E_0) *n'est pas une équation du second degré et :*

$$(\mathrm{E}_0) \quad \iff \quad 4x + 11 = 0 \quad \iff \quad x = -\frac{11}{4}.$$

Donc, pour $m=0$, (E_m) n'a qu'une solution et donc $\mathscr{H}$ et $\mathscr{D}_0$ n'ont qu'un point d'intersection.
Pour $m \neq 0$, (E_m) est une équation du second degré et le nombre de ses solutions est déterminé par le signe de son discriminant :

$$\Delta_m = (8m+4)^2 - 4m(15m+11) = 4\left((4m+2)^2 - 15m^2 - 11m\right) = 4\left(m^2+5m+4\right).$$

Δ_m est du signe de $\left(m^2+5m+4\right)$. $\Delta = 25-4\times 4 = 9$, donc Δ_m a deux racines : $m_1 = \dfrac{-5-3}{2} = -4$ et $m_1 = \dfrac{-5+3}{2} = -1$.
On en déduit le signe de Δ_m suivant les valeurs de m :

m		-4		-1		0	
Δ_m	$+$	0	$-$	0	$+$	$\|$	$+$

D'où l'on tire que :

- ***pour $m \in \{-4;-1;0\}$, $\mathscr{H}$ et $\mathscr{D}_m$ n'ont qu'un point d'intersection ;***
- ***pour $m \in]-4;-1[$, $\mathscr{H}$ et $\mathscr{D}_m$ n'ont pas de point d'intersection ;***
- ***pour $m \in]-\infty;-4[\cup]-1;0[\cup]0;+\infty[$, $\mathscr{H}$ et $\mathscr{D}_m$ ont deux points d'intersection.***

Un point $\mathrm{A}(x,y)$ appartient à toutes les droites $\mathscr{D}_m$ si, et seulement si pour tout $m \in \mathbb{R}$: $y = mx+5m+3$. Or :

$$y = mx+5m+3 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x+5)m+3-y=0.$$

On cherche donc x et y pour que le polynôme en m : $(x+5)m+3-y$; soit le polynôme nul. Cette condition est réalisée uniquement lorsque :

$$\begin{cases} x+5=0 \\ 3-y=0 \end{cases}$$

C'est-à-dire lorsque : $(x;y) = (-5;3)$.

$$\boxed{\textbf{\textit{Les droites }} \mathscr{D}_m \textbf{\textit{ concourent en }} \mathbf{A(-5;3)}}$$

2. *$\mathscr{D}_{-4}$, $\mathscr{D}_{-1}$ et $\mathscr{D}_0$ sont les droites d'équations respectives : $y=-4x-17$, $y=-x-2$ et $y=3$.*
De plus, pour tout $x \in \mathrm{D}_h$, on a : $h(x) = \dfrac{-x-2}{x+3} = \dfrac{-x-3+1}{x+3} = 1+\dfrac{1}{x+3}$. Donc $\mathscr{H}$ est l'image de l'hyperbole d'équation $y=\dfrac{1}{x}$ par la translation de vecteur $-3\vec{\imath}+\vec{\jmath}$. On déduit de cette étude la figure II.17. □

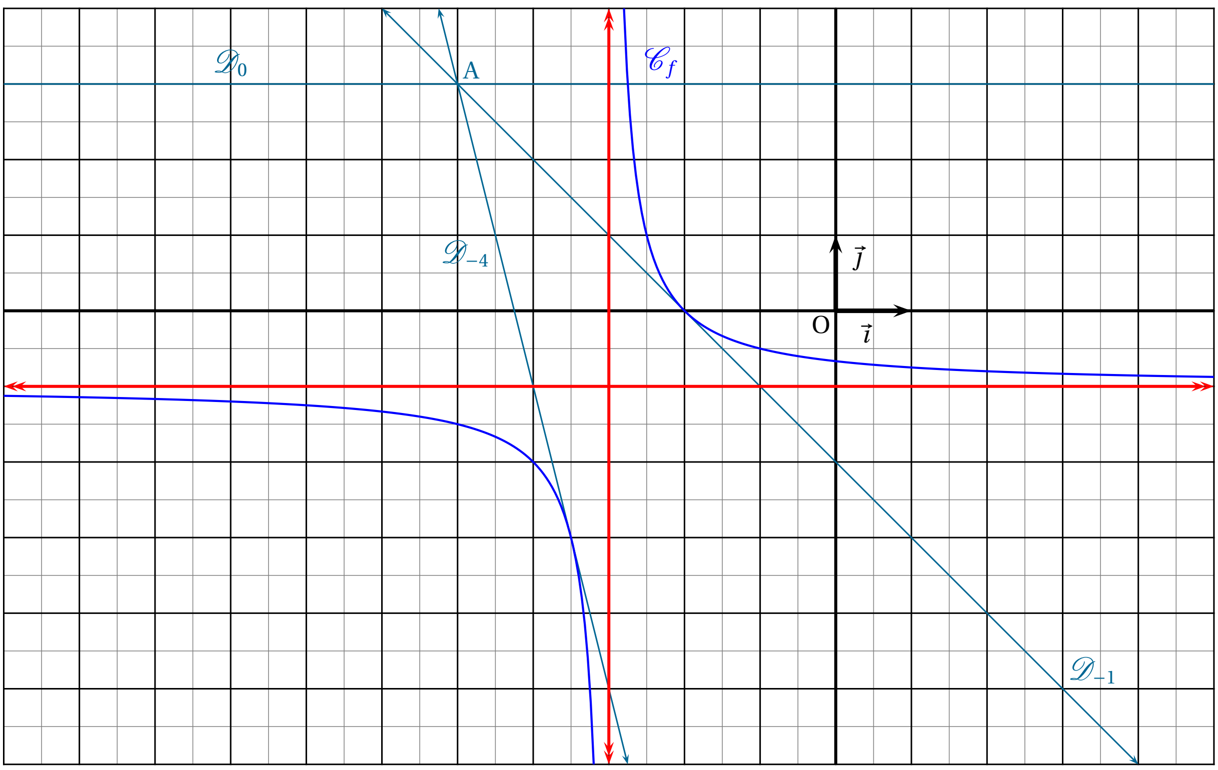


FIGURE II.17 – Représentation graphique de f.

Exercice II.6.3. ***Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\,)$ (unité graphique : 1 cm).***
On considère les fonctions $f : x \mapsto 2x+3$ et $h : x \mapsto \dfrac{1}{x+3}$ ainsi que leurs représentations graphiques respectives $\mathscr{D}$ et $\mathscr{H}$.
Déterminer algébriquement la position relative des courbes $\mathscr{D}$ et $\mathscr{H}$ puis tracer ces deux courbes.

Solution *La position relative des courbes $\mathscr{D}$ et $\mathscr{H}$ est déterminée par le signe de la fonction $f-h$ dont l'ensemble de définition est : $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$. Pour tout réel x :*

$$(f-h)(x) = 2x+3-\frac{1}{x+3} = \frac{(2x+3)(x+3)-1}{x+3} = \frac{2x^2+9x+8}{x+3}.$$

Calculons le discriminant du numérateur : $\Delta = 81-4\times 16 = 17$.
Donc le numérateur a deux racines :

$$x_1 = \frac{-9-\sqrt{17}}{4} \qquad et \qquad x_2 = \frac{-9+\sqrt{17}}{4}.$$

On en déduit le signe de $f-h$:

x		$\frac{-9-\sqrt{17}}{4}$		-3		$\frac{-9+\sqrt{17}}{4}$	
$2x^2+9x+8$	$+$	0	$-$		$+$	0	$+$
$x+3$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$(f-h)(x)$	$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$

D'où l'on tire que :

- ***$\mathscr{D}$ et $\mathscr{H}$ se coupent aux points d'abscisse $\dfrac{-9-\sqrt{17}}{4}$ et $\dfrac{-9+\sqrt{17}}{4}$.***
- ***pour $x \in \left]\dfrac{-9-\sqrt{17}}{4};-3\right[\cup \left]\dfrac{-9+\sqrt{17}}{4};+\infty\right[$, $\mathscr{D}$ est au-dessus de $\mathscr{H}$;***
- ***pour $x \in \left]-\infty;\dfrac{-9-\sqrt{17}}{4}\right[\cup \left]-3;\dfrac{-9+\sqrt{17}}{4}\right[$, $\mathscr{D}$ est au-dessous de $\mathscr{H}$.***

De plus $\mathscr{H}$ est l'image de l'hyperbole d'équation $y=\dfrac{1}{x}$ par la translation de vecteur $-3\vec{\imath}$. On déduit de cette étude la figure II.18. □

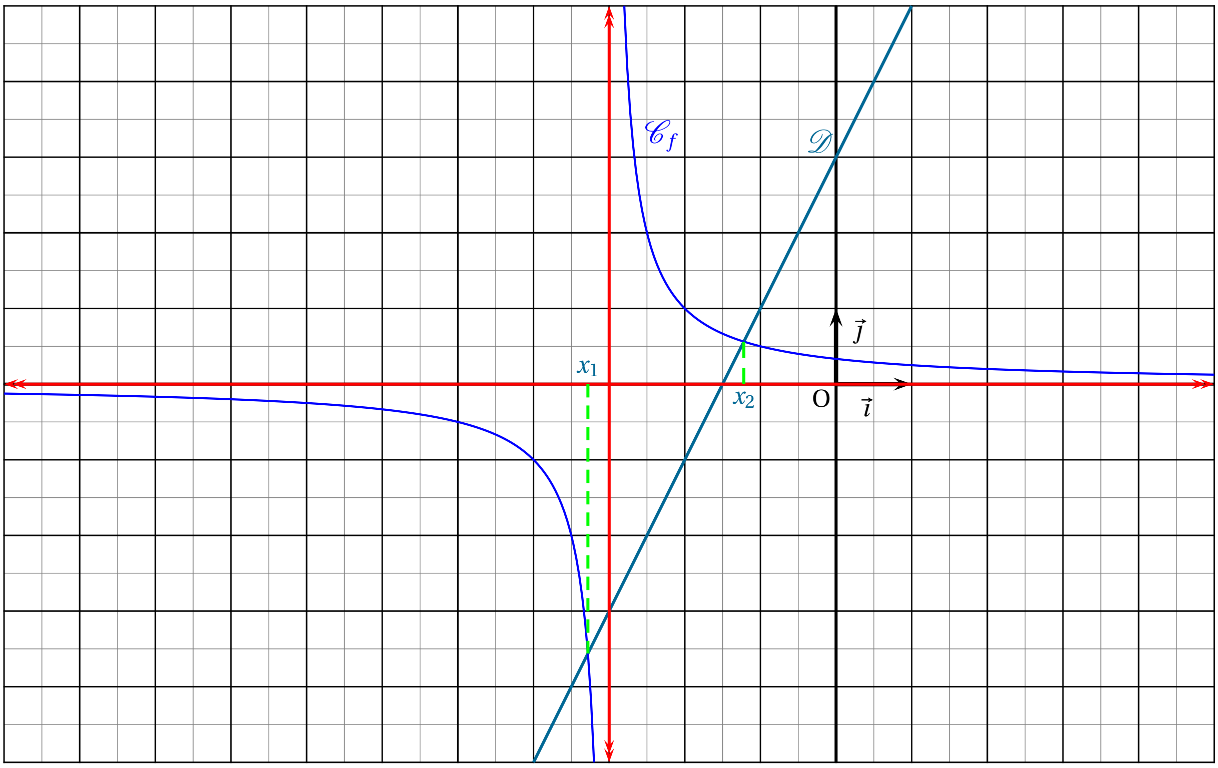


FIGURE II.18 – Représentation graphique de f.

Chapitre III

Suites numériques

III.1 Vocabulaire de l'ordre dans $\mathbb{R}$

III.1.1 Majorants, minorants ...

Considérons une partie E de $\mathbb{R}$, par exemple : $E =]-3;0] \cup \{2\}$;
On a pour tout $x \in E$: $2,5 \geqslant x$; on dit que $2,5$ est *majorant* de E. Tout nombre plus grand que $2,5$ est également un majorant de E. L'ensemble des majorants de E est l'intervalle $[2;+\infty[$.

On a pour tout $x \in E$: $-4 \leqslant x$; on dit que -4 est *minorant* de E. Tout nombre plus petit que -4 est également un minorant de E. L'ensemble des minorants de E est l'intervalle $]-\infty;-3]$.

E a un *plus grand élément*, 2, mais n'a pas de *plus petit élément*.

Un ensemble qui a des majorants (respectivement des minorants) est dit *majoré* (respectivement *minoré*). Un ensemble à la fois minoré et majoré est dit *borné*. Certaines parties de $\mathbb{R}$, comme $\mathbb{N}$, ne sont pas bornées.

Le plus petit élément (s'il existe) de l'ensemble des majorants (respectivement minorants) est appelé *borne supérieure* (respectivement *borne inférieure*). Par exemple la borne supérieure de E est 2 et sa borne inférieure est -3.

THÉORÈME III.1.1

Une partie E de $\mathbb{R}$ est bornée si et seulement si il existe un nombre réel A tel que pour tout élément x de A : $|x| \leqslant A$

Démonstration Pour tous nombres réels x et A :

$$|x| \leqslant A \iff -A \leqslant x \leqslant A.$$

Soit E une partie de $\mathbb{R}$.

S'il existe un nombre réel A tel que pour tout élément x de E : $|x| \leqslant A$; alors $-A$ est minorant de E et A est un majorant de E ; on en déduit que E est borné.

Réciproquement, si E est borné. Soit m un minorant de E et M un majorant de E. Posons : $A = \max\{-m, M\}$.

On a : $-m \leqslant A$ et $M \leqslant A$; donc : $-A \leqslant m$ et $M \leqslant A$; or pour tout élément x de E : $m \leqslant x \leqslant M$; donc par transitivité : $-A \leqslant x \leqslant A$.

Soit finalement, pour tout élément x de E : $|x| \leqslant A$. □

III.1.2 Théorème de la borne supérieure (complément)

Ce paragraphe est hors programme, il peut ne pas être lu et est destiné aux élèves désireux d'en savoir plus.
Soit maintenant une partie majorée non vide E quelconque. Les considérations envisagées ci-dessus laissent supposer que l'ensemble des majorants de E est un intervalle qui serait donc de la forme $[a;+\infty[$ ou $]a;+\infty[$ ($a \in \mathbb{R}$). Mais si a n'était pas un majorant de E, alors il existerait un élément x de E tel que : $a < x$.
On se trouverait alors dans la situation contradictoire suivante :
$\frac{a+x}{2}$ est un majorant de E (car $\frac{a+x}{2} \in]a;+\infty[$) et $\frac{a+x}{2}$ n'est pas un majorant de E (car $\frac{a+x}{2} < x$).
On en déduit que a est le plus petit des majorants de E et donc la borne supérieure de E.

Cette étude nous conduit à énoncer le théorème suivant que nous admettons.

THÉORÈME III.1.2 THÉORÈME DE LA BORNE SUPÉRIEURE

Toute partie majorée (respectivement minorée) non vide de $\mathbb{R}$ a une borne supérieure (respectivement inférieure).

Remarque *Ce théorème est faux dans* $\mathbb{Q}$.

Exemple *Dans* $\mathbb{Q}$ *l'ensemble*

$$E = \left\{x \in \mathbb{Q} \middle| x^2 < 2\right\}$$

est majoré par $\frac{3}{2}$ *mais n'a pas de borne supérieure ; alors que dans* $\mathbb{R}$ *il a une borne supérieure :* $\sqrt{2}$.

III.2 Définitions

III.2.1 Introduction

DÉFINITION III.2.1 SUITE NUMÉRIQUE

Une *suite numérique* est une fonction d'une partie de $\mathbb{N}$ dans un ensemble de nombres (généralement $\mathbb{R}$).

Exemples

1. *On peut considérer la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :* $u_n = n^2$.
On a alors : $u_0 = 0$; $u_1 = 1$; $u_2 = 4$; $u_3 = 9$; $u_4 = 16 \ldots$
Pour chaque terme u_n *on a :* $u_n = f(n)$; *où* f *est la fonction* $x \mapsto x^2$.
On dit que la suite (u_n) ***est définie explicitement****.*
On peut calculer directement des termes de « grands indices » ($u_{100} = 10000$).

2. *On peut considérer la suite* $(v_n)_{n\geqslant 2}$ *définie par :* $\begin{cases} v_2 = \dfrac{1}{2} \\ v_{n+1} = v_n^2 \end{cases}$.

On a alors : $v_2 = \dfrac{1}{2}$; $v_3 = \dfrac{1}{4}$; $v_4 = \dfrac{1}{16} \cdots$
v_0 *et* v_1 *ne sont pas définis.*
Pour chaque terme on a : $v_{n+1} = f(v_n)$; *où* f *est la fonction* $x \mapsto x^2$.
On dit que la suite (v_n) ***est définie par récurrence****.*
Pour calculer un terme il faut connaître les termes précédents.
La suite (v_n) *peut cependant être définie explicitement, pour tout entier naturel* $n \geqslant 2$: $v_n = \dfrac{1}{2^{(2^{n-2})}}$.

3. *On peut également considérer la suite* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :* $\begin{cases} w_0 = w_1 = 1 \\ w_{n+1} = w_{n+1} + w_n - n \end{cases}$.

Déterminer les cinq premiers termes de cette suite.

Remarque *Toutes les suites étudiées en classe de Première et de Terminale seront définies sur* $\mathbb{N}$ *ou à partir d'un certain indice.*

III.2.2 Composée d'une suite par une fonction

DÉFINITION III.2.2

Soit f une fonction et (v_n) une suite d'éléments de l'ensemble de définition de f.
La composée de (v_n) par f est la suite (u_n) de terme général : $u_n = f(v_n)$.

Exemple *Si* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* f *sont définies par :* $v_n = n^2$ *et* $f(x) = 2x - 3$; *alors* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est définie par :* $u_n = 2n^2 - 3$.

III.2.3 Exercices

III.2.a. Calculer les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n = 4n^2 - n + 1$.

III.2.b. Calculer les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$; $u_n = u_{n-1}^2 + 1$.

III.2.c. Calculer les cinq premiers termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, composée de la suite (u_n) de l'exercice précédent par la fonction $f : x \mapsto x^2 - 1$.

III.3 Représentation graphique d'une suite

III.3.1 Représentation graphique d'une suite définie explicitement

Pour représenter graphiquement une suite définie explicitement (par une relation du type $u_n = f(n)$), il suffit de représenter graphiquement la fonction f sur la partie positive de son ensemble de définition.

Exemple *Pour représenter graphiquement la suite* $(u_n)_{n\geqslant 1}$ *définie par :* $u_n = 2 - \dfrac{2}{n}$ *; il suffit de tracer la représentation graphique de la fonction* $f : x \mapsto 2 - \dfrac{2}{x}$ *; pour chaque indice n,* u_n *est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse n.*

Les termes de la suite apparaissent alors sur l'axe des ordonnées (voir figure III.1).

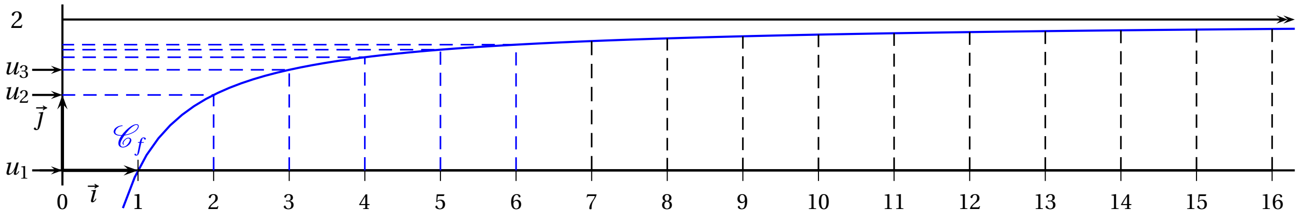


FIGURE III.1 – Représentation graphique d'une suite définie explicitement.

III.3.2 Représentation graphique d'une suite définie par récurrence

Pour représenter graphiquement une suite définie par récurrence (par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$), on représente graphiquement la fonction f sur un intervalle contenant tous les termes de la suite et on trace la première bissectrice [1]. On place le premier terme puis les autres de proche en proche par la méthode suivante.

Méthode pour placer u_{n+1} sur l'axe des abscisses lorsque u_n est placé

- On place sur la courbe le point A_n d'abscisse u_n. Ce point a donc pour ordonnées $f(u_n)$, c'est-à-dire u_{n+1}.
- On place sur la première bissectrice le point B_n de même ordonnée que A_n. B_n est le point d'intersection des droites d'équations $y = x$ et $y = u_{n+1}$, B_n a donc pour abscisse u_{n+1}.
- Il ne reste plus qu'à placer u_{n+1} sur l'axe des abscisses.

Exemple *Pour représenter graphiquement la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :* $\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{2}{u_n} \end{cases}$ *;*

on trace sur $[0\,;+\infty]$ *la représentation graphique de la fonction* $f : x \mapsto \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x}$ *et la droite* Δ *d'équation :* $y = x$*.*

Les termes de la suite apparaissent alors sur l'axe des abscisses (voir figure III.2).

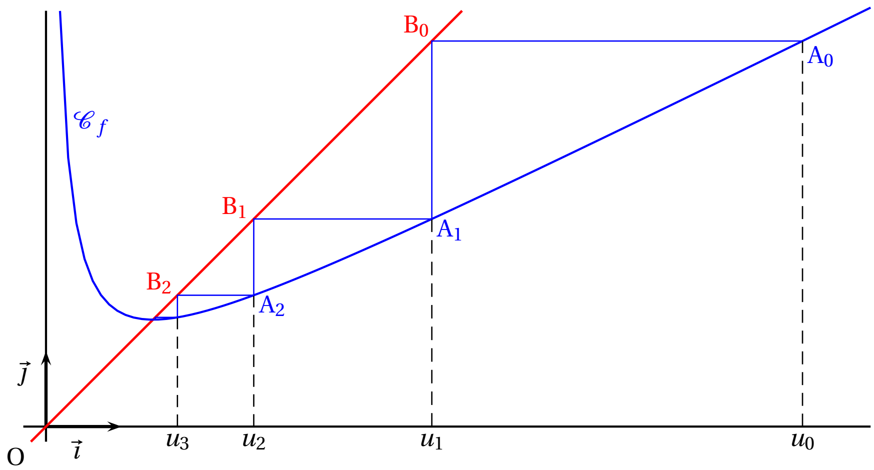


FIGURE III.2 – Représentation graphique d'une suite définie par récurrence.

III.3.3 Exercices

III.3.a. f désigne la fonction $x \mapsto x^2$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie par : $u_n = f(n)$.
Représenter graphiquement la suite (u_n) et déterminer sa limite.

III.3.b. f désigne la fonction $x \mapsto x^2$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie par : $u_0 = 0,5$ et pour tout entier naturel non nul, n, $u_n = f(u_{n-1})$.
Représenter graphiquement la suite (u_n) (unité graphique : 20 cm) et conjecturer sa limite.

III.3.c. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$

1. la première bissectrice est la droite d'équation $y = x$

(unité graphique : 2cm). f est la fonction : $x \mapsto 3 - \frac{2}{x}$. $\mathscr{C}_f$ est la représentation graphique de f. (u_n) est la suite vérifiant, $u_0 = 5$, et pour tout entier naturel non nul, n : $u_n = f(u_{n-1})$.

1. Déterminer les éventuelles asymptotes de $\mathscr{C}_f$.

2. Déterminer les points fixes[2] de f.

3. Représenter graphiquement les cinq premiers termes de la suite (u_n) puis conjecturer sa limite éventuelle.

III.4 Suites bornées

III.4.1 Généralités

DÉFINITIONS III.4.1 SUITE BORNÉE

(1) Dire qu'une suite est *majorée* (respectivement *minorée*) signifie que l'ensemble des termes de cette suite est majoré (respectivement minoré).
(2) Une suite à la fois majorée et minoré est dite *bornée*.

Exemple *Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n = 2\sin n + 1$.*
Soit n un entier naturel. La fonction $f : x \mapsto 2x+1$ est croissante sur $\mathbb{R}$ (fonction affine de coefficient dominant positif) et on sait que : $-1 \leqslant \sin n \leqslant 1$; donc : $f(-1) \leqslant f(\sin n) \leqslant f(1)$; c'est-à-dire : $-1 \leqslant u_n \leqslant 3$. La suite (u_n) est donc majorée par 3 et minorée par -1

Notations et vocabulaire
1. *Lorsqu'une suite (u_n) est majorée, par abus de langage nous appellerons borne supérieure de (u_n) la borne supérieure de l'ensemble de ces termes.*
2. *On défini de même la borne inférieure d'une suite minorée.*

Exercice III.4.1. ***On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :***

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i}.$$

1. Calculer les trois premiers termes de cette suite.
2. Démontrer que la suite (u_n) est minorée par $\frac{1}{2}$ et majorée par 1.

Solution ***1.*** *On a :*

$$u_1 = \sum_{i=1}^{1} \frac{1}{1+i} = \frac{1}{2} \qquad u_2 = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{1+i} = \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2+2} = \frac{7}{12} \qquad u_3 = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{3+i} = \frac{1}{3+1} + \frac{1}{3+2} + \frac{1}{3+3} = \frac{37}{60}$$

2. *Soit n un entier naturel non nul. u_n est une somme de n termes, elle donc minorée par n fois le plus petit et majorée par n fois le plus grand. Donc :*

$$n \times \frac{1}{n+n} \leqslant u_n \leqslant n \times \frac{1}{n+1}.$$

Or : $n \times \frac{1}{n+n} = \frac{1}{2}$ et $n \times \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$; donc : $n \times \frac{1}{n+1} \leqslant 1$ (car $\frac{n}{n+1}$ est un quotient de deux nombres réels strictement positifs et numérateur est inférieur au dénominateur). Donc :

$$\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1.$$

$$\boxed{\textbf{\textit{La suite } } (u_n) \textbf{\textit{ est minorée par }} \frac{1}{2} \textbf{\textit{ et majorée par 1.}}}$$

□

III.4.2 Exercices

III.4.a. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$, de terme général $u_n = \frac{1}{2+\sin n}$, est bornée et préciser un majorant et un minorant.

III.4.b. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$, de terme général $u_n = \left(\frac{1}{2} + \sin n\right)^2$, est bornée et préciser un majorant et un minorant.

2. Les points fixes de f sont les solutions de l'équation : $f(x) = x$.

III.4.c. Démontrer que la suite $(u_n)_{n>0}$, de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n+k}$, est bornée et préciser un majorant et un minorant.

III.5 Suites monotones

III.5.1 Définitions

DÉFINITIONS III.5.1 **SUITE MONOTONE**

(1) Dire qu'une suite est croissante (respectivement décroissante) signifie que cette suite est une fonction croissante (respectivement décroissante).
(2) Les suites croissantes et les suites décroissantes sont dites monotones.

Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite. Dire que (u_n) est croissante signifie que pour tous entiers p et q supérieurs ou égaux à n_0 :

$$p \leqslant q \quad \Longrightarrow \quad u_p \leqslant u_q.$$

Remarques
1. *On définit de même les suites* strictement *monotones.*
2. *Toute suite croissante est minorée par son premier terme*
3. *Toute suite décroissante est majorée par son premier terme*

DÉFINITIONS III.5.2

Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite.
(1) La suite (u_n) est dite constante lorsque pour tout nombre entier, n, supérieur ou égal à n_0 : $u_n = u_{n_0}$.
(2) La suite (u_n) est dite stationnaire lorsqu'il existe un nombre entier, p, tel que pour tout nombre entier, n, supérieur ou égal à p : $u_n = u_p$.

Remarques
1. *Les suites constantes sont les suites à la fois croissantes et décroissantes.*
2. *Les suites stationnaires sont les suites constantes à partir d'un certain indice.*
3. *Les suites constantes sont des cas particuliers de suites stationnaires.*

III.5.2 Méthodes d'étude du sens de variation d'une suite

III.5.2.a Cas général

THÉORÈME III.5.1
Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite numérique.
(1) Si pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a : $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$; alors la suite (u_n) est croissante.
(2) Si pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a : $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$; alors la suite (u_n) est décroissante.

Démonstration Démontrons **(1)**. Soit p et q deux entiers tels que : $n_o \leqslant p \leqslant q$. On a :

$$u_p \leqslant u_{p+1} \leqslant \cdots \leqslant u_{q-1} \leqslant u_q$$

donc la suite (u_n) est croissante. On démontre de même **(2)**. □

Exercice III.5.1. ***Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par : $u_n = \frac{1}{n}$.***

Solution *Soit n un entier naturel non nul. On a :*

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n-(n+1)}{n(n+1)} = -\frac{1}{n(n+1)}$$

or n et $n+1$ sont tous deux strictement positifs donc pour tout entier naturel non nul n on a : $-\frac{1}{n(n+1)} < 0$; c'est-à-dire : $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.
La suite (u_n) est donc décroissante. □

III.5.2.b Lorsque tous les termes de la suite sont strictement positifs

THÉORÈME III.5.2
Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite dont tous les termes sont *strictement positifs*.
(1) Si pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$; alors la suite (u_n) est croissante.
(2) Si pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$; alors la suite (u_n) est décroissante.

Démonstration Ce théorème se déduit du précédent car les termes de la suite étant strictement positifs, on a :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1 \implies u_{n+1} \geqslant u_n \qquad \text{et} \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1 \implies u_{n+1} \leqslant u_n. \square$$

Exercice III.5.2. ***Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par : $u_n = \dfrac{1}{n}$.***

Solution *Tous les termes de cette suite sont strictement positifs. Soit n un entier naturel non nul.*
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$
Donc : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$. La suite (u_n) est décroissante. $\square$

III.5.2.c Lorsque la suite est définie explicitement, $u_n = f(n)$

THÉORÈME III.5.3
Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite définie par une relation du type : $u_n = f(n)$.
(1) Si la fonction f est croissante sur $[n_0\,;+\infty[$; alors la suite (u_n) est croissante.
(2) Si la fonction f est décroissante sur $[n_0\,;+\infty[$; alors la suite (u_n) est décroissante.

Démonstration Ce théorème est une conséquence immédiate de la DÉFINITION III.5.1$\square$

Exercice III.5.3. ***Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par : $u_n = \dfrac{1}{n}$.***

Solution *On sait que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $[1\,;+\infty[$ donc la suite (u_n) est décroissante.* $\square$

Remarque *La réciproque de ce théorème est fausse, la suite (u_n) peut être croissante sans que la fonction f le soit. Pour s'en convaincre il suffit de considérer, par exemple, la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2\pi}\sin(2\pi x)$.*
La fonction f n'est pas monotone car sa dérivée, la fonction $f' : x \mapsto \dfrac{1}{2} + \cos(2\pi x)$, est strictement positive sur les intervalles $\left]k - \dfrac{5}{12}\,;k + \dfrac{5}{12}\right[$ $(k \in \mathbb{Z})$ et strictement négative sur les intervalles $\left]k + \dfrac{5}{12}\,;k + \dfrac{7}{12}\right[$ $(k \in \mathbb{Z})$; et pourtant la suite (u_n), définie par $u_n = f(n) = \dfrac{n}{2}$, est strictement croissante (voir figure III.3).

III.5.2.d Composée d'une suite monotone par une fonction monotone

Le théorème suivant est un cas particulier du théorème **??**.

THÉORÈME III.5.4

Si u_n est une suite monotone d'éléments d'un intervalle I et si f est une fonction monotone sur I, alors $f(u_n)$ est une suite monotone ; plus précisément, le sens de variation de $f(u_n)$ est donné dans le tableau ci-dessous.

	f est croissante sur I	f est décroissante sur I
(u_n) est croissante	$(f(u_n))$ est croissante	$(f(u_n))$ est décroissante
(u_n) est décroissante	$(f(u_n))$ est décroissante	$(f(u_n))$ est croissante

Exemple *Considérons la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ de terme général : $v_n = \dfrac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$.*

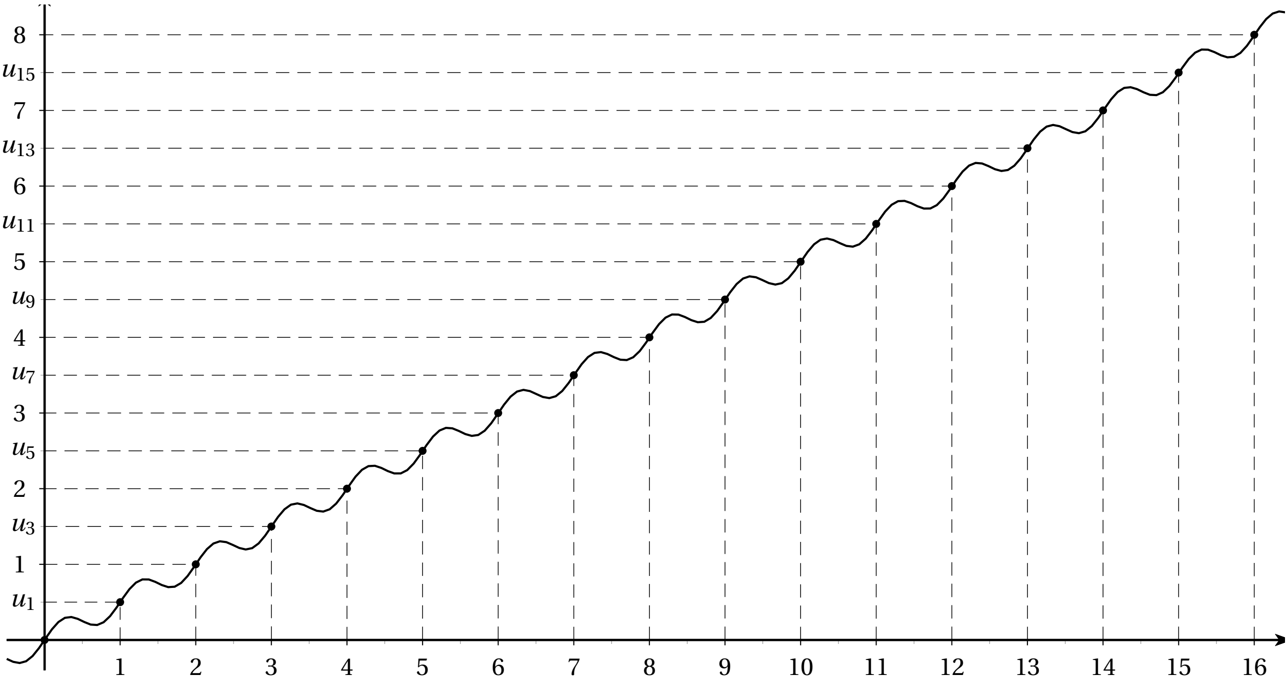


FIGURE III.3 – Suite croissante définie explicitement, sans que le fonction soit croissante.

(v_n) est la composée de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ de terme général, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ par la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$. (u_n) est strictement positive (comme somme de nombres strictement positifs) et croissante ($\forall n \in \mathbb{N}^\star, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n}$ avec $\frac{1}{n} > 0$) de plus la fonction f est décroissante sur $]0; +\infty[$; donc la suite (v_n) est décroissante.

III.5.3 Exercices

III.5.a. Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n>0}$ définie par : $u_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i}$.

III.5.b. Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n>0}$ définie par : $u_n = \frac{2^n}{n!}$.

III.5.c. Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $u_n = n^2 + 4n - 7$.

III.5.d. Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $u_n = \frac{n^2+3}{n+4}$.

III.5.e. Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n>0}$ définie par : $u_n = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$.

III.6 Suites arithmétiques - suites géométriques

III.6.1 Suites arithmétiques

III.6.1.a Définition

DÉFINITION III.6.1

Une suite *arithmétique* de *raison* r est une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ telle que pour tout entier $n \geqslant n_o$: $u_{n+1} = u_n + r$.

Remarque *Une suite arithmétique est entièrement déterminée par sa raison et son premier terme.*

Exemple *Pour la suite arithmétique de raison -2 et de premier terme $u_3 = 5$, on a : $u_4 = 3$; $u_5 = 1$; $u_6 = -1$ ...*

La figure III.4 suggère que pour une suite arithmétique de raison r : $u_{p+4} = u_p + 4r$.
En posant : $n = p + 4$; il vient : $4 = n - p$ et $u_n = u_p + (n-p)r$.
Plus généralement, on a le théorème suivant.

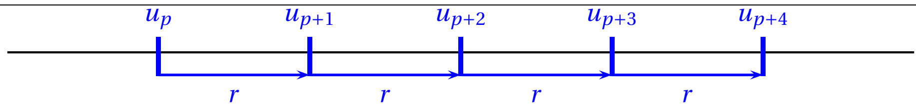


FIGURE III.4 – Suite arithmétique.

THÉORÈME III.6.1

Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite arithmétique de raison r.
Pour tous nombres entiers n et p supérieurs ou égaux à n_0 on a :

$$u_n = u_p + (n-p)r.$$

Démonstration Procédons par disjonction des cas.

1^er cas $n = p$ On a : $u_p + (n-p)r = u_n + 0 \times r = u_n$; donc le théorème est vérifié.

2^e cas $n > p$ On a : $u_{p+1} = u_p + r$; $u_{p+2} = u_{p+1} + r$; $u_{p+3} = u_{p+2} + r$;...
plus généralement, à chaque étape on passe d'un terme au suivant en ajoutant r. On passe de u_p à u_n en $n-p$ étapes, c'est-à-dire en ajoutant $n-p$ fois r, d'où : $u_n = u_p + (n-p)r$.

3^e cas $n < p$ On a : $p > n$; donc, d'après le cas précédent (en permutant n et p), il vient : $u_p = u_n + (p-n)r$; d'où : $u_n = u_p + (n-p)r$.

Dans les trois cas la formule est vérifiée. □

Exemple *Si* (u_n) *est une suite arithmétique de raison* -5 *et si* $u_{13} = 52$ *alors :* $u_{121} = u_{13} - 5(121-13) = -488$.

Lorsque $p = n_0$, on en déduit le corollaire suivant.

COROLLAIRE III.6.2

Si (u_n) est la suite arithmétique de raison r et de premier terme u_{n_0}, alors pour tout nombre entier n (avec $n \geqslant n_0$), on a :

$$u_n = r(n-n_0) + u_{n_0}.$$

Exemple *La suite arithmétique* (u_n) *de raison* 3 *et de premier terme* $u_2 = -1$ *est définie par :* $u_n = 3(n-2) - 1 = 3n - 7$.

Remarques

1. *L'expression obtenue dans le corollaire III.6.2 fournit une définition explicite d'une suite arithmétique.*

2. *le terme général d'une suite arithmétique est une fonction affine de l'indice dont le coefficient de degré* 1 *est la raison.*

III.6.1.b Propriétés

Le théorème suivant est une conséquence immédiate de la définition III.6.1.

THÉORÈME III.6.3

(1) Une suite arithmétique est croissante si, et seulement si, sa raison est positive.
(2) Une suite arithmétique est décroissante si, et seulement si, sa raison est négative.

DÉFINITION III.6.2

La moyenne arithmétique de deux nombres réels a et b est le nombre : $\dfrac{a+b}{2}$.

THÉORÈME III.6.4

Si a, b, c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique, alors b est la moyenne arithmétique de a et c.

Démonstration Soit (u_n) la suite arithmétique, r sa raison et k l'indice de b.

On a : $\begin{cases} a = u_{k-1} \\ b = u_k = u_{k-1} + r = a + r \\ c = u_{k+1} = u_k + r = b + r \end{cases}$; donc : $\dfrac{a+c}{2} = \dfrac{b-r+b+r}{2} = b$. □

III.6.1.c Somme de termes consécutifs

Soit $(u_n)_{n \geqslant n_o}$ une suite arithmétique et m et p deux entiers tels que : $n_0 \leqslant m \leqslant p$.

On se propose de calculer la somme : $\mathrm{S} = \underbrace{u_m + u_{m+1} + \cdots + u_p}_{p-m+1 \text{ termes}} = \sum_{n=m}^{p} u_n$.

On a donc : $\begin{cases} \mathrm{S} = & u_m & + & (u_m + r) & + & \cdots & + & (u_m + (p-m)r) \\ \mathrm{S} = & (u_m + (p-m)r) & + & (u_m + (p-m-1)r) & + & \cdots & + & u_m \end{cases}$

puis par somme : $2S = (u_m + u_m + (p-m)r) + (u_m + u_m + (p-m)r) + \cdots + (u_m + u_m + (p-m)r)$; d'où finalement :

$$u_m + u_{m+1} + \cdots + u_p = (p-m+1)\frac{u_m + u_p}{2}.$$

THÉORÈME III.6.5

Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite arithmétique et m et p des nombres entiers naturels tels que : $n_0 \leqslant m \leqslant p$. On a :

$$\sum_{k=m}^{p} u_k = (p-m+1)\frac{u_m + u_p}{2}.$$

On peut retenir cette formule en remarquant qu'une somme de termes consécutifs d'une suite **arithmétique** s'obtient en effectuant le produit du nombre de termes par la moyenne des termes extrêmes.

Exercice III.6.1. ***Calculer la somme des n premiers nombres entiers naturels non nuls.***

Solution *Les n premiers nombres entiers naturels non nuls sont les n premiers de la suite arithmétique de raison 1 et de premier terme, $u_1 = 1$, donc :*

$$\sum_{k=1}^{n} k = n\frac{u_1 + u_n}{2} = n\frac{1+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

□

Exercice III.6.2. ***Calculer la somme des n premiers nombres entiers naturels impairs.***

Solution *Les n premiers nombres entiers naturels impairs sont les nombres de la forme $2k-1$, pour k variant de 1 à n ; ce sont donc les n premiers termes de la suite arithmétique de raison 2 et de premier terme : $u_1 = 1$. On a : $u_n = 2n-1$.* □

III.6.2 Suites géométriques

III.6.2.a Définition

DÉFINITION III.6.3

Une suite *géométrique* de *raison* q est une suite $(u_n)_{n \geqslant n_o}$ telle que pour tout entier $n \geqslant n_o$: $u_{n+1} = qu_n$.

Exemples *Considérons les suites géométriques (u_n), (v_n) et (w_n), définies sur $\mathbb{N}$, de raisons respectives 2, -3, $\frac{1}{2}$ et de premiers termes respectifs 3, 2, -4. Les cinq premiers termes de chaque suite sont représentés dans la tableau III.1.*

n	0	1	2	3	4
u_n	3	6	12	24	48
v_n	2	-6	18	-54	162
w_n	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$

TABLE III.1 – Cinq premiers termes de suites géométriques (u_n), (v_n) et (w_n).

Remarques

1. *Lorsque $q = 0$, la suite est nulle à partir du deuxième terme, elle est donc stationnaire.*
2. *Lorsque $q = 1$, la suite est constante.*
3. *Une suite géométrique est entièrement déterminée par sa raison et son premier terme.*
4. *Lorsque la raison est strictement négative et le premier terme non nul, la suite est de signe alterné, elle est donc non monotone (ni croissante ni décroissante).*
5. *Lorsque la raison est strictement positive, la suite géométrique est du signe de son premier terme.*

THÉORÈME III.6.6

Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite géométrique de raison q.
Pour tous nombres entiers n et p supérieurs ou égaux à n_0 on a :

$$u_n = u_p q^{n-p}.$$

Démonstration Procédons par disjonction des cas.

1er cas $n = p$ On a : $u_p q^{n-p} = u_p q^0 = u_p = u_n$; donc le théorème est vérifié.

2e cas $n > p$ On a : $u_{p+1} = u_p q$; $u_{p+2} = u_{p+1} q$; $u_{p+3} = u_{p+2} q$;...
plus généralement, à chaque étape on passe d'un terme au suivant en multipliant par q. On passe de u_p à u_n en $n-p$ étapes, c'est-à-dire en multipliant $n-p$ fois par q, d'où : $u_n = u_p q^{n-p}$.

3e cas $n < p$ On a : $p > n$; donc, d'après le cas précédent (en permutant n et p), il vient : $u_p = u_n q^{p-n}$; d'où : $u_n = u_p q^{n-p}$.

Dans les trois cas la formule est vérifiée. □

Exemple *Si (u_n) est une suite géométrique de raison 3 et si $u_4 = -\frac{1}{27}$, alors : $u_{12} = -\frac{1}{27} \times 3^8 = -243$.*

Lorsque $p = n_0$, on déduit du théorème III.6.6 le corollaire suivant.

Corollaire III.6.7

Si (u_n) est la suite géométrique de raison q et de premier terme u_{n_0}, alors pour tout nombre entier n (avec $n \geqslant n_0$), on a :

$$u_n = u_{n_0} q^{n-n_0}.$$

Remarques

1. *L'expression obtenue dans le corollaire III.6.7 fournit une définition explicite d'une suite géométrique.*

2. *Lorsque $q \neq 0$, une suite géométrique admet une définition explicite de la forme : $u_n = k\,q^n$ avec $k = u_{n_0} q^{-n_0}$.*

Exemples

1. *La suite géométrique, (u_n), de raison 3 et de premier terme $u_2 = -1$ est définie par : $u_n = -\frac{1}{9} \times 3^n$.*

2. *La suite géométrique, (v_n), de raison $-\frac{1}{2}$ et de premier terme $u_3 = 128$ est définie par : $u_n = -\frac{1024}{(-2)^n}$.*

III.6.2.b Propriétés

Le théorème suivant est une conséquence immédiate de la définition III.6.3.

Théorème III.6.8

Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite géométrique de raison q.
Le sens de variation de (u_n) est donné dans le tableau ci-dessous.

(u_n)	$q \in]1\,;+\infty[$	$q \in]0\,;1[$	$q \in]-\infty\,;0[$	$q = 0$	$q = 1$
$u_{n_0} > 0$	croissante	décroissante	non monotone	stationnaire	constante
$u_{n_0} < 0$	décroissante	croissante	non monotone	stationnaire	constante
$u_{n_0} = 0$	constante				

Définition III.6.4

La moyenne géométrique de deux nombres réels strictement positifs a et b est le nombre : $\sqrt{ab}$.

Théorème III.6.9

Si a, b, c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique à termes strictement positifs, alors b est la moyenne géométrique de a et c.

Démonstration Soit (u_n) la suite géométrique, q sa raison et k l'indice de b.

La suite est à termes strictement positifs donc : $q \neq 0$. On a : $\begin{cases} a = u_{k-1} \\ b = u_k = qu_{k-1} = qa \\ c = u_{k+1} = qu_k = qb \end{cases}$; donc : $\sqrt{ac} = \sqrt{\frac{b}{q} \times qb} = |b| = b$. □

Représentation graphique d'une suite géométrique

Pour représenter graphiquement une suite géométrique de raison q, on peut tracer les droites d'équations $y = x$ et $y = qx$ puis utiliser la méthode proposée §III.3.2 page 33.

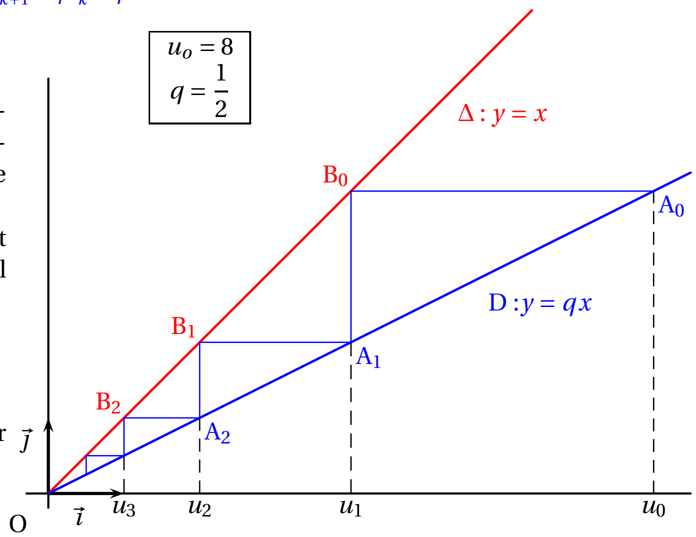
Désignons par h l'homothétie de centre O et de rapport q. Sur la figure ci-contre, on a pour tout entier naturel n :

$\overrightarrow{OB_{n+1}} = u_{n+2}\vec{\imath} + u_{n+2}\vec{\jmath} = q(u_{n+1}\vec{\imath} + u_{n+1}\vec{\jmath})$

c'est-à-dire : $\overrightarrow{OB_{n+1}} = q\,\overrightarrow{OB_n}$.

Donc B_{n+1} est l'image de B_n par h.

On démontre de même que A_{n+1} est l'image de A_n par h.



III.6.2.c Somme de termes consécutifs

Soit $(u_n)_{n \geqslant n_o}$ une suite géométrique de raison q (avec $q \neq 1$) et m et p deux entiers tels que : $n_0 \leqslant m \leqslant p$.

On se propose de calculer la somme : $\mathrm{S} = \underbrace{u_m + u_{m+1} + \cdots + u_p}_{p-m+1 \text{ termes}} = \sum\limits_{n=m}^{p} u_n$.

On a donc : $\left\{ \begin{array}{lllllll} \mathrm{S} = & u_m & +qu_m & +q^2 u_m & +\cdots & +u_m q^{p-m} & \\ q\mathrm{S} = & & qu_m & +q^2 u_m & +\cdots & +u_m q^{p-m} & +u_m q^{p-m+1} \end{array} \right.$

puis par différence : $q\mathrm{S} - \mathrm{S} = u_m q^{p-m+1} - u_m$; d'où finalement :

$$u_m + u_{m+1} + \cdots + u_p = \frac{u_m - u_{p+1}}{1-q}$$

On peut retenir cette formule en remarquant qu'une somme de termes consécutifs d'une suite **géométrique** s'obtient en effectuant le quotient : $\dfrac{\text{premier terme} - \text{suivant du dernier}}{1 - \text{raison}}$.

Remarque *En particulier on a, pour tout entier naturel non nul n :* $1 + q + \cdots + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Exercice III.6.3. ***Démontrer que pour tout $x \in [0;1[$ et tout $n \in \mathbb{N}^\star$; on a :*** $1 + x + \cdots + x^n \leqslant \dfrac{1}{1-x}$

Solution *$1 + x + \cdots + x^n$ est la somme des $n+1$ premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison x, donc :*

$$1 + x + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

Or $1-x$ est strictement positif et : $1 - x^{n+1} \leqslant 1$ (car x est positif) ; donc par quotient :

$$\frac{1-x^{n+1}}{1-x} \leqslant \frac{1}{1-x};$$

c'est-à-dire :

$$1 + x + \cdots + x^n \leqslant \frac{1}{1-x}.$$

□

COROLLAIRE III.6.10

Pour tous nombres réels a, b et pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$$

Démonstration Pour $a = 0$, l'égalité devient : $-b^n = -b \times b^{n-1}$; qui est vraie.

Pour $a = b$, l'égalité devient : $0 = 0 \times na^{n-1}$; qui est vraie.

Lorsque $a \neq 0$ et $a \neq b$, le second facteur du second membre de l'égalité est la somme des termes consécutifs d'un suite géométrique de raison $\frac{b}{a}$, on en déduit que :

$a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1} = \dfrac{a^{n-1} - \frac{b^n}{a}}{1 - \frac{b}{a}} = \dfrac{a^n - b^n}{b-a}$.

En multipliant les membres extrêmes par $b-a$, on en déduit l'identité désirée. □

Remarques

1. *Lorsque $n = 2$, on retrouve l'identité II.3 et lorsque $n = 3$, on retrouve l'identité II.6.*

2. *Lorsque n est impaire, en remplaçant b par $-b$, on obtient :*

$$a^n + b^n = (a+b)\left(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots + ab^{n-2} - b^{n-1}\right)$$

Lorsque $n = 3$, on retrouve l'identité II.7.

III.6.3 Exercices résolus

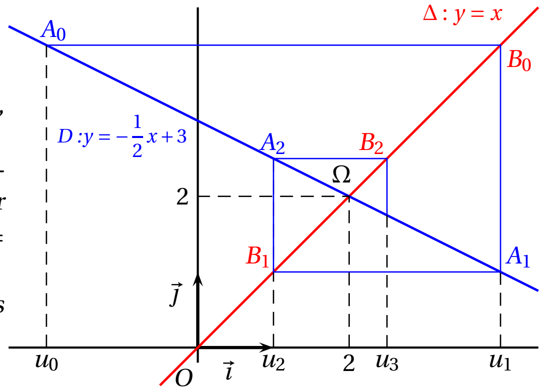
III.6.3.a Suite arithmético-géométrique

Exercice III.6.4. ***On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :*** $\left\{ \begin{array}{l} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 3 \end{array} \right.$.

1. Déterminer un réel a tel que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $v_n = u_n - a$; soit géométrique.

2. Exprimer explicitement le terme général de la suite (v_n) ; en déduire celui de la suite (u_n).

Solution *Pour se faire une idée, entreprenons une étude graphique.*



On trace les droites D et Δ d'équations respectives :
$y = -\dfrac{1}{2}x + 3$ *et* $y = x$.
Les coordonnées du point $\Omega(2;2)$ vérifient les équations de D et Δ, donc Ω est le point d'intersection de ces deux droites sécantes.
Il semble sur le graphique (on pourrait aisément le démontrer géométriquement) qu'une homothétie h, de centre Ω, transforme (pour tout n) A_n en A_{n+1}. Ce qui suggère une relation du type : $\overrightarrow{\Omega A}_{n+1} = k\overrightarrow{\Omega A}_n$.
Or les vecteurs $\overrightarrow{\Omega A}_{n+1}$ et $\overrightarrow{\Omega A}_n$ ont respectivement pour abscisses $u_{n+1} - 2$ et $u_n - 2$.

On aurait donc : $u_{n+1} - 2 = k(u_n - 2)$.
Ces observations graphiques nous conduisent à examiner si pour $a = 2$, la suite (v_n) est géométrique.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = -\dfrac{1}{2}u_n + 3 - 2 = -\dfrac{1}{2}u_n + 1 = -\dfrac{1}{2}(u_n - 2) = -\dfrac{1}{2}v_n$.
Donc, pour $a = 2$, la suite (v_n) est la suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -4$.
Par conséquent la suite (v_n) est définie par : $v_n = -4\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = v_n + 2$;
donc la suite (u_n) est définie par : $u_n = -4\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n + 2$. □

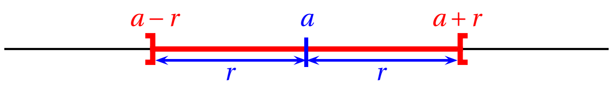
Pour deviner le comportement d'une suite, une étude graphique (lorsqu'elle est envisageable) est souvent fructueuse.

Pour démontrer qu'une suite (v_n) est géométrique, on peut exprimer v_{n+1} en fonction de v_n de façon à exhiber une relation du type : $v_{n+1} = qv_n$.

III.7 Limites de suites

Soit a un réel et r un réel strictement positif. On appelle intervalle ouvert de centre a et de rayon r l'intervalle ouvert $]a-r, a+r[$. Cet intervalle sera noté $\mathrm{I}_{a,r}$. $\mathrm{I}_{a,r}$ est l'ensemble des réels dont la distance à a est strictement inférieure à r. Pour tout réel x on a donc :

$$x \in \mathrm{I}_{a,r} \iff |x - a| < r.$$



III.7.1 Limite finie, limite infinie

III.7.1.a Définitions

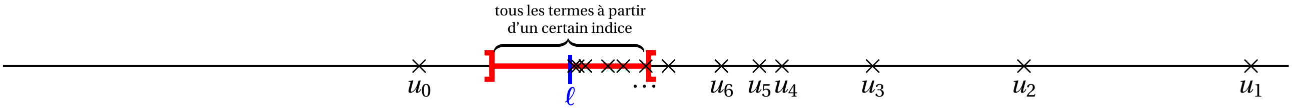
DÉFINITION III.7.1
Dire qu'un réel ℓ est la limite d'une suite (u_n) signifie que *tout* intervalle ouvert de centre ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain indice. On écrit alors :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell.$$

Exemple *Démontrons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ définie par : $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$; a pour limite 0.*
Soit $]-r\,;r[$ (avec $r > 0$) un intervalle ouvert centré en 0.
Cherchons un entier N tel que pour tout naturel $n \geqslant \mathrm{N}$, on ait : $u_n \in]-r\,;r[$; c'est-à-dire : $-r < u_n < r$.
Il suffit de prendre un entier N tel que : $\mathrm{N} > \dfrac{1}{r^2}$.
En effet, pour tout entier naturel $n \geqslant \mathrm{N}$, on a alors : $n \geqslant \mathrm{N} > \dfrac{1}{r^2}$; la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$,

on en déduit que : $\sqrt{n} > \frac{1}{r}$ *; la fonction* $x \mapsto \frac{1}{x}$ *est strictement décroissante sur* $\mathbb{R}^{+\star}$*, on en déduit que :* $r < 0 < \frac{1}{\sqrt{n}} < r$*.*
D'où : $u_n \in]-r\,;r[$ *; dès que :* $n \geqslant \mathrm{N}$*.*
Donc la suite (u_n) *a pour limite* 0*.*

La définition III.7.1 signifie que les termes de la suite sont à une distance aussi petite qu'on le souhaite dès que les indices sont suffisamment grands. On a donc une accumulation des termes de la suite (u_n) autour de ℓ.



D'après la définition III.7.1, pour démontrer qu'une suite (u_n) a pour limite ℓ, il suffit de démontrer que pour tout $r > 0$, il existe un entier N tel que si $n > \mathrm{N}$, alors $|u_n - \ell| < r$.

DÉFINITIONS III.7.2

(1) Dire q'une suite (u_n) a pour limite $+\infty$ signifie que *tout* intervalle ouvert du type $]\mathrm{A};+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain indice. On écrit alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

(2) Dire q'une suite (u_n) a pour limite $-\infty$ signifie que *tout* intervalle ouvert du type $]-\infty;\mathrm{A}[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain indice. On écrit alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

Exemple *Démontrons que la suite* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *définie par :* $u_n = \sqrt{n}$ *; a pour limite* $+\infty$*.*
Soit A un un nombre réel.
Cherchons un entier N tel que pour tout naturel $n \geqslant \mathrm{N}$*, on ait :* $u_n \in]\mathrm{A};\infty[$ *; c'est-à-dire :* $\mathrm{A} < u_n$*.*
Il suffit de prendre un entier N tel que : $\mathrm{N} > \mathrm{A}^2$*.*
En effet, pour tout entier naturel $n \geqslant \mathrm{N}$*, on a alors :* $n \geqslant \mathrm{N} > \mathrm{A}^2$ *; la fonction* $x \mapsto \sqrt{x}$ *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}^+$*, on en déduit que :* $\sqrt{n} > |\mathrm{A}|$ *; d'où par transitivité :* $\sqrt{n} > \mathrm{A}$*. D'où :* $u_n \in]\mathrm{A};\infty[$ *; dès que :* $n \geqslant \mathrm{N}$*.*
Donc la suite (u_n) *a pour limite* $+\infty$*.*

Remarques
1. *Une suite qui a une limite finie est dite* ***convergente****.*
2. *Une suite qui n'a pas de limite ou dont la limite n'est pas finie est dite* ***divergente****.*
3. *Dans les définitions de limites de suites, on peut remplacer l'expression « à partir d'un certain indice » par « sauf un nombre fini d'entre eux ».*
4. *Si une suite converge vers un nombre* ℓ*, alors tout intervalle ouvert contenant* ℓ *contient tous les termes de la suite à partir d'un certain indice. En effet : tout intervalle ouvert contenant* ℓ *inclut un intervalle ouvert de centre* ℓ*.*
5. *Dans la définition III.7.1 on pourrait donc remplacer « de centre* ℓ *» par « contenant* ℓ *».*

THÉORÈME III.7.1

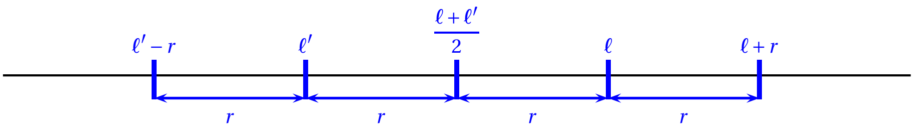
Toute suite convergente est bornée.

Démonstration Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite convergente et ℓ sa limite. (u_n) converge ver ℓ, il existe donc un entier naturel N tel que pour tout entier $n \geqslant \mathrm{N} : |u_n - \ell| < 1$. Posons alors : $\mathrm{M} = \max\{u_{n_0}, u_{n_0+1}, \cdots, u_{\mathrm{N}-1}, u_\mathrm{N}, \ell+1\}$ et $m = \min\{u_{n_0}, u_{n_0+1}, \cdots, u_{\mathrm{N}-1}, u_\mathrm{N}, \ell-1\}$.
La suite (u_n) est majorée par M et minorée par m, elle est donc bornée. □

THÉORÈME III.7.2 UNICITÉ DE LA LIMITE

Une suite ne peut pas avoir plusieurs limites.

Démonstration



Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite. Nous démontrerons ici que (u_n) ne peut pas avoir deux limites finies distinctes. Les autres cas se démontrent de la même façon.
Si la suite (u_n) avait deux limites distinctes ℓ et ℓ' en posant : $r = \frac{|\ell' - \ell|}{2}$ (r est la demi-distance entre ℓ et ℓ') les intervalles $]\ell - r\,;\ell + r[$ et $]\ell' - r\,;\ell' + r[$ seraient disjoints. La suite (u_n) aurait pour limite ℓ, donc à partir d'un certain indice N, tous les termes de la suite (u_n) seraient dans $]\ell - r\,;\ell + r[$, elle aurait de même pour limite ℓ', donc à partir d'un certain indice N', tous les termes de la suite (u_n) seraient dans $]\ell' - r\,;\ell' + r[$; en posant : $\mathrm{N}'' = \max\{\mathrm{N};\mathrm{N}'\}$; à partir de l'indice N'' tous les termes de la suite (u_n) seraient à la fois éléments de $]\ell - r\,;\ell + r[$ et de $]\ell' - r\,;\ell' + r[$, donc de leur intersection, c'est-à-dire de l'ensemble vide ; ce qui est impossible.
La suite (u_n) ne peut donc pas avoir deux limites finies distinctes. □

Le théorème suivant est une conséquence immédiate des définitions de la limite d'une suite et d'une fonction.

Théorème III.7.3
Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite définie explicitement par une relation du type : $u_n = f(n)$.
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \mathrm{L}$ avec $\mathrm{L}\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \mathrm{L}$

Remarques
1. *La réciproque de ce théorème est fausse.*
2. *Ce théorème n'est pas applicable dans le cas d'une suite définie par récurrence.*

III.7.2 Théorèmes de comparaisons

Théorème III.7.4 Théorème des gendarmes 1re forme
Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$, $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(w_n)_{n\geqslant n_0}$ trois suites.
Si (v_n) et (w_n) convergent vers une même limite ℓ et si pour tout entier $n\geqslant n_0$:

$$v_n \leqslant u_n \leqslant w_n;$$

alors (u_n) converge vers ℓ.

Démonstration Soit r un réel strictement positif. il suffit donc de prouver qu'à partir d'un certain indice tous les termes de la suite sont dans l'intervalle ouvert, $\mathrm{I}_{\ell,r}$ de centre ℓ et de rayon r.
La suite (v_n) converge vers ℓ, donc à partir d'un certain indice, N_v, sont dans $\mathrm{I}_{\ell,r}$.
La suite (w_n) converge vers ℓ, donc à partir d'un certain indice, N_w, sont dans $\mathrm{I}_{\ell,r}$.
Posons : $\mathrm{N}=\max\{\mathrm{N}_v\,;\mathrm{N}_w\}$. Pour tout entier $n\geqslant \mathrm{N}$, on a : $\ell - r < v_n \leqslant u_n \leqslant w_n < \ell + r$.
Donc la suite (u_n) converge vers ℓ. □

Exercice III.7.1. ***Déterminer la limite de la suite*** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ ***définie par :*** $u_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n}$.

Solution *Pour tout entier* $n>0$, *on a :* $1+(-1)^n = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair}\end{cases}$ *; d'où :* $0\leqslant 1+(-1)^n \leqslant 2$.
Pour tout entier $n>0$, *en divisant membre à membre par* n, *il vient :* $0\leqslant u_n \leqslant \dfrac{2}{n}$.
Or on sait que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$ *; donc par produit par 2 :* $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2}{n}=0$ *;*
d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. □

Remarques
1. *Le théorème III.7.4 reste vrai même si la condition* $v_n\leqslant u_n\leqslant w_n$ *n'est pas vérifiée pour tout* n, *mais seulement à partir d'un certain indice.*
2. *Plus généralement, tous les théorème de ce paragraphe reste vrai même si leur condition d'inégalité n'est pas vérifiée pour tout* n, *mais seulement à partir d'un certain indice.*

Corollaire III.7.5 Théorème des gendarmes 2e forme
Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite.
S'il existe une suite positive $(d_n)_{n\geqslant n_0}$ et un réel ℓ tels que pour tout entier $n\geqslant n_0$:

$$|u_n - \ell| \leqslant d_n;$$

alors (u_n) converge vers ℓ.

DémonstrationIl suffit d'appliquer le théorème III.7.4 avec les suites $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(w_n)_{n\geqslant n_0}$ de termes généraux : $v_n=\ell-d_n$ et $w_n=\ell+d_n$. □

Exercice III.7.2. ***Déterminer la limite de la suite*** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ ***définie par :*** $u_n = 1+\dfrac{(-1)^n}{n}$.

Solution *Pour tout entier* $n>0$, *on a :* $|u_n - 1|\leqslant \dfrac{1}{n}$.
Or on sait que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$ *; d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que :* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$. □

Théorème III.7.6
Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ deux suites.
(1) Si : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ et si pour tout entier $n\geqslant n_0$: $v_n\leqslant u_n$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
(2) Si : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ et si pour tout entier $n\geqslant n_0$: $v_n\geqslant u_n$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Démonstration Pour démontrer ce théorème, il suffit de s'assurer que dans les deux cas la suite (u_n) vérifie les conditions de la définition III.7.2.
(1) Soit $]\mathrm{A};+\infty[$ un intervalle. La suite v_n tend vers $+\infty$, donc à partir d'un certain indice N, tous les termes de la suite (v_n) sont dans l'intervalle $]\mathrm{A};+\infty[$. Ainsi, pour tout nombre entier n supérieur ou égal à N, $u_n\geqslant v_n\geqslant \mathrm{A}$; c'est-à-dire : $v_n \in]\mathrm{A};+\infty[$. La suite u_n diverge vers $+\infty$.

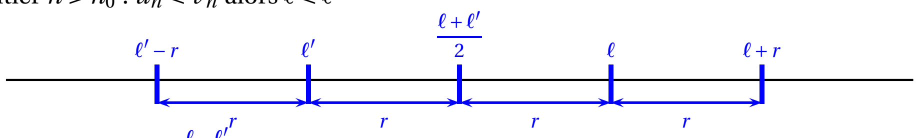
(2) se démontre de la même façon. □

Exercice III.7.3. ***Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par : $u_n = n + \dfrac{(-1)^n}{n}$.***

Solution *Pour tout entier $n > 0$, on a : $u_n \geqslant n-1$.*
Or on sait que : $\lim\limits_{n\to+\infty}(n-1) = +\infty$; par comparaison, on en déduit que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. □

THÉORÈME III.7.7
Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ deux suites convergentes et ℓ et ℓ' leurs limites respectives.
Si pour tout entier $n \geqslant n_0$: $u_n \leqslant v_n$ alors $\ell \leqslant \ell'$

Démonstration



Supposons que : $\ell > \ell'$; posons alors : $r = \dfrac{\ell-\ell'}{2}$ (r est la demi-distance entre ℓ et ℓ').
On a donc : $\ell' + r = \dfrac{\ell+\ell'}{2} = \ell - r$. Les intervalles $]\ell - r ; \ell + r[$ et $]\ell' - r ; \ell' + r[$ sont donc disjoints. À partir d'un certain indice N, tous les termes de la suite (u_n) sont dans $]\ell - r ; \ell + r[$ et à partir d'un certain indice N', tous les termes de la suite (v_n) seraient dans $]\ell' - r ; \ell' + r[$; en posant : $\mathrm{N}'' = \max\{\mathrm{N} ; \mathrm{N}'\}$; à partir de l'indice N″ on a : $\ell' - r < v_n < \dfrac{\ell+\ell'}{2} < u_n < \ell + r$; ce qui contredit : $u_n \leqslant v_n$.
Donc : $\ell \leqslant \ell'$. □

Remarques

1. *En particulier, si M est majorant de (u_n), alors : $\ell \leqslant \mathrm{M}$.*
2. *Si M est minorant de (u_n), alors : $m \leqslant \ell$.*
3. *Le théorème III.7.7 devient faux si on remplace les inégalités larges par des inégalités strictes. Pour s'en convaincre il suffit d'étudier les cas des suites de termes généraux : $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = -\dfrac{1}{n}$*

III.7.2.a Suites de références

THÉORÈME III.7.8
Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, définies par : $u_n = \dfrac{1}{n}$; $v_n = \dfrac{1}{n^2}$; $w_n = \dfrac{1}{n^3}$; $t_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$;
ont pour limite 0.

Démonstration Soit $]-r ; r[$ un intervalle contenant 0 et N un entier strictement plus grand que $\dfrac{1}{r^2}$.
Pour tout entier $n \geqslant \mathrm{N}$, on a :

- $w_n \leqslant v_n \leqslant u_n \leqslant t_n$, car : $0 < \dfrac{1}{n} \leqslant 1$;
- $n > \dfrac{1}{r^2}$; donc : $\sqrt{n} > \dfrac{1}{r}$ (car $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante) ; d'où : $\dfrac{1}{\sqrt{n}} < r$ (car $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$) ; c'est-à-dire : $t_n < r$;
- donc finalement : $-r < 0 < w_n \leqslant v_n \leqslant u_n \leqslant t_n < r$.

Pour tout $r > 0$, il existe un indice N à partir duquel tous les termes des suites considérées sont dans l'intervalle $]-r ; r[$, elles convergent donc vers 0. □

THÉORÈME III.7.9
Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définies par : $u_n = n$; $v_n = n^2$; $w_n = n^3$; $t_n = \sqrt{n}$;
ont pour limite $+\infty$.

Démonstration Soit A un réel et N un entier strictement plus grand que A^2 et que 1.
Pour tout entier $n \geqslant \mathrm{N}$, on a :

- $t_n \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, car : $1 < n$;
- $n > \mathrm{A}^2$; donc : $\sqrt{n} > |\mathrm{A}| \geqslant \mathrm{A}$ (car $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante) ; c'est-à-dire : $\mathrm{A} < t_n$;
- donc finalement : $\mathrm{A} < t_n \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.

Pour tout réel A, il existe un indice N à partir duquel tous les termes des suites considérées sont dans l'intervalle $]\mathrm{A} ; +\infty[$, elles divergent donc vers $+\infty$. □

Remarque *Les théorèmes III.7.8 et III.7.9 peuvent également se déduire du théorème III.7.3.*

III.7.3 Calcul algébrique de limites

III.7.3.a Somme de deux suites convergentes

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ deux suites convergentes et ℓ et ℓ' leurs limites respectives.
Démontrons que la suite de terme général $u_n + v_n$ converge vers $\ell + \ell'$.

Soit $r > 0$.
La suite (u_n) converge vers ℓ, il existe donc un entier N tel que pour tout entier $n \geqslant \mathrm{N}$:

$$|u_n - \ell| < \frac{r}{2}.$$

La suite (v_n) converge vers ℓ', il existe donc un entier N' tel que pour tout entier $n \geqslant \mathrm{N}'$:

$$\left|v_n - \ell'\right| < \frac{r}{2}.$$

Posons : $\mathrm{N}'' = \max\left\{\mathrm{N};\mathrm{N}'\right\}$. En utilisant l'inégalité triangulaire, on a pour tout entier $n \geqslant \mathrm{N}''$:

$$\left|(u_n + v_n) - (\ell + \ell')\right| \leqslant |u_n - \ell| + \left|v_n - \ell'\right| < r$$

Donc la suite de terme général $u_n + v_n$ converge vers $\ell + \ell'$.
En particulier, pour tout réel k, la suite de terme général $u_n + k$ converge vers $\ell + k$.

III.7.3.b Produit de deux suites convergentes

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ deux suites convergentes et ℓ et ℓ' leurs limites respectives.
Démontrons que la suite de terme général $u_n \times v_n$ converge vers $\ell \times \ell'$.
Les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes donc, d'après le théorème III.7.1 elle sont bornées. En appliquant le théorème III.1.1 on en déduit l'existence des nombres réels M et M' tels que pour tout entier $n \geqslant n_0$: $|u_n| \leqslant \mathrm{M}$ et $|v_n| \leqslant \mathrm{M}'$.
Soit $r > 0$.
La suite (u_n) converge vers ℓ, il existe donc un entier N tel que pour tout entier $n \geqslant \mathrm{N}$:

$$|u_n - \ell| < \frac{r}{2\mathrm{M}'}.$$

La suite (v_n) converge vers ℓ', il existe donc un entier N' tel que pour tout entier $n \geqslant \mathrm{N}'$:

$$\left|v_n - \ell'\right| < \frac{r}{2\mathrm{M}}.$$

Posons : $\mathrm{N}'' = \max\left\{\mathrm{N};\mathrm{N}'\right\}$. En utilisant l'inégalité triangulaire, on a pour tout entier $n \geqslant \mathrm{N}''$:

$$\left|(u_n \times v_n) - (\ell \times \ell')\right| \leqslant \left|u_n(v_n - \ell') + \ell'(u_n - \ell)\right| \leqslant |u_n| \times \left|v_n - \ell'\right| + \left|\ell'\right| \times |u_n - \ell| \leqslant |u_n| \times \frac{r}{2\mathrm{M}} + \left|\ell'\right| \times \frac{r}{2\mathrm{M}'}$$

D'où :

$$\left|(u_n \times v_n) - (\ell \times \ell')\right| \leqslant \frac{|u_n|}{\mathrm{M}} \times \frac{r}{2} + \frac{\ell'}{\mathrm{M}'} \times \frac{r}{2}$$

Or, par définition des nombres M et M' et d'après la remarque consécutive au THÉORÈME III.7.7, $\dfrac{|u_n|}{\mathrm{M}} \leqslant 1$ et $\dfrac{\ell'}{\mathrm{M}'} \leqslant 1$.
Donc par somme et par produit par $\dfrac{r}{2}$ qui est positif :

$$\left|(u_n \times v_n) - (\ell \times \ell')\right| \leqslant \frac{|u_n|}{\mathrm{M}} \times \frac{r}{2} + \frac{\ell'}{\mathrm{M}'} \times \frac{r}{2} \leqslant r.$$

Pour tout $r > 0$ il existe un indice à partir duquel tous les termes de la suite $(u_n \times v_n)$ sont dans l'intervalle de centre $\ell\ell'$ et de rayon r.
Donc la suite de terme général $u_n \times v_n$ converge vers $\ell \times \ell'$.
En particulier, pour tout réel k, la suite de terme général ku_n converge vers $k\ell$.

III.7.3.c Inverse d'une suite convergente

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite convergeant vers une limite non-nulle ℓ.
Démontrons que la suite de terme général $\dfrac{1}{u_n}$ converge vers $\dfrac{1}{\ell}$.

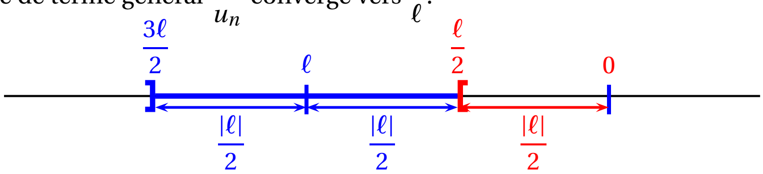


FIGURE III.5 –

À partir d'un certain indice N, tous les termes de la suite sont compris entre $\frac{\ell}{2}$ et $\frac{3\ell}{2}$.
On a alors : $|u_n| \geqslant \frac{|\ell|}{2}$; d'où :

$$\frac{1}{|u_n|} \leqslant \frac{2}{|\ell|}.$$

À partir de l'indice N, on a donc :

$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| \leqslant \frac{|u_n - \ell|}{|u_n||\ell|} \leqslant \frac{2}{\ell^2}|u_n - \ell|.$$

Soit $r > 0$. À partir d'un certain indice N', tous les termes de la suite (u_n) sont dans l'intervalle de centre ℓ et de rayon $\frac{\ell^2}{2}r$, on a alors : $|u_n - \ell| \leqslant \frac{\ell^2}{2}r$. D'où, par produit par $\frac{2}{\ell^2}$:

$$\frac{2}{\ell^2}|u_n - \ell| \leqslant r.$$

Posons : $N'' = \max\{N, N'\}$. À partir de l'indice N'', on a donc :

$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| \leqslant r.$$

Pour tout $r > 0$, à partir d'un certain indice tous les termes de la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ sont dans l'interlvalle de centre $\frac{1}{\ell}$ et de rayon r, donc la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ converge vers $\frac{1}{\ell}$.

III.7.3.d Quotient de deux suites convergentes

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ deux suites convergentes et ℓ et ℓ' leurs limites respectives (avec $\ell' \neq 0$).
Démontrons que la suite de terme général $\frac{u_n}{v_n}$ converge vers $\frac{\ell}{\ell'}$.
D'après III.7.3.c, la suite de terme général $\frac{1}{u_n}$ converge vers $\frac{1}{\ell}$.
Donc daprès III.7.3.b, la suite de terme général $\frac{u_n}{v_n}$ converge vers $\frac{\ell}{\ell'}$.

III.7.3.e Cas général

Plus généralement nous admettons les résultats suivants concernant la limite de la somme, du produit ou du quotient de deux suites, ils se démontrent en utilisant des techniques semblables à celles utilisée ci-dessus. Le symbole « fi » signifie : forme indéterminée ; cela signifie que lers règles usuelles liant les opérations et le calcul de limites ne permettent pas de déterminer la limite éventuelle dans la configuration étudiée.

Limite de la somme de deux suites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	ℓ'	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n)$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	fi

Limite du produit de deux suites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	ℓ' $(\ell' \neq 0)$	ℓ' $(\ell' \neq 0)$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n)$	$\ell\ell'$	$\begin{cases} +\infty & \text{, si } \ell' > 0 \\ -\infty & \text{, si } \ell' < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} -\infty & \text{, si } \ell' > 0 \\ +\infty & \text{, si } \ell' < 0 \end{cases}$	fi	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Limite de l'inverse d'une suite

On suppose ici que la suite de terme général $\frac{1}{v_n}$ est bien définie.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ $(\ell \neq 0)$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n}$	$\frac{1}{\ell}$	0	0	$\begin{cases} +\infty & \text{, si } (u_n) \text{est strictement positive à partir d'un certain indice} \\ -\infty & \text{, si } (u_n) \text{est strictement négative à partir d'un certain indice} \end{cases}$

Limite du quotient de deux suites

On suppose ici que la suite de terme général $\dfrac{u_n}{v_n}$ est bien définie.
Pour calculer la limite de la suite de terme général $\dfrac{u_n}{v_n}$, il suffit de remarquer que pour tout nombre entier, n, ou elle est définie : $\dfrac{u_n}{v_n} = u_n \times \dfrac{1}{v_n}$.
Le résultat désiré se déduit alors des considérations sur les limites de somme et d'inverse de suites.

III.7.4 Limites de suites géométriques

Lemme III.7.10

Soit λ un réel strictement positif.
(1) Si $\lambda > 1$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda^n = +\infty$.
(2) Si $\lambda < 1$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda^n = 0$.

Démonstration Démontrons **(1)** .
Posons : $x = \lambda - 1$. On a : $x > 0$; donc, d'après l'inégalité de Bernoulli (voir exercice résolu **??** page **??**), pour tout nombre entier supérieur à 2 : $(1+x)^n > 1 + nx$; c'est-à-dire : $\lambda^n > n(\lambda - 1) + 1$.
Or, d'après le théorème III.7.3 : $\lim\limits_{n\to+\infty} (n(\lambda-1)+1) = +\infty$; donc par comparaison (théorème III.7.6) : $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda^n = +\infty$.
Démontrons **(2)** .
Soit $\lambda \in]0;1[$. Posons : $\lambda' = \dfrac{1}{\lambda}$. On a : $\lambda' > 1$; donc d'après **(1)** : $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda'^n = +\infty$; d'où, par passage à l'inverse : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\lambda'^n} = 0$ c'est-à-dire : $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda^n = 0$. □

Théorème III.7.11

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme a. La limite de (u_n) est donnée par le tableau suivant.

	$q \leqslant -1$	$\lvert q\rvert < 1$	$q = 1$	$1 < q$
$a > 0$	pas de limite	0	a	$+\infty$
$a = 0$	0	0	0	0
$a < 0$	pas de limite	0	a	$-\infty$

Démonstration
1er cas : $a = 0$ ou $q = 1$ Le résultat est immédiat car la suite est constante.
2e cas : $a > 0$ et $q \neq 1$
si $\lvert q\rvert < 1$ On a vu (§ III.7.1.a) qu'il suffit de démontrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - 0| = 0$.
Or pour tout indice n : $|u_n - 0| = a\lvert q\rvert^n$; de plus, d'après le lemme III.7.10 : $\lim\limits_{n\to+\infty} \lvert q\rvert^n =$, donc par produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0$.
si $1 < q$ On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$ or (u_n) est une suite à termes positifs, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
si $q \leqslant -1$ On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 1$; or les termes u_n changent de signe avec la parité de n, donc (u_n) n'a pas de limite.
3e cas : $a < 0$ et $q \neq 1$ On déduit les résultats désirés des résultats obtenus au cas précédent en multipliant par -1.
□

III.7.5 Exercices

III.7.a. Étudier la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par : $u_n = \dfrac{n-3}{n+3}$.
III.7.b. Étudier la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par : $u_n = \dfrac{n^2-3}{n+3}$.
III.7.c. Donner un contre exemple illustrant la remarque **1** succédant au théorème III.7.3.
III.7.d. Donner un exemple de suite divergente et bornée.

III.7.e. Donner un exemple de suite dont la limite est $+\infty$ et qui n'est pas croissante à partir d'un certain indice.

III.7.f. Donner un exemple de suite non majorée qui ne diverge pas vers $+\infty$.
III.7.g. Donner deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ et
a. $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = 0$.
b. $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = +\infty$.
c. $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = -\infty$.
d. $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = \pi$.
e. $(u_n + v_n)$ n'a pas de limite.
III.7.h. Donner deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et

a. $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = 0$.

b. $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = +\infty$.

c. $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = -\infty$.

d. $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = \pi$.

e. $(u_n v_n)$ n'a pas de limite.

III.8 Suites monotones bornées

III.8.1 Théorème de convergence d'une suite monotone

THÉORÈME III.8.1

(1) Toute suite croissante et majorée est convergente et sa limite est sa borne supérieure.

(2) Toute suite décroissante et minorée est convergente et sa limite est sa borne inférieure.

Démonstration

(1) Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite croissante et majorée. La suite (u_n) est majorée, d'après le théorème III.1.2, il a donc une borne supérieure ℓ.
On veut donc démontrer que (u_n) converge vers ℓ.
Pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a : $u_n \leqslant \ell$.

Soit r un réel strictement positif, démontrons qu'à partir d'un certain indice tous les termes de la suite (u_n) vérifie : $\ell - r < u_n < \ell + r$.
ℓ est le plus petit des majorants et : $\ell - r < \ell$; donc $\ell - r$ n'est pas un majorant, on en déduit qu'il existe un indice N tel que : $\ell - r < u_N$.
Mais la suite (u_n) est croissante et majorée par ℓ, donc pour tout entier $n \geqslant N$: $\ell - r < u_N \leqslant u_n \leqslant \ell < \ell + r$.
Donc la suite (u_n) converge vers ℓ.
On démontre **(2)** de la même façon. □

Ce théorème s'applique dans le cas d'une suite monotone dont on connaît un majorant M (dans le cas où la suite est croissante) ou un minorant m (dans le cas où la suite est décroissante) mais dont on ne sait pas calculer algébriquement la limite.
On obtient ainsi l'existence d'une limite mais on ne connaît pas sa valeur. On a toutefois une information partielle sur la localisation de la limite : $u_{n_0} \leqslant \ell \leqslant M$ ou $m \leqslant \ell \leqslant u_{n_0}$.
Nous verrons ultérieurement des méthodes permettant d'exploiter ces informations pour déterminer la limite.

Remarque *Dans le théorème III.8.1, si la suite n'est monotone qu'à partir d'un certain indice, elle reste encore convergente.*

Exercice III.8.1. ***On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :***

$$u_n = \frac{1}{n!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

1. Calculer les cinq premiers termes de la suite.

2. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante à partir de l'indice 1.

3. Justifier que (u_n) est convergente et préciser un intervalle dans le quel se trouve sa limite.

Solution

1. $u_0 = \frac{1}{0!} + \frac{1}{0!} = 2$

$u_1 = \frac{1}{1!} + \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} = 3$

$u_2 = \frac{1}{2!} + \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} = 3$

$u_3 = \frac{1}{3!} + \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} = \frac{17}{6} = 2,83333\cdots$

$u_4 = \frac{1}{4!} + \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} = \frac{11}{4} = 2,75$

2. *Soit n un entier tel que : $n \geqslant 1$. On a : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{2}{(n+1)!} - \frac{n+1}{(n+1)!} = -\frac{n-1}{(n+1)!}$.*
On a : $-\frac{n-1}{(n+1)!} \leqslant 0$ dès que $n \geqslant 1$; donc la suite (u_n) est donc décroissante à partir de l'indice 1.

3. *Les termes de la suite sont des sommes de nombres positifs, 0 est donc un minorant de la suite. La suite (u_n) est décroissante à partir de l'indice 1 et minorée par 0, elle est donc convergente et sa limite vérifie : $0 \leqslant \ell$.*
Le plus grand des termes de la suite est u_1, c'est-à-dire 3, donc : $\ell \leqslant 3$, d'où :

$$\ell \in [0;3].$$

□

COROLLAIRE III.8.2 THÉORÈME DE DIVERGENCE D'UNE SUITE MONOTONE

(1) Toute suite croissante et non convergente diverge vers $+\infty$.

(2) Toute suite décroissante et non convergente diverge vers $-\infty$.

Démonstration

(1) Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite croissante et non convergente.

Il suffit de démontrer que pour tout réel A, les termes de la suite sont tous plus grand que A à partir d'un certain indice.

D'après le théorème III.8.1, si (u_n) était majorée elle serait convergente, mais ce n'est pas le cas donc elle n'est pas majorée.

Soit A un nombre réel ; A n'est pas un majorant de la suite, il existe donc un indice N tel que : $u_{\mathrm{N}} > \mathrm{A}$. La suite est croissante, donc pour tout entier $n > \mathrm{N}$: $u_n > \mathrm{A}$. la suite (u_n) diverge donc vers $+\infty$.

On démontre **(2)** de la même façon. □

COROLLAIRE III.8.3

(1) Toute suite croissante et convergente a pour borne supérieure sa limite.

(2) Toute suite décroissante et convergente a pour borne inférieure sa limite.

Démonstration

(1) Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite croissante et convergente. D'après le théorème III.7.1 (u_n) est bornée et le résultat se déduit alors des théorèmes III.8.1 et III.7.2.

On démontre **(2)** de la même façon. □

III.8.2 Suites adjacentes

DÉFINITION III.8.1

Deux suites $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ sont dites adjacentes lorsqu'elles vérifient les trois propriétés suivantes.

(1) L'une est croissante.

(2) L'autre est décroissante.

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(v_n - u_n\right) = 0$.

THÉORÈME III.8.4

Deux suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite.

Démonstration

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ deux suites adjacentes. Quitte à les intervertir on peut supposer que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante.
Considérons la suite (w_n) définie par : $w_n = v_n - u_n$; pour tout entier $n \geqslant n_0$ on a :

$$w_{n+1} - w_n = (v_{n+1} - u_{n+1}) - (v_n - u_n) = \underbrace{\left(v_{n+1} - v_n\right)}_{\text{négatif}} - \underbrace{\left(u_{n+1} - u_n\right)}_{\text{positif}};$$

donc la suite (w_n) est décroissante, de plus elle converge vers 0 donc d'après le corollaire III.8.3 la suite (w_n) est positive ; la monotonie des suites (u_n) et (v_n) nous permet alors d'en déduire que pour tout entier $n \geqslant n_0$:

$$u_{n_0} \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_{n_0}.$$

La suite (u_n) est croissante et majorée par v_{n_0} elle est donc convergente, désignons par ℓ sa limite.

La suite (v_n) est décroissante et minorée par u_{n_0} elle est donc convergente, désignons par ℓ' sa limite.

On a : $\ell' - \ell = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n - \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(v_n - u_n\right) = 0$; les suites (u_n) et (v_n) convergent donc vers la même limite. □

III.8.3 Exercices résolus

Exercice III.8.2. ***1. Étudier le sens de variation de la fonction*** $f : x \mapsto 3 - \dfrac{2}{x}$.

2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***définie par,*** $u_0 = 3$***, et pour tout nombre entier naturel,*** n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

a. Démontrer que tous les termes de la suite (u_n) ***sont éléments de l'intervalle*** $[1, 3]$.

b. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

3. Étudier la convergence de la suite (u_n).

Solution 1. *L'ensemble de définition de f est :* $\mathbb{R}^\star$.

f est une fonction rationnelle, elle est donc dérivable sur son ensemble de définition et sa dérivée est la fonction, f', définie par :

$$f'(x) = \frac{2}{x^2}.$$

Un carré est toujours positif, donc : $f' > 0$ *sur* $\mathbb{R}^\star$.

$$\boxed{\textit{La fonction } f \textit{ est strictement croissante sur }]-\infty; 0[\textit{ et sur }]0; +\infty[.}$$

2. a. *Raisonnons par récurrence. Pour tout nombre entier naturel, n, désignons par P_n la proposition : « $1 \leqslant u_n \leqslant 3$ ».*

On a : $u_0 = 3$; donc P_0 est vraie.

Soit n un nombre entier naturel pour lequel P_n est vraie. Démontrons P_{n+1}, c'est-à-dire : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$.
*D'après **1.**, la fonction f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$, elle est donc en particulier croissante sur l'intervalle $[1,3]$.*
Or, d'après l'hypothèse de récurrence : $1 \leqslant u_n \leqslant 3$;
donc : $f(1) \leqslant f(u_n) \leqslant f(3)$;
c'est-à-dire : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 3 - \dfrac{2}{3} \leqslant 3$.
Nous en déduisons par récurrence que :

$$\boxed{\textbf{tous les termes de la suite } (u_n) \textbf{ sont éléments de l'intervalle } [1,3]}$$

***b.** Nous avons : $u_0 = 3$ et $u_1 = 3 - \dfrac{2}{3}$; donc : $u_1 \leqslant u_0$. Ce premier résultat préfigure peut-être une décroissance.*
Raisonnons par récurrence. Pour tout nombre entier naturel, n, désignons par P_n la proposition : « $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3$ ».

D'après le calcul ci-dessus et le résultat obtenu à la question précédente, P_0 est vraie.
Soit n un nombre entier naturel pour lequel P_n est vraie. Démontrons P_{n+1}, c'est-à-dire : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 3$.
*D'après **1.**, la fonction f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$, elle est donc en particulier croissante sur l'intervalle $[1,3]$.*
Or, d'après l'hypothèse de récurrence : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3$; donc : $f(1) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \leqslant f(3)$;
c'est-à-dire : $1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 3 - \dfrac{2}{3} \leqslant 3$.
Nous en déduisons par récurrence que pour tout nombre entier naturel, n : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3$; en particulier :

$$\boxed{\textbf{la suite } (u_n) \textbf{ est décroissante.}}$$

***3.** D'après **2.a.** et **2.b.** la suite u_n est décroissante et minorée par 1 :*

$$\boxed{\textbf{La suite } (u_n) \textbf{ est convergente et sa limite est supérieur ou égale à } 1.}$$

□

III.8.4 Exercices

III.8.a. Démontrer que les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définies par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n!}$$

sont adjacentes.

III.8.b. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} v_0 = 12 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases}$$

1. Démontrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par : $w_n = v_n - u_n$; est une suite géométrique.

2. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

3. a. Démontrer que la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par : $t_n = 2u_n + 3v_n$; est une suite constante.

b. En déduire la limite commune des suites (u_n) et (v_n).

4. Exprimer explicitement, pour tout entier naturel n, u_n et v_n en fonction de n.

III.9 Exercices

III.1. 1. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité graphique : 2cm). On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{4x-6}{x-1}$.

a. Préciser l'ensemble de définition, D_f, de la fonction f.

b. Déterminer deux nombres réels a et b tels que pour tout élément, x, de D_f :

$$\frac{4x-6}{x-1} = a + \frac{b}{x-1}.$$

c. Étudier les variations de f.

d. Déterminer les points fixes de f.

e. Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 3.

f. Tracer $\mathscr{C}_f$.

2. Représenter sur le graphique établi en **1.f.** les quatre premiers termes de la suite (u_n) vérifiant, $u_0 = 7$, et pour tout entier naturel non nul, n : $u_n = f(u_{n-1})$.
Conjecturer la limite éventuelle de la suite (u_n).

III.2. Suite de Fibonacci

La suite de Fibonacci est la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$u_0 = 0$; $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$.
On se propose de déterminer une expression explicite du terme général de la suite.

1. Donner les dix premiers termes de la suite.

2. (a_n) et (b_n) sont deux suites géométriques de premier terme : $a_0 = b_0 = 1$. La raison de (a_n) est positive et celle de (b_n) est négative. Elles vérifient pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ et $b_{n+1} = b_n + b_{n-1}$.

a. Démontrer que les raisons des suites (a_n) et (b_n) sont les solutions de l'équation :

$$q^2 = q + 1 \qquad \text{(E)}$$

b. En déduire les expressions explicites des suites (a_n) et (b_n).

3. Déterminer le couple (α, β) de nombres réels solution du système : $\begin{cases} \alpha a_0 + \beta b_0 = u_0 \\ \alpha a_1 + \beta b_1 = u_1 \end{cases}$.

4. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$v_n = \alpha a_n + \beta b_n$.
Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $v_{n+1} = v_n + v_{n-1}$

5. Conclure.

Sujets de Baccalauréat

III.3. Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et, pour tout nombre entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4.$$

On pose, pour tout nombre entier naturel n, $v_n = u_n - 6$.

a. Pour tout nombre entier naturel n, calculer v_{n+1} en fonction de v_n. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

b. Démontrer que pour tout nombre entier naturel n, $u_n = -5\left(\frac{1}{3}\right)^n + 6$

c. Étudier la convergence de la suite (u_n).

2. On considère la suite (w_n) dont les termes vérifient, pour tout nombre entier $n \geqslant 1$:

$$n w_n = (n+1) w_{n-1} + 1 \ \text{ et } \ w_0 = 1.$$

Le tableau suivant donne les dix premiers termes de cette suite.

w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

a. Détailler le calcul permettant d'obtenir w_{10}.

b. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Donner la nature de la suite (w_n). Calculer w_{2009}.

D'après France juin 2009

Chapitre IV

Limites de fonctions, continuité

IV.1 Limite finie (ou réelle)

IV.1.1 Limite d'une fonction en $+\infty$

Dans toute la suite de ce chapitre, lorsqu'une fonction f sera envisagée $\mathscr{D}_f$ désignera son ensemble de définition et $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique.

DÉFINITION IV.1.1
Dire qu'un réel l est limite d'une fonction f en $+\infty$ signifie que *tout* intervalle *ouvert* contenant l contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est plus grand qu'un certain réel A.

Remarques
1. *On écrit alors :* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ *ou* $\lim\limits_{+\infty} f = l$.
2. *Cette définition signifie que la distance entre $f(x)$ et l est aussi petite qu'on le souhaite dès que x est suffisamment grand.*
3. *On définit de même la limite de f en $-\infty$ en remplaçant « dès que x est plus grand qu'un certain réel A » par « dès que x est plus petit qu'un certain réel A ».*

THÉORÈME IV.1.1
Les fonctions $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$; $g : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$; $h : x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$; $k : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$;
ont pour limite 0 en $+\infty$.

Démonstration Soit $]a\,;b[$ un intervalle contenant 0 et A un réel strictement plus grand que $\dfrac{1}{b^2}$ et que 1.
Pour tout réel $x \geqslant$A, on a :
- $\dfrac{1}{x^3} \leqslant \dfrac{1}{x^2} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, car : $0 < \dfrac{1}{x} \leqslant 1$;
- $x > \dfrac{1}{b^2}$; donc : $\sqrt{x} > \dfrac{1}{b}$ (car $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante) ; d'où : $\dfrac{1}{\sqrt{x}} < b$ (car $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$) ; c'est-à-dire : $k(x) < b$;
- donc finalement : $a < 0 < h(x) \leqslant g(x) \leqslant f(x) \leqslant k(x) < b$.

Dès que x est plus grand que A, $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ et $k(x)$ sont dans l'intervalle $]a\,;b[$; donc :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

□

Remarque *De même :* $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^3} = 0$

Interprétation graphique

IV.1.2 Limite d'une fonction en un réel *a*

IV.2 Notion de continuité

IV.3 Utilisation de la continuité

IV.3.1 Continuité et bijection

Dans cette partie le repère $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}, \vec{\jmath}\,)$ est orthonormé.

IV.3.1.a Définition

DÉFINITION IV.3.1 BIJECTION

Soit f est une fonction et I, J deux intervalles. On dit que f réalise une bijection de I vers J lorsque les deux conditions suivantes sont réalisées.

1. Pour tout x élément de I : $f(x) \in$ J.
2. Pour tout y élément de J, il existe un unique x élément de I tel que : $y = f(x)$.

Exemple *La fonction $x \mapsto x^2$ réalise une bijection de $[0,+\infty[$ vers $[0,+\infty[$, elle réalise également une bijection de $]-\infty;0]$ vers $[0,+\infty[$, mais elle ne réalise pas de bijection de $\mathbb{R}$ vers $[0,+\infty[$.*

IV.3.1.b Bijection réciproque d'une fonction continue et strictement monotone

Reprenons les notations du paragraphe précédent.

- On appelle bijection réciproque l'application de J vers I, parfois notée f^{-1}, qui à tout élément de J associe son unique antécédent dans I.
- f^{-1} est une bijection.
- Pour tout élément x de I et tout élément y de J, on a : $y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$.
- Deux bijections réciproques ont des représentations symétriques par rapport à la première bissectrice [1].

Exercice IV.3.1. ***Démontrer que la fonction $f : x \mapsto 2x+1$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et déterminer sa bijection réciproque.***

Solution *L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$. Soit y un nombre réel, démontrons que y a un et un seul antécédent x par f dans $\mathbb{R}$. $y = f(x) \Leftrightarrow y = 2x+1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$.*

$\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$ est donc l'unique antécédent de y dans $\mathbb{R}$; par conséquent, la fonction f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et sa bijection réciproque est la fonction $f^{-1} : x \mapsto \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$. □

IV.3.1.c Fonction continue et strictement monotone sur un intervalle fermé

THÉORÈME IV.3.1 THÉORÈME DE LA BIJECTION

Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé [a ; b]. Si f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur $[a;b]$ alors f réalise une bijection de $[a;b]$ sur $\left[f(a);f(b)\right]$ (resp. $\left[f(b);f(a)\right]$) et la bijection réciproque est également strictement monotone et a le même sens de variation que f.

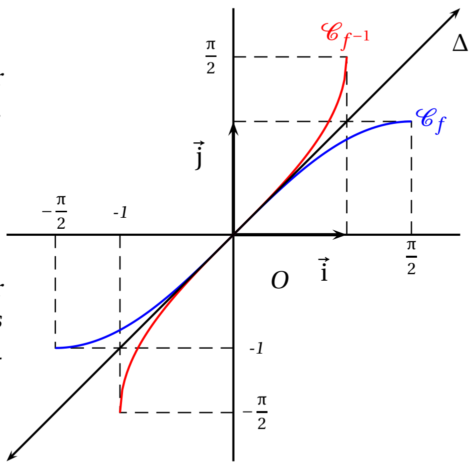
Exemples

1. *La fonction sinus est dérivable et strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. L'image de $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ par cette fonction est l'intervalle $[-1;1]$.*

La fonction sinus réalise donc une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ vers $[-1;1]$.

Soit l'application $f : \begin{array}{ccc} \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] & \to & [-1;1] \\ x & \mapsto & \sin x \end{array}$.

f est une bijection; on désigne par f^{-1} sa bijection réciproque. Sur la figure ci-contre, $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ désignent les courbes représentatives respectives des fonctions f et f^{-1}. On sait que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice Δ.



2. *résolution d'équation*

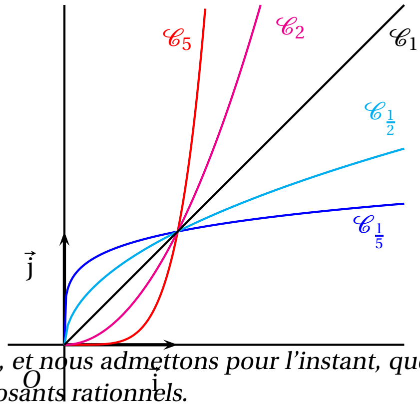
Remarque *Plus généralement, une fonction f strictement monotone et dérivable sur un intervalle I réalise une bijec-*

1. la première bissectrice est la droite d'équation $y = x$

tion de I vers $f(I)$, mais ce théorème est hors programme.

Exemple *Soit n un entier naturel non nul et f_n la fonction de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}^+$ définie par : $f_n(x) = x^n$.*
La fonction f_n est dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
On a : $f_n(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$.
Donc, f_n est une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}^+$; elle admet une bijection réciproque de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}^+$.

- *Cette bijection réciproque est appelée **fonction racine n-ième**.*
- *L'image de tout nombre réel positif x par la fonction racine n-ième est notée $\sqrt[n]{x}$ ou $x^{\frac{1}{n}}$.*



- *On a : $\begin{cases} x \in \mathbb{R}^+ \\ y = \sqrt[n]{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in \mathbb{R}^+ \\ x = y^n \end{cases}$.*
- *On a : $\forall x \in \mathbb{R}^+, \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = \sqrt[n]{x^n} = x$.*
- *La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.*
- *Pour tout entier naturel non nul n, on désigne respectivement par $\mathscr{C}_n$ et $\mathscr{C}_{\frac{1}{n}}$ les courbes représentatives des fonctions $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x^n \end{array}$ et $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & \sqrt[n]{x} \end{array}$. Les courbes $\mathscr{C}_n$ et $\mathscr{C}_{\frac{1}{n}}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice.*

Remarque *Plus généralement, on démontrera dans un prochain chapitre, et nous admettons pour l'instant, que les règles de calculs sur les puissances d'exposants entiers s'étendent aux exposants rationnels.*

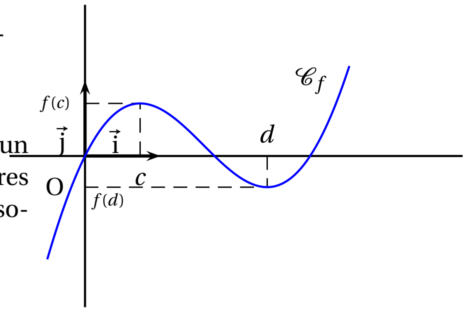
Exemple *Pour x positif, on a : $\left(\sqrt[3]{x}\right)^4 = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^4 = x^{\frac{4}{3}}$ et $x^{\frac{2}{3}} \times x^{\frac{3}{4}} = x^{\frac{17}{12}}$.*

IV.3.1.d Applications à la résolution d'équations

Le théorème suivant est une conséquence du théorème de la bijection.

Théorème IV.3.2

> Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle fermé $[a;b]$. Si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires $\left(f(a) \times f(b) < 0\right)$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule solution dans $[a;b]$.



Chapitre V

Exponentielles et équations différentielles

L'objectif de ce chapitre est d'introduire la fonction exponentielle, d'établir les principales propriétés de cette fonction et les théorèmes de résolutions d'équations différentielles.

V.1 La fonction exponentielle de base e

V.1.1 Propriété fondamentale

L'activité sur la méthode d'Euler nous conduit à conjecturer et nous admettons momentanément l'existence d'une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant les contraintes suivantes (l'existence d'une telle fonction sera établie § **??**).

$$f' = f \qquad \text{et} \qquad f(0) = 1 \tag{V.1}$$

Nous désignerons par exp cette fonction. Le principal objectif de ce paragraphe est d'établir la propriété fondamental de la fonction exp (elle transforme les sommes en produit) et de démontrer que la fonction exp est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant (V.1). La fonction exp est une fonction usuelle, elle est disponible dans toutes les calculatrices scientifiques. Pour tout nombre réel x, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, $\exp(x)$ peut aussi être noté : $\exp x$.

Remarque *Le nombre* e*, défini par :* $\mathrm{e} = \exp 1$ *; est une constante mathématique fondamentale.*

Exemple *Vérifier à la calculatrice que :* $\exp 0 = 1$ *et* $\mathrm{e} = 2,7182818\cdots$.

Théorème V.1.1

(1) Pour tout nombre réel x : $\exp -x = \dfrac{1}{\exp x}$.

(2) Pour tous nombres réels a et b : $\exp(a+b) = \left(\exp a\right)\left(\exp b\right)$

Démonstration Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Considérons la fonction $f_a : x \mapsto \exp(a+x)\exp(-x)$. f_a est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f_a'(x) = \exp(a+x)\exp(-x) - \exp(a+x)\exp(-x) = 0$;
donc la fonction f_a est constante ; or : $f_a(0) = \exp a$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\exp(a+x)\exp(-x) = \exp a \tag{V.2}$$

(1) En particulier pour $a = 0$, on obtient : $\exp(x)\exp(-x) = 1$; donc pour tout réel x : $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp x}$.

(2) Pour $x = b$ dans (V.2), il vient : $\exp(a+b)\exp(-b) = \exp a$, en multipliant membre par $\exp b$, on en déduit l'identité désirée. □

Remarques

1. *Ce théorème signifie que* exp *transforme les sommes en produits.*

2. *Plus généralement, on démontre par récurrence que pour tous nombres réels* $a_1, \cdots, a_n$ *on a :* $\exp(a_1 + \cdots + a_n) = (\exp a_1) \times (\exp a_2) \times \cdots \times (\exp a_n)$.

3. *Soit* $x \in \mathbb{R}$*. On déduit de* ***(1)*** *que :* $\exp x \neq 0$*. On déduit de* ***(2)*** *que :* $\exp x = \left(\exp \dfrac{x}{2}\right)^2$ *; donc :* $\exp x \geqslant 0$.
On en déduit que pour tout réel x *:* $\exp x > 0$.

Corollaire V.1.2

La fonction exp est l'unique fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant :
$f' = f \qquad \text{et} \qquad f(0) = 1$.

Démonstration Soit f une fonction, solution de problème. Démontrons que : $f = \exp$.
Considérons la fonction g définie par : $g = \dfrac{f}{\exp}$. La fonction g, quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et dont le dénominateur est toujours non nul, est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est définie par :

$$g' = \frac{\exp' \times f - f' \times \exp}{\exp^2} = \frac{\exp \times f - f \times \exp}{\exp^2} = 0.$$

Par conséquent la fonction g est constante sur $\mathbb{R}$. De plus : $g(0) = \dfrac{f(0)}{\exp 0} = 1$; donc pour tout réel x : $g(x) = 1$. D'où il vient : $f = \exp$. □

V.1.2 Sens de variation

La fonction exp est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et est sa propre dérivée, on en déduit le théorème suivant.

Théorème V.1.3

La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Corollaire V.1.4

Pour tous nombres réels a et b, on a :

(1) $a < b$ équivaut à $e^a < e^b$;
(2) $a \leqslant b$ équivaut à $e^a \leqslant e^b$;
(3) $a = b$ équivaut à $e^a = e^b$;

Démonstration Soit a et b deux réels.

(1) D'après le théorème V.1.3, on a : $a < b \implies e^a < e^b$ et $b \leqslant a \implies e^b \leqslant e^a$.

La dernière implication a pour contraposée : $a < b \impliedby e^a < e^b$; on a donc : $a < b \iff e^a < e^b$.

(2) D'après **(1)** : $b < a \iff e^b < e^a$. Donc, par contraposée : $a \leqslant b \iff e^a \leqslant e^b$.

(3) On en déduit que : $a = b \iff \begin{cases} a \leqslant b \\ b \leqslant a \end{cases} \iff \begin{cases} e^a \leqslant e^b \\ e^b \leqslant e^a \end{cases} \iff e^a = e^b$.□

V.1.3 Autres propriétés algébriques de l'exponentielle

Nous savons que fonction exp transforme les sommes en produits. Dans ce paragraphe nous allons établir les implications algébriques de cette propriété.

Théorème V.1.5

Pour tous réels a et b, tout entier m, tout entier naturel non nul n et tout nombre rationnel r.

(1) $\exp(a-b) = \dfrac{\exp a}{\exp b}$

(2) $\exp(ma) = \exp^m a$

(3) $\sqrt[n]{\exp a} = \exp \dfrac{a}{n}$

(4) $\exp(ra) = \exp^r a$

Démonstration Soit a et b deux réels, m un entier, n un entier naturel non nul et r un nombre rationnel.

(1) $\exp(a-b) = \exp a \times \exp(-b) = \exp a \times \dfrac{1}{\exp b} = \dfrac{\exp a}{\exp b}$

(2) Si $m = 0$ ou $m = 1$, la propriété est immédiate.

Pour $m \geqslant 2$: $\exp(ma) = \exp(\underbrace{a + \cdots + a}_{m \text{ termes}}) = \underbrace{\exp a \times \cdots \times \exp a}_{m \text{ facteurs}} = \exp^m a$.

Pour $m \leqslant -1$: on a $-m \geqslant 1$ et donc : $\exp(ma) = \exp(-m(-a)) = \exp^{-m}(-a) = \left(\dfrac{1}{\exp a}\right)^{-m} = \exp^m a$.

(3) On a : $\left(\exp \dfrac{a}{n}\right)^n = \exp\left(n\dfrac{a}{n}\right) = \exp a$; donc : $\sqrt[n]{\exp a} = \exp \dfrac{a}{n}$

(4) Il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que : $r = \dfrac{p}{q}$.

Donc : $\exp(ra) = \exp\left(\dfrac{p}{q}a\right) = (\exp(pa))^{\frac{1}{q}} = ((\exp a)^p)^{\frac{1}{q}} = \exp^r a$ □

Remarque *Les propriétés **(1)** (pour $r = 1$), **(3)** (pour $r \in \mathbb{Z}$) et **(4)** (pour $\dfrac{1}{r} \in \mathbb{N}^*$) sont des cas particuliers de la propriété **(5)**.*

Convention

Étant donné un nombre réel a, on décide d'étendre par continuité la fonction $x \mapsto \exp^x a$, initialement définie sur $\mathbb{Q}$. Ainsi, pour tout réel x : $\exp^x a = \exp(xa)$.
En particulier, lorsque $a = 1$, pour tout réel x : $\exp x = e^x$.
Désormais, $\exp x$ sera de préférence noté : e^x.

V.1.4 Quelques limites

V.1.4.a Limites aux bornes

Théorème V.1.6

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$$

Démonstration La suite (u_n) de terme général : $u_n = e^n$; est la suite géométrique de raison e (exp est strictement croissante donc : $e^0 < e^1$; c'est-à-dire : $e > 1$) et de premier terme 1 ($1 > 0$) donc : $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Soit $A \in \mathbb{R}$. Il existe un entier naturel N tel que : $u_N > A$; donc pour tout $x > N$, on a : $e^x > e^N > A$.
Ce qui signifie, par définition, que : $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

Posons : $u = -x$. On a : $\lim_{x\to-\infty} -x = +\infty$ et $\lim_{u\to+\infty} \frac{1}{e^u} = 0$;
donc par composition : $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{-x}} = 0$; c'est-à-dire : $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$. □

V.1.4.b Nombre dérivé en 0

La fonction exp est dérivable en 0 et son nombre dérivé en 0 est e^0. On en déduit le théorème suivant.

Théorème V.1.7

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

V.1.4.c Croissance comparée de x et exp

Le théorème suivant signifie que e^x tend plus vite que x vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ et que e^x tend plus vite vers 0 que x vers $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$.

Théorème V.1.8

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} x e^x = 0.$$

Démonstration Introduisons la fonction $f : x \mapsto e^x - \frac{x^2}{2}$; f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto e^x - x$; f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $f'' : x \mapsto e^x - 1$.
La fonction exp est croissante sur $\mathbb{R}$, donc pour tout réel positif x, on a : $e^x \geqslant e^0$; c'est-à-dire : $e^x \geqslant 1$.
La fonction f'' est donc positive sur $[0 ; +\infty[$ on en déduit que la fonction f' est croissante sur $[0 ; +\infty[$.
Donc pour tout réel positif x : $f'(x) \geqslant f'(0)$; c'est-à-dire : $f'(x) \geqslant 1$.
La fonction f' est donc positive sur $[0 ; +\infty[$ on en déduit que la fonction f est croissante sur $[0 ; +\infty[$.
Donc pour tout réel strictement positif x : $f(x) \geqslant f(0)$; c'est-à-dire : $e^x - \frac{x^2}{2} \geqslant 1$; d'où : $e^x \geqslant \frac{x^2}{2} + 1 \geqslant \frac{x^2}{2}$; puis : $\frac{e^x}{x} \geqslant \frac{x}{2}$ (car $x > 0$).
On sait que : $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2} = +\infty$; donc par comparaison : $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

Posons $u = -x$. Il vient : $x e^x = -u e^{-u} = -\frac{u}{e^u}$.
On a : $\lim_{x\to-\infty} -x = +\infty$ et par quotient $\lim_{u\to+\infty} -\frac{u}{e^u} = 0$; donc par composition : $\lim_{x\to-\infty} x e^x = 0$. □

Exercice V.1.1. ***Étudier la limite en $+\infty$ de $x \mapsto \frac{e^x}{x+1}$.***

Solution *Pour tout réel $x > 0$:* $\frac{e^x}{x+1} = \frac{e^x}{x}\,\frac{x}{x+1} = \frac{e^x}{x} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$.

On a : $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ *et* $\lim_{u\to 0} \frac{1}{1+u} = 1$ *; donc :* $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} = 1$ *;*
de plus : $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ *; donc par produit :* $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x+1} = +\infty$. □

V.2 La fonction logarithme népérien

V.2.1 Introduction

La fonction exp est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$; de plus : $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$; donc exp est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]0 ; +\infty[$.

Définition V.2.1

La fonction *logarithme népérien*[1], notée ln, est la bijection réciproque de la fonction exp.

Sur la figure V.1 sont tracées les courbes $\mathscr{C}_{\exp}$ et $\mathscr{C}_{\ln}$ d'équations respectives : $y = e^x$ et $y = \ln x$; ainsi que la tangente

1. John Neper, baron de Merchiston, mathématicien écossais 1550-1617

D_J à $\mathscr{C}_{\exp}$ en J (cette droite passant par J(0;1) et ayant pour coefficient directeur $e^0 = 1$, a pour équation : $y = x + 1$) et la tangente D_I à $\mathscr{C}_{\ln}$ au point I(1;0).

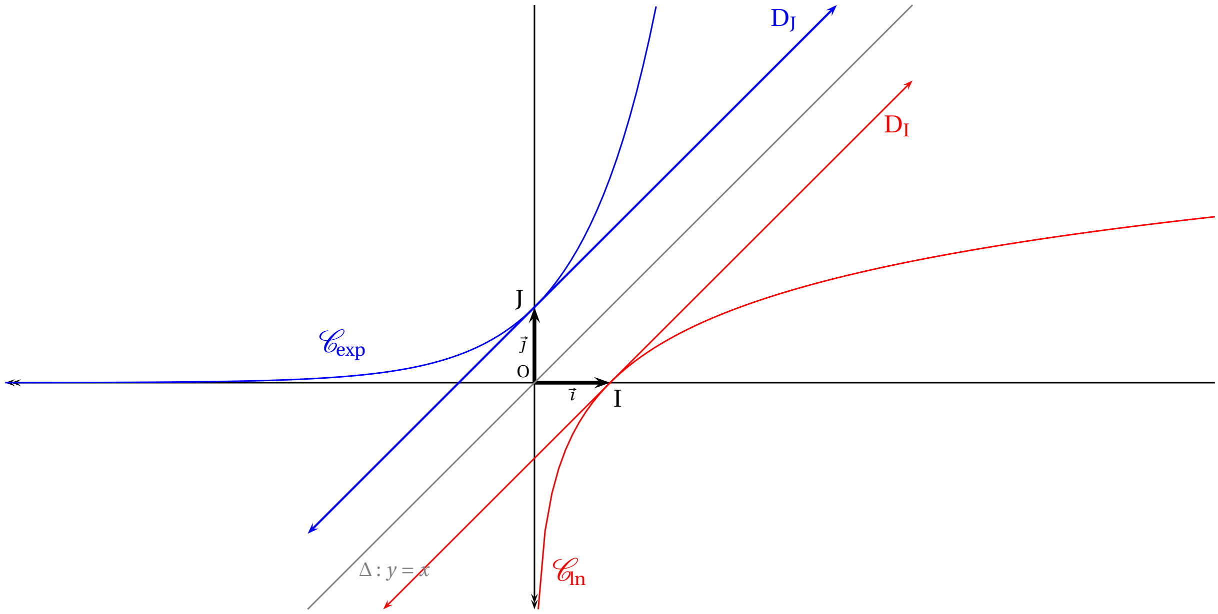


FIGURE V.1 – Courbes d'équations $y = e^x$ et $y = \ln x$

Remarque *La définition V.2.1 et l'analyse de la figure V.1 amènent les propriétés suivantes qui seront éventuellement confirmées par des théorèmes ultérieures.*

1. *La fonction* $\ln$ *est une bijection de* $]0;+\infty[$ *dans* $\mathbb{R}$.

2. *Pour tout* $x \in]0;+\infty[$ *et tout* $y \in \mathbb{R}$ *:* $\quad y = \ln x \iff x = e^y$.

En particulier : $e^{\ln x} = e^y = x$ *et* $\ln\left(e^y\right) = \ln x = y$.

3. *La fonction* $\ln$ *est continue et dérivable sur* $]0;+\infty[$ *;*

En effet, la fonction $\exp$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et sa dérivée ne s'annule pas sur* $\mathbb{R}$, *donc* $\mathscr{C}_{\exp}$ *présente en chacun de ses points une tangente sécante à* Ox *et à* Oy. *La réflexion d'axe* Δ *est isométrie, elle conserve donc le contact ; on en déduit qu'en chacun de ses points la courbe* $\mathscr{C}_{\ln}$ *présente une tangente sécante à* Oy *(et à* Ox*).*

4. *Pour tous réels* a *et* b *strictement positifs :* $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$.

En effet $\exp$ *transforme les sommes en produits donc* $\ln$ *transforme les produits en sommes.*

5. *Plus généralement pour tous réels* $x_1, \dots, x_n$ *strictement positifs :*

$$\ln(x_1 \times \cdots \times x_n) = \ln(x_1) + \cdots + \ln(x_n).$$

6. $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.

7. *La fonction* $\ln$ *est strictement croissante sur* $]0;+\infty[$ *;*

8. *Pour tous réels* a *et* b *strictement positifs :*

$$\begin{aligned} a = b &\iff \ln a = \ln b \\ a < b &\iff \ln a < \ln b \\ a \leqslant b &\iff \ln a \leqslant \ln b \end{aligned}$$

On déduit de même du théorème et de la convention énoncés au paragraphe V.1.3 le théorème suivant.

THÉORÈME V.2.1

Pour tous réels a et b strictement positifs et tout nombre rationnel r.

(1) $\quad \ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$.

(2) $\quad \ln(a^r) = r \ln a$.

Remarques

1. *En particulier, lorsque* $r = -1$ *:* $\ln \dfrac{1}{a} = -\ln a$.

2. *On déduit de* **(2)** *que :* $a^r = \exp(\ln(a^r)) = \mathrm{e}^{r\ln a}$

V.2.2 Dérivabilité

Le théorème suivant exprime que la fonction ln est dérivable en 1 et que son nombre dérivé en 1 et 1.

THÉORÈME V.2.2

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h} = 1.$$

Démonstration D'après le résultat obtenu dans l'exercice VIII.6.1., pour, $x = y$ et $x = -y$, on a pour tout réel, y : $\mathrm{e}^y \geqslant y+1$ et $\mathrm{e}^{-y} \geqslant -y+1$. On en déduit que pour $y \in \mathbb{R}$,

$$1-\frac{1}{\mathrm{e}^y} \leqslant y \leqslant \mathrm{e}^y - 1.$$

En posant, $x = \mathrm{e}^y$ (on a donc $y = \ln x$), on en déduit que pour tout nombre réel, x, strictement positif, $1-\frac{1}{x} \leqslant \ln x \leqslant x-1$, c'est-à-dire :

$$\frac{x-1}{x} \leqslant \ln x \leqslant x-1.$$

En divisant membre à membre par, $x-1$, dont le signe est déterminé par la position de x par rapport à 1, on en déduit que :

– si $x<1$ alors : $\frac{1}{x} \geqslant \frac{\ln x}{x-1} \geqslant 1$;
– si $x>1$ alors : $\frac{1}{x} \leqslant \frac{\ln x}{x-1} \leqslant 1$.

Par continuité de la fonction inverse, $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x} = 1$, donc par comparaison des limites : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{\ln x}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{\ln x}{x-1} = 1$; c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = 1$.

Posons : $h = x-1$. On a donc : $x = h+1$; $\frac{\ln x}{x-1} = \frac{\ln(h+1)}{h}$ et $\lim\limits_{h\to 0}(h+1) = 1$. Par composition des limites, on en déduit que : $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h} = 1$. □

Remarque *Ce théorème se lit sur la figure V.1, il exprime que la tangente à $\mathscr{C}_{\ln}$ en I, $\mathrm{D_I}$, a pour coefficient directeur 1.*

THÉORÈME V.2.3

La fonction ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Démonstration Soit, a, un nombre réel strictement positif. Déterminons le nombre dérivé de ln en a. Désignons, pour tout nombre réel x strictement positif et distinct de a, par θ_x le taux de variation de ln et a et x. On a : $\theta_x = \frac{\ln x - \ln a}{x-a} = \frac{\ln\frac{x}{a}}{a\left(\frac{x}{a}-1\right)}$.

Posons : $u = \frac{x}{a}$. On a : $\lim\limits_{x\to a}\frac{x}{a} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = 1$; donc par composition : $\lim\limits_{x\to a}\frac{\ln\frac{x}{a}}{\frac{x}{a}-1} = 1$. Puis par quotient par a : $\lim\limits_{x\to a}\theta_x = \frac{1}{a}$.

Ainsi la fonction est continue et dérivable en a et son nombre dérivé en a est 1. On en déduit le théorème. □

Remarques

1. *On pouvait aller plus vite en utilisant la dérivabilité de* ln*. En dérivant membre à membre l'identité,* $\mathrm{e}^{\ln x} = x$*, il vient :* $(\ln x)'\,\mathrm{e}^{\ln x} = 1$*. D'où l'on tire :* $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

2. *La dérivabilité de* ln *sur* $]0\,;+\infty[$ *établit la continuité de* ln *sur ce même intervalle.*

V.2.3 Dérivée de ln *u*

THÉORÈME V.2.4

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.

La fonction $\ln u$ est dérivable sur I et sa dérivée est : $\frac{u'}{u}$.

Exemple *La dérivée sur* $\mathbb{R}$ *de* $\mapsto \ln\left(x^2+1\right)$ *est* $x \mapsto \frac{2x}{x^2+1}$.

V.2.4 Logarithme népérien et calcul intégral

THÉORÈME V.2.5
Pour tout nombre réel strictement positif, x :

$$\ln x = \int_1^x \frac{\mathrm{d}\,t}{t}.$$

THÉORÈME V.2.6
Soit u une fonction continûment dérivable sur un intervalle I.
La fonction $\frac{u'}{u}$ a pour primitive sur I : $\ln|u|$.

V.3 Des exponentielles et des logarithmes

V.3.1 Notation a^b, pour a, b réels et $a > 0$

DÉFINITION V.3.1
Pour tout nombre réel $a > 0$ et tout nombre réel b, on note a^b le nombre $\mathrm{e}^{b\ln a}$

Remarques
1. *On en déduit que :* $\ln\left(a^b\right) = \ln\left(\mathrm{e}^{b\ln a}\right) = b\ln a$.
2. *Cette définition est en accord avec les précédentes définitions de* a^b *lorsque* $a > 0$.

Exemple *Vérifier à la calculatrice que :* $\pi^{\sqrt{2}} = \mathrm{e}^{\sqrt{2}\ln\pi}$.

THÉORÈME V.3.1
Pour tous nombres réels $a > 0$ et $a' > 0$ et tous nombres réels b et b' :
(1) $1^b = 1$;
(2) $a^b a^{b'} = a^{b+b'}$; $\frac{a^b}{a^{b'}} = a^{b-b'}$; $(a^b)^{b'} = a^{bb'}$;
(3) $(aa')^b = a^b a'^b$; $\frac{a^b}{a'^b} = \left(\frac{a}{a'}\right)^b$.

DémonstrationSoit a, a', b, b' quatre réels tels que : $a > 0$ et $a' > 0$; on a :
(1) On a : $1^b = \mathrm{e}^{b\ln 1} = \mathrm{e}^0 = 1$;
(2) On a : $a^b a^{b'} = \mathrm{e}^{b\ln a}\mathrm{e}^{b'\ln a} = \mathrm{e}^{(b+b')\ln a} = a^{b+b'}$.
On démontre de même les autres identités. □

V.3.2 Fonctions exponentielles de base a (avec $a > 0$)

V.3.2.a Définition

DÉFINITIONS V.3.2
(1) Une fonction exponentielle est une fonction continue f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^{+\star}$ qui vérifie pour tous réels x et x' :

$$f(x + x') = f(x) \times f(x'). \tag{V.3}$$

(2) Le nombre strictement positif, $f(1)$, est appelé *base* de l'exponentielle.

Exemple *La fonction* exp *est une exponentielle de base* e.

THÉORÈME V.3.2
Soit a un nombre réel (avec $a > 0$). Il existe une unique fonction exponentielle de base a.

Démonstration

Existence

Considérons la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_a(x) = \mathrm{e}^{x\ln a}.$$

La fonction exp est strictement positive, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f_a(x) > 0$. On a : $f_a(1) = \mathrm{e}^{\ln a} = a$;
de plus pour tous réels x et x' : $f_a(x+x') = \mathrm{e}^{(x+x')\ln a} = \mathrm{e}^{x\ln a}\mathrm{e}^{x'\ln a} = f_a(x)f_a(x')$. Donc f_a est une fonction exponentielle de base a.

Unicité

Soit f une fonction exponentielle de base a. Démontrons que $f = f_a$.
Pour $x = x' = 0$ dans V.3, on obtient : $f(0) = f^2(0)$; or : $f(0) \neq 0$ (car $f(0) > 0$) ; donc : $f(0) = 1$.
Pour $x = -x'$ dans V.3, on obtient : $f(x)f(-x) = 1$; donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$.
On en déduit comme dans le théorème V.1.5 que pour tout $r \in \mathbb{Q}$: $f(r) = f(r \times 1) = f^r(1) = a^r$.
Introduisons la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = f(x) - f_a(x)$.
g est la différence de fonctions continues sur $\mathbb{R}$, donc g est continue sur $\mathbb{R}$.
De plus, pour tout nombre rationnel r, on a : $g(r) = a^r - \mathrm{e}^{r\ln a} = a^r - a^r = 0$.
Soit x un nombre irrationnel et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ [2] une suite de nombres rationnels qui converge vers x. Par continuité de g : $\lim\limits_{n\to+\infty} g(u_n) = g(x)$; mais pour tout entier naturel n : $g(u_n) = 0$; donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} g(u_n) = 0$; d'où : $g(x) = 0$. On en déduit que g est nulle sur $\mathbb{R}$ puis que : $f = f_a$. □

Remarques

1. *La fonction exponentielle de base a est donc la fonction : $x \mapsto a^x$.*

2. *Les deux exponentielles les plus utilisées sont $x \mapsto \mathrm{e}^x$ et $x \mapsto 10^x$.*

V.3.2.b Sens de variation

L'exponentielle de base 1 est la fonction constante $x \mapsto 1$. On considérera désormais des exponentielles de base a avec $a \neq 1$. L'exponentielle de base a est la composée de la fonction linéaire $x \mapsto x\ln a$ par la fonction exp. On sait que la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc l'exponentielle de base a a le même sens de variation que la fonction linéaire $x \mapsto x\ln a$.

Pour $a > 1$ On a : $\ln a > \ln 1$; donc la fonction $x \mapsto x\ln a$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto a^x$ aussi. Posons : $u = x\ln a$; on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln a = +\infty$ et $\lim\limits_{u\to+\infty} \mathrm{e}^u = +\infty$; donc par composition : $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$.
On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} x\ln a = -\infty$ et $\lim\limits_{u\to-\infty} \mathrm{e}^u = 0$; donc par composition : $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$.

Pour $0 < a < 1$ On a : $\ln a < \ln 1$; donc la fonction $x \mapsto x\ln a$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto a^x$ aussi. Posons : $u = x\ln a$; on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln a = -\infty$ et $\lim\limits_{u\to-\infty} \mathrm{e}^u = 0$; donc par composition : $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$.
On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} x\ln a = +\infty$ et $\lim\limits_{u\to+\infty} \mathrm{e}^u = +\infty$; donc par composition : $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$.

On en déduit les tableaux de variations suivants.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
a^x	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	a	$\nearrow$	$+\infty$

TABLE V.1 – avec $a > 1$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
a^x	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	a	$\searrow$	0

TABLE V.2 – avec $0 < a < 1$

V.3.3 Fonctions logarithmes de base a (avec $a > 0$ et $a \neq 1$)

On sait que si $a > 0$ et $a \neq 1$, l'exponentielle de base a est strictement monotone et transforme $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^{+\star}$, on en déduit alors que l'exponentielle de base a est un bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$.

DÉFINITION V.3.3

Soit a un nombre réel (avec $a > 0$ et $a \neq 1$).
La fonction *logarithme de base a* est la bijection réciproque de la fonction exponentielle de base a.

Notations et vocabulaire

1. *La fonction logarithme de base a est notée* $\log_a$.

2. *La fonction* $\log_\mathrm{e}$ *est également notée* ln *ou parfois* Log.

3. *La fonction* $\log_{10}$, *appelée* logarithme décimal *est également notée* log.

Ainsi, pour tout entier relatif n : $\log 10^n = n$.

2. Il suffit de prendre la suite définie par : $u_n = [x \times 10^n] \times 10^{-n}$ où $x \mapsto [x]$ désigne la fonction partie entière.
En effet, pour tout entier naturel n : $[x \times 10^n] \leqslant x \times 10^n < [x \times 10^n] + 1$; d'où : $0 \leqslant x \times 10^n - [x \times 10^n] < 1$; puis par produit par 10^{-n} (qui est strictement positif) : $0 \leqslant x - u_n < 10^{-n}$. On sait que : $\lim\limits_{n\to+\infty} 10^{-n} = 0$; donc par comparaison : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x$.

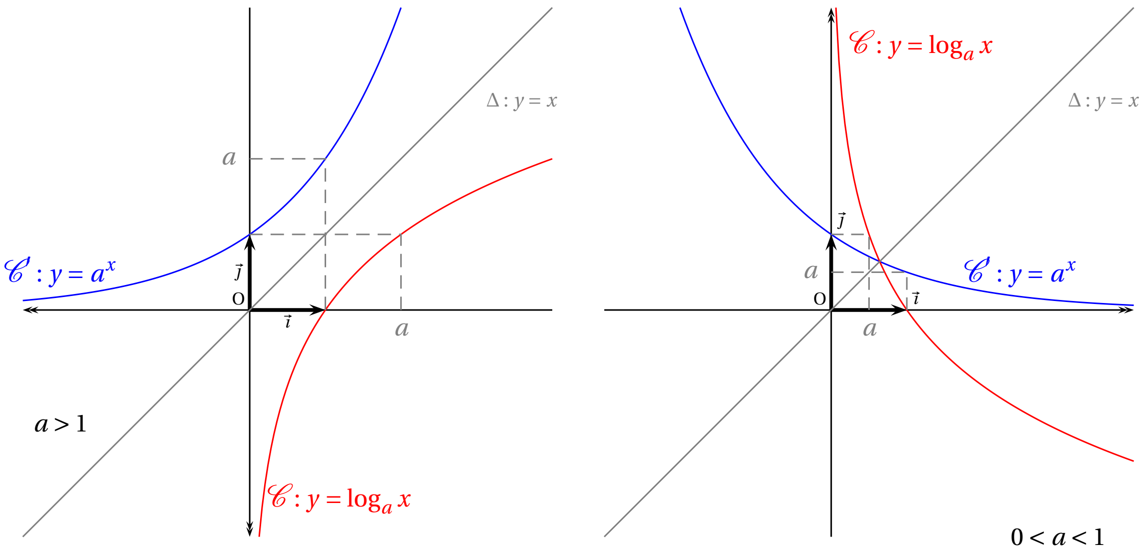


FIGURE V.2 – Courbes d'équations $y = a^x$ et $y = \log_a x$ avec $a = 2$ puis $a = \frac{1}{2}$.

C'est tout l'intérêt de cette fonction log très utilisée en physique. c'est-à-dire Si x a pour écriture scientifique $x = d \times 10^n$ où d est un nombre décimal compris entre 1 et 10 et $n \in \mathbb{Z}$, alors :
$\log x = \log(d \times 10^n) = \log d + \log 10^n = n + \log d$.
$1 \leqslant d < 10$ implique que $0 \leqslant \log d < 1$. Donc, n est la partie entière de $\log x$ et $\log d$ sa partie fractionnaire. Le nombre n est appelé caractéristique de $\log x$, $\log d$ est appelé *mantisse* de $\log x$.

Exemples

1. $\log 150 = 2,176\cdots$.
On a : $\log 150 = \log(10^2 \times 1,5) = 2 + \log(1,5) = 2,176\cdots$.
La caractéristique de $\log 150$ *est* 2 *et sa mantisse est* $0,176\cdots$.

2. *On aimerait savoir combien il y a de chiffres dans* 13^{128}.
On a : $\log\left(13^{128}\right) = 128 \log 13 = 142,584\cdots$ *; donc* 13^{128} *est constitué de* 143 *chiffres.*

Remarque *Pour tout* $x \in \mathbb{R}^{+\star}$ *et tout* $y \in \mathbb{R}$*, on a :* $\quad y = \log_a x \iff x = a^y$.

THÉORÈME V.3.3
Soit a un nombre réel (avec $a > 0$ et $a \neq 1$).
Pour tout réel x strictement positif : $\qquad \log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.

Démonstration Posons : $y = \log_a x$; on a donc : $x = a^y = \mathrm{e}^{y \ln a}$; d'où : $\ln x = y \ln a$; puis : $y = \dfrac{\ln x}{\ln a}$. □

Exemple *Calculer :* $\log_2 65536$ *;* $\log 1000000$ *;* $\log_3 729$ *et* $\log_7 343$.

V.4 Équations différentielles

V.4.1 Introduction

Considérons les fonctions $f : x \mapsto \mathrm{e}^{2x}$; $g : x \mapsto \sin \omega x$ avec $\omega \in \mathbb{R}^\star$ et $\mathrm{P} : x \mapsto 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24}$.

- Calculer la dérivée de f et démontrer que pour tout réel x, on a : $f'(x) - 2f(x) = 0$.
- Calculer la dérivée secondeg'' de g et démontrer que pour tout réel x, on a : $g''(x) + \omega^2 g(x) = 0$.
- Calculer la dérivée de P et démontrer que pour tout réel x, on a : $\mathrm{P}'(x) - \mathrm{P}(x) = -\dfrac{x^4}{24}$

On a sur $\mathbb{R}$: $f' - 2f = 0$. on dit que f est une solution de l'équation différentielle : $y' - 2y = 0$.
De même g est solution de l'équation différentielle : $y'' + 9y = 0$.
P est solution de l'équation différentielle : $y' - y = -\dfrac{x^4}{24}$.

Notations et vocabulaire

1. *Une* équation différentielle *est une relation entre une fonction inconnue et ses dérivées successives.*
La fonction inconnue est souvent notée y et ses dérivées successives y', y'', ...
Le plus souvent, la variable sera notée x ou t.
2. *L'*ordre *d'une équation différentielle est le plus grand ordre de dérivée intervenant dans cette équation. Par exemple : $5y'' - 4y' - y = 0$; est une équation différentielle d'ordre 2.*
3. *Une* solution sur un intervalle ouvert *I d'une équation différentielle est une fonction vérifiant l'équation sur l'intervalle. Par exemple,* exp *est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $5y'' - 4y' - y = 0$.*
4. Résoudre ou intégrer *une équation différentielle sur un intervalle ouvert I c'est déterminer l'ensemble des solutions sur I de cet intervalle.*
5. *Une* courbe intégrale *d'une équation différentielle est la courbe représentative d'une solution.*

V.4.2 Équations du type $y' - ay = 0$

Soit a un nombre réel. On se propose de résoudre, dans l'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, l'équation :

$$y' - ay = 0 \tag{V.4}$$

À toute fonction y dérivable sur $\mathbb{R}$, on associe la fonction z dérivable sur $\mathbb{R}$, définie par : $z(x) = y(x)\,\mathrm{e}^{-ax}$.
On a donc : $y(x) = z(x)\,\mathrm{e}^{ax}$ et $y'(x) = \left(z'(x) + az(x)\right)\mathrm{e}^{ax}$.
On en déduit que, pour tout nombre réel x : $(y' - ay)(x) = z'(x)\,\mathrm{e}^{ax}$.
Par conséquent y est solution de (V.4) si et seulement si z' est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire si et seulement si z est une fonction constante. On en déduit le théorème suivant.

THÉORÈME V.4.1
Soit a un nombre réel. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$y' - ay = 0$$

sont les fonctions de la forme,

$$x \longmapsto k\,\mathrm{e}^{ax}$$

où k est un nombre réel.

Exemple *Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y' - 2y = 0$; sont les fonctions de la forme : $x \longmapsto k\,\mathrm{e}^{2x}$ où k est un nombre réel. Les fonctions $x \longmapsto \mathrm{e}^{2x}$, $x \longmapsto -\mathrm{e}^{2x}$, $x \longmapsto 5\,\mathrm{e}^{2x}$ et $x \longmapsto 0$ sont donc des solutions sur $\mathbb{R}$.*

THÉORÈME V.4.2
Soit a un nombre réel et (x_0, y_0) un couple de nombres réels.
Il existe une et une seule solution f sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y' - ay = 0$; vérifiant : $f(x_0) = y_0$.

DémonstrationLes solutions de l'équation sont les fonctions $f_k : x \longmapsto k\,\mathrm{e}^{ax}$ avec $k \in \mathbb{R}$.
$f_k(x_0) = y_0 \iff k\,\mathrm{e}^{ax_0} = y_0 \iff k = y_0\,\mathrm{e}^{-ax_0}$.
La seule solution vérifiant la condition supplémentaire est donc : $x \longmapsto y_0\,\mathrm{e}^{a(x-x_0)}$. □

Exercice V.4.1. ***1. Résoudre sur $\mathbb{R}$: $y' = 3y$.***
2. Déterminer la solution dont la courbe intégrale passe par le point $A(-2\,;-4)$

Solution 1. *Les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions de la forme : $x \longmapsto k\,\mathrm{e}^{3x}$ avec $k \in \mathbb{R}$.*
2. *La solution dont la courbe intégrale passe par le point $A(-2\,;-4)$ est donc la fonction : $x \longmapsto -4\,\mathrm{e}^{3(x+2)}$.* □

Interprétation géométrique

Le théorème V.4.2 signifie que les courbes intégrales de l'équation forment une partition[3] du plan : par tout point $\mathrm{A}(x_0, y_0)$, il passe une courbe intégrale et une seule (cf. figure V.3). Les solutions de l'équation : $y' = y$; sont les fonctions $x \longmapsto k\,\mathrm{e}^{x}$ où $k \in \mathbb{R}$.

3. Une *partition* d'un ensemble E est une famille de sous ensembles non vides de E, deux à deux disjoints, dont l'union est E

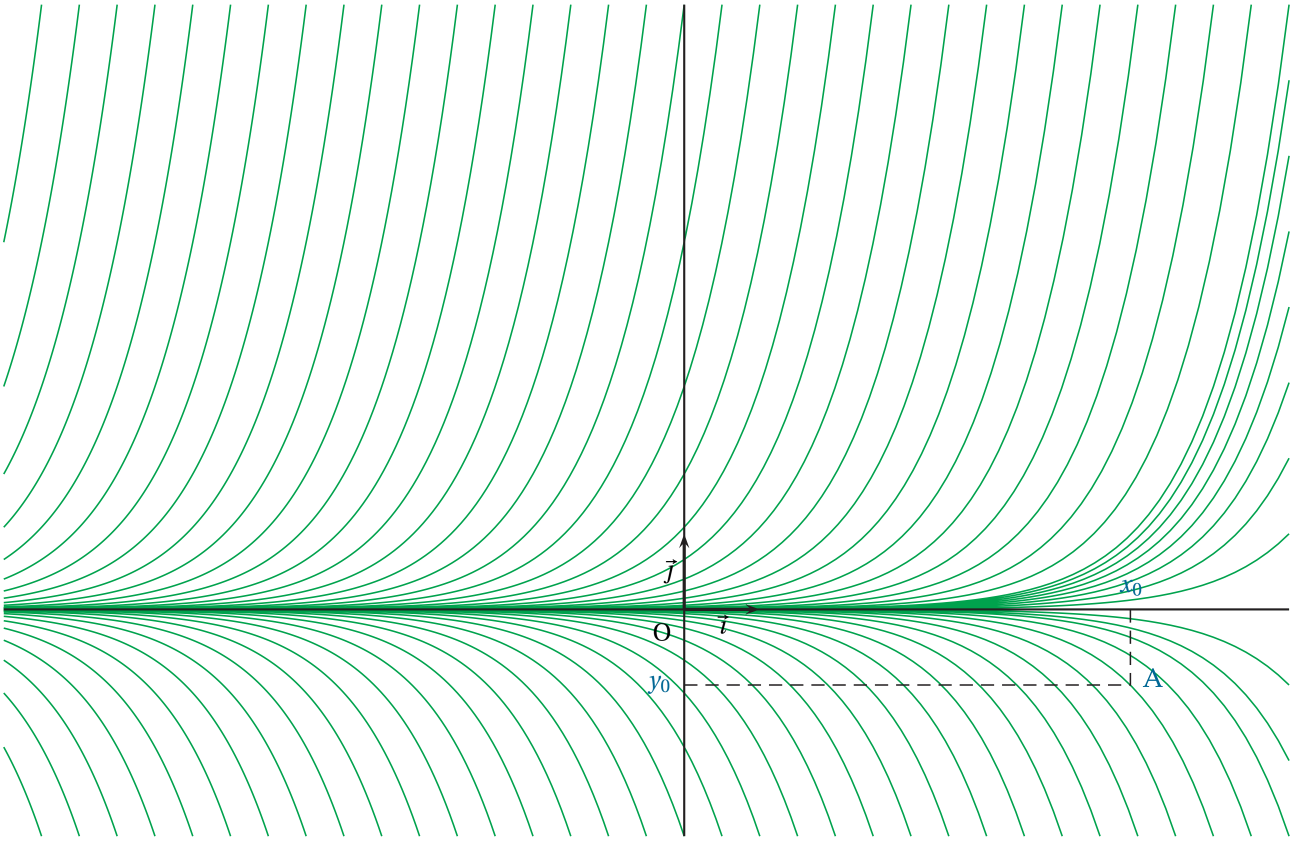


FIGURE V.3 – Courbes intégrales de l'équation : $y' = y$

V.4.3 Équations du type $y' - ay = b$

Soit a et b deux nombres réels. On se propose de résoudre, dans l'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, l'équation :

$$y' - ay = b \tag{V.5}$$

Remarques
1. *Cette équation sera équation sera appelée « équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre » alors que l'équation : $y - ax = 0$; sera appelée « équation sans second membre » associée à cette équation.*
2. *Lorque $a = 0$, les solutions de (V.5) sont les fonctions de la forme $x \mapsto bx + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.*
3. *Lorque $a \neq 0$, la fonction constante $y = -\dfrac{b}{a}$ est une solution particulière de (V.5)*

THÉORÈME V.4.3
Soit a et b deux nombres réels avec $a \neq 0$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$y' - ay = b$$

sont les fonctions de la forme,

$$x \mapsto k\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}$$

où k est un nombre réel.

Démonstration Posons $z = y + \dfrac{b}{a}$. On a donc : $y = z - \dfrac{b}{a}$ et $y' = z'$; d'où :

$$y' - ay = b \iff z' - a\left(z - \frac{b}{a}\right) = b \iff z' - az = 0$$

D'après le théoréme V.4.1, les solutions de la dernière équation sont de la forme $z : x \mapsto k\mathrm{e}^{ax}$ avec $k \in \mathbb{R}$, nous en déduisons que les solutions de (V.5) sont les fonctions de la forme $y : x \mapsto k\mathrm{e}^{ax} - \dfrac{b}{a}$ avec $k \in \mathbb{R}$ □

Remarque *On peut retenir ce théorème sous la forme suivante : La solution générale de l'équation avec second membre est la somme de la solution générale de l'équation sans second membre et d'une solution particulière.*
On retrouve cette formulation arithmétique avec les équation diophantiennes du type : $ax + by = c$.

Exemple *Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y' - 2y = 5$; sont les fonctions de la forme : $x \mapsto k\mathrm{e}^{2x} - \frac{5}{2}$ où k est un nombre réel. Les fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^{2x} - \frac{5}{2}$, $x \mapsto -\mathrm{e}^{2x} - \frac{5}{2}$, $x \mapsto 5\mathrm{e}^{2x} - \frac{5}{2}$ et $x \mapsto -\frac{5}{2}$ sont donc des solutions sur $\mathbb{R}$.*

THÉORÈME V.4.4
Soit a et b deux nombres réels avec $a \neq 0$ et (x_0, y_0) un couple de nombres réels.
Il existe une et une seule solution f sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y' - ay = b$; vérifiant : $f(x_0) = y_0$.

DémonstrationLes solutions de l'équation sont les fonctions $f_k : x \mapsto k\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}$ avec $k \in \mathbb{R}$.
$f_k(x_0) = y_0 \iff k\mathrm{e}^{ax_0} - \frac{b}{a} = y_0 \iff k = \left(y_0 + \frac{b}{a}\right)\mathrm{e}^{-ax_0}$.
La seule solution vérifiant la condition supplémentaire est donc : $x \mapsto \left(y_0 + \frac{b}{a}\right)\mathrm{e}^{a(x-x_0)} - \frac{b}{a}$. □

Remarque *Lorsque $a = 0$ l'unique courbe intégrale de $y' - ay = b$ passant par $\mathrm{A}(x_0 ; y_0)$ est la droite d'équation $y = b(x - x_0) + y_0$.*

Exercice V.4.2. ***1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y' = 3y - 7$.***
2. Détermininer la solution, f, vérifiant $f(2) = 5$.

Solution ***1.*** *On remarque que $y = \frac{7}{3}$ est une solution paticulière, les solutions de l'équation sont donc les fonctions : $x \mapsto k\mathrm{e}^{3x} + \frac{7}{3}$ avec $k \in \mathbb{R}$.*
2. *On a : $f(2) = 5 \iff k\mathrm{e}^{6} + \frac{7}{3} = 5 \iff k = \frac{8}{3}\mathrm{e}^{-6}$.*
On en déduit que f est la fonction : $x \mapsto \frac{8}{3}\mathrm{e}^{3(x-2)} + \frac{7}{3}$. □

V.4.3.a Temps caractéristique

En physique on utilise parfois le temps caractéristique lorsqu'on est confronté à la solution d'une équation de la forme $y' = ay + b$ avec $a < 0$ vérifiant $y(0) = 0$.
La solution générale de l'équation est : $t \mapsto k\mathrm{e}^{at} - \frac{b}{a}$ et la solution particulière vérifie $k = \frac{b}{a}$. On en déduit qu'a chaque instant : $y(t) = -\frac{b}{a}\left(1 - \mathrm{e}^{at}\right)$.

Le *temps caractéristique* (ou *constante de temps* en électricité) est l'abscisse du point d'intersection de l'asymptote et de la tangente à l'origine à la courbe représentative de la fonction y.

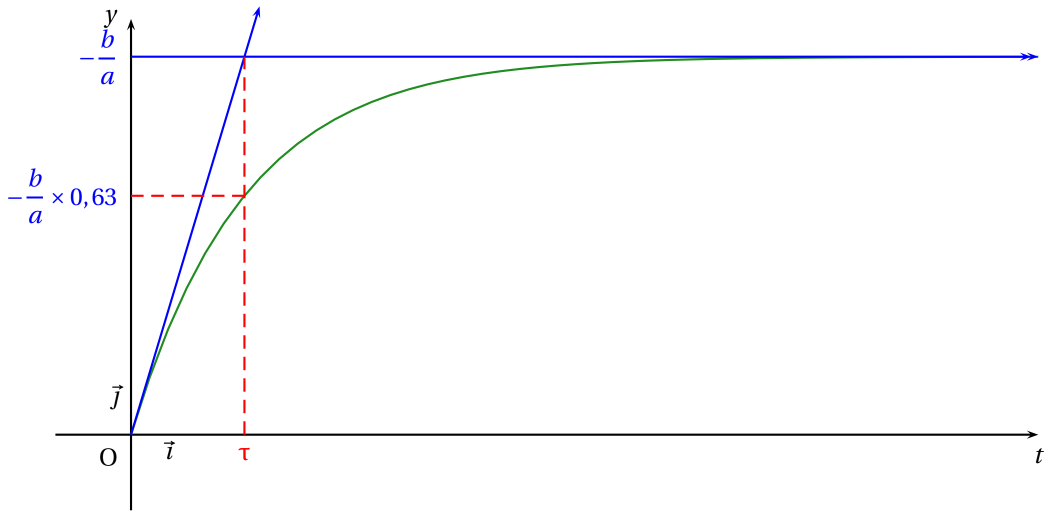


FIGURE V.4 – Courbe de y, asymptote et tangente à l'origine.

Remarques
1. *$y(0) = 0$ et $y'(0) = b$ donc l'équation réduite de la tangente, T, à la courbe représentative de y, à l'origine est $y = bx$.*

2. *On a : $a<0$; donc $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = -\dfrac{b}{a}$; la droite D d'équation, $y=-\dfrac{b}{a}$, est asymptote à la courbe en $+\infty$.*

3. *le temps caractéristique τ est l'abscisse du point d'intersection de T et D, donc la solution de l'équation $bx=-\dfrac{b}{a}$ soit $\tau=-\dfrac{1}{a}$.*

Interprétation

- On a : $y(\tau) = -\dfrac{b}{a}\left(1-\exp -1\right)$; or : $1-\exp -1 = 0{,}63\cdots$; ainsi à l'instant τ, la quantité y a atteint 63% de sa valeur limite.
- On a : $y(5\tau) = -\dfrac{b}{a}\left(1-\exp -5\right)$; or : $1-\exp -5 = 0{,}99\cdots$; ainsi à l'instant τ, la quantité y a atteint 99% de sa valeur limite.

V.4.4 Exercices

V.4.a. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes.

a. $y' = y$.

b. $y' = -y$.

c. $y' = -3y$.

d. $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)y' = \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)y$.

V.4.b. Déterminer la solution sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition initiale.

a. $y' = 2y$ et $y(0) = 1$.

b. $y' = -y$ et $y(3) = 1$.

c. $y' - 3y = 0$ et $y(4) = \mathrm{e}^2$.

V.4.c. 1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' = 3y'$.

2. Déterminer la solution vérifiant : $y(0) = 0$ et $y'(0) = 3$.

V.4.d. Une population de microbes se développe dans une culture suivant une loi où à chaque instant le taux d'accroissement est proportionnel à l'effectif. Sachant qu'au bout d'une heure il y a 10^4 microbes et que deux heures plus tard il y en 4×10^4, quelle est l'effectif initial de cette culture ?

Chapitre VI

Dérivabilité

VI.1 Fonctions dérivables

VI.1.1 Nombre dérivé, fonction dérivée

La notion de dérivée a été vue en classe de Première.

THÉORÈME VI.1.1 **NOMBRE DÉRIVÉ**

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un point de I. Les quatre conditions suivantes sont équivalentes elles expriment que le réel $f'(a)$ est le *nombre dérivé* de f en a.

1. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$;
2. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$;
3. Pour tout réel h tel que $a+h$ soit dans I :
   $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varphi(h)$ avec $\lim\limits_{h \to 0} \varphi(h) = 0$;
4. Pour tout élément x de I :
   $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\phi(x)$ avec $\lim\limits_{x \to a} \phi(x) = 0$.

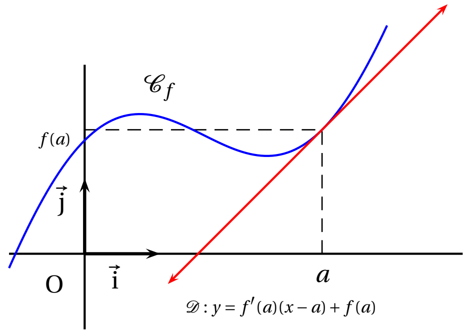
Vocabulaire et notations

- Lorsque f admet un nombre dérivé en a, on dit que f est dérivable en a ;
- Le nombre dérivé en a est noté $f'(a)$;
- Lorsque f est dérivable en tout point d'un intervalle I $\left(\mathrm{I} \subset \mathrm{D}_f\right)$, on dit que f est dérivable sur I.
- La fonction $x \mapsto f'(x)$ est appelée fonction dérivée de la fonction f.

Interprétation graphique

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un point de I. Dire que f est dérivable en a signifie que $\mathscr{C}_f$ admet au point $\mathrm{A}\left(a; f(a)\right)$ une tangente (ou une demi-tangente lorsque a est une borne de D_f) non parallèle à l'axe des ordonnées. Cette tangente à pour équation :

$$\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$



Exemple *La fonction $f : x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto 2x$. En particulier, f est dérivable en 3, la courbe $\mathscr{C}_f$ admet donc au point d'abscisse 3 une tangente $\mathscr{D}$. De plus : $f(3) = 9$ et $f'(3) = 6$; $\mathscr{D}$ a donc pour équation : $y = 6(x-3) + 9$; c'est-à-dire : $y = 6x - 9$*

Remarque *Lorsque : $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h<0}} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = l_1$ et $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = l_2$; où l_1 et l_2 sont deux réels distincts, la fonction f n'est pas dérivable en a, mais l_1 est le nombre dérivé à gauche en a et l_2 est le nombre dérivé à droite en a ; la courbe $\mathscr{C}_f$ présente alors au point d'abscisse a une demi-tangente à droite et une demi-tangente à gauche.*

VI.1.2 Dérivabilité des fonctions usuelles

- Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est dérivable sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition.
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$. (Elle n'est pas dérivable en 0)
- Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
- La fonction tangente est dérivable sur tout intervalle où elle est définie.

VI.1.3 Principaux résultats

f	f'	Ensemble de dérivabilité
$x \mapsto k$ $(k \in \mathbb{R})$	$x \mapsto 0$	$]-\infty, +\infty[$
$x \mapsto x$	$x \mapsto 1$	$]-\infty, +\infty[$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbb{Z}^\star)$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}^\star$ si $n<0$; $\mathbb{R}$ si $n>0$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto \cos x$	$]-\infty;+\infty[$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto -\sin x$	$]-\infty;+\infty[$
$x \mapsto \tan x$	$x \mapsto 1+\tan^2 x$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \ln x$	$x \mapsto \frac{1}{x}$	$]0;+\infty[$

TABLE VI.1 – Dérivées des fonctions élémentaires

f	f'
$u+v$	$u'+v'$
ku	ku'
uv	$u'v+uv'$
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$
$u^n (n \in \mathbb{Z}^\star)$	$nu'u^{n-1}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
e^u	$u'e^u$
$x \mapsto u(ax+b)$	$x \mapsto au'(ax+b)$

TABLE VI.2 – Dérivées et opérations sur les fonctions

VI.2 Dérivation d'une fonction composée

VI.2.1 Théorème de dérivation d'une fonction composée

THÉORÈME VI.2.1

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et f une fonction dérivable sur un intervalle J contenant $f(\mathrm{I})$. La fonction $f \circ u$ est dérivable sur I et on a : $(f \circ u)' = u' \times (f' \circ u)$.

Cette démonstration est hors programme, elle n'est donnée ici qu'à titre indicatif.

Démonstration Soit a un élément de I. Démontrons que $f \circ u$ est dérivable en a et que le nombre dérivé de $f \circ u$ en a est : $u'(a) \times f'(u(a))$.

- u est dérivable en a, donc pour tout réel h tel que $a+h$ appartienne à I, on a :
  $u(a+h) = u(a) + u'(a)h + h\varphi(h)$, avec $\lim\limits_{h\to 0} \varphi(h) = 0$.
- f est dérivable en $u(a)$, donc pour tout réel t tel que $u(a)+t$ appartienne à J, on a :
  $f(u(a)+t) = f(u(a)) + f'(u(a))t + t\phi(t)$, avec $\lim\limits_{t\to 0} \phi(t) = 0$.
- En particulier, lorsque $a+h \in \mathrm{I}$, pour $t = u'(a)h + h\varphi(h)$; on obtient :
  $f(u(a+h)) = f(u(a)) + f'(u(a))\left[u'(a)h + h\varphi(h)\right] + \left[u'(a)h + h\varphi(h)\right]\phi\left(u'(a)h + h\varphi(h)\right)$;
  c'est-à-dire :
  $f(u(a+h)) = f(u(a)) + u'(a)f'(u(a))h + h\underbrace{\left[f'(u(a))\varphi(h) + \left[u'(a)+\varphi(h)\right]\phi\left(u'(a)h + h\varphi(h)\right)\right]}_{\varepsilon(h)}$.
  Posons : $\varepsilon(h) = f'(u(a))\varphi(h) + \left[u'(a)+\varphi(h)\right]\phi\left(u'(a)h + h\varphi(h)\right)$.
- Pour tout réel h tel que $a+h$ appartienne à I, on a : $f(u(a+h)) = f(u(a)) + u'(a)f'(u(a))h + h\varepsilon(h)$, avec $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$. Cette dernière égalité signifie que $f \circ u$ est dérivable en a et que le nombre dérivé de $f \circ u$ en a est : $u'(a) \times f'(u(a))$;

□

Exemple *Étudier la dérivabilité de la fonction* $g : x \mapsto \cos\left(\frac{1}{1-x}\right)$.

On considère les fonctions $u : x \mapsto \frac{1}{1-x}$ *et* $f : x \mapsto \cos x$ *; on a :* $g = f \circ u$.
La fonction u est dérivable sur $]-\infty;1[$ *et* $u(]-\infty;1]) =]0;+\infty]$ *; la fonction* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *qui contient* $]0;+\infty[$.
Donc, g est dérivable sur $]-\infty;1[$. *On démontre de même que* f *est dérivable sur* $]1;+\infty[$.
Pour tout x élément de $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, *on a donc :* $g'(x) = u'(x) \times f'[u(x)] = -\frac{1}{(1-x)^2}\sin\left(\frac{1}{1-x}\right)$.

Remarque *Soit g une fonction dont l'ensemble de définition est une réunion d'intervalles tous non réduits à un point. Si g est la composée de deux fonctions dérivables sur leur ensemble de définition, alors g est dérivable sur son ensemble de définition.*

VI.2.2 Dérivée de la fonction $\sqrt{u}$

Théorème VI.2.2

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.

La fonction $g : x \mapsto \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I et sa dérivé est la fonction $g' : x \mapsto \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.

Démonstration La fonction u est dérivable sur I et $u(\mathrm{I}) \subset]0;+\infty]$ car u est strictement positive sur I. De plus, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. D'après le théorème de dérivation d'une fonction composée g est dérivable sur I et sa dérivée est la fonction $x \mapsto u'(x)\dfrac{1}{2\sqrt{u(x)}}$. □

Exemple **Exercice VI.2.1.** ***Déterminer la dérivée de la fonction $g : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$.***

Considérons la fonction $u : x \mapsto x^2+1$; on a : $g = \sqrt{u}$. La fonction u est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$; donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, on a : $g'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$. On en déduit que g' est la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

VI.2.3 Dérivée de la fonction u^n ($n \in \mathbb{Z}$)

1er cas $n > 1$

Théorème VI.2.3

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et n un entier naturel non nul.
La fonction $g : x \mapsto u^n(x)$ est dérivable sur I et sa dérivé est la fonction :
$g' : x \mapsto n \times u'(x) \times u^n(x)$.

Démonstration La fonction u est dérivable sur I. De plus, la fonction $x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto nx^{n-1}$. D'après le théorème de dérivation d'une fonction composée g est dérivable sur I et sa dérivée est la fonction $x \mapsto u'(x) \times n \times u^n(x)$. □

Exemple **Exercice VI.2.2.** ***Déterminer la dérivée de la fonction $f : x \mapsto \sin^6 x$***

La fonction sin *est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction* cos, *donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto 6\cos x \sin^5 x$.*

2e cas $n < 0$

Théorème VI.2.4

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I, ne s'annulant pas sur I, et n un entier ($n < 0$). La fonction $g : x \mapsto u^n(x)$ est dérivable sur I et sa dérivée est la fonction
$g' : x \mapsto n \times u'(x) \times u^n(x)$.

Il suffit d'appliquer le théorème précédent à la fonction $v = \dfrac{1}{u}$.

Exemple **Exercice VI.2.3.** ***Déterminer la dérivée de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x^2+1)^6}$***

La fonction $x \mapsto x^2+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto 2x$, donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto -6\dfrac{2x}{(x^2+1)^7}$.

Remarque *Comme précédemment, les règles de calculs sur les puissances d'exposants entiers s'étendent aux exposants rationnels. Nous admettons momentanément le théorème suivant.*

THÉORÈME VI.2.5
Soit r un nombre rationnel non nul, u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.

1. La fonction $x \mapsto x^r$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto rx^{r-1}$.
2. La fonction u^r est dérivable sur I et sa dérivée est la fonction $ru'u^{r-1}$.

La seconde partie se déduit de la première à l'aide du théorème de dérivation des fonctions composées.

Exemple **Exercice VI.2.4.** ***Déterminer la dérivée de la fonction $f : x \mapsto \left(2x^2+1\right)^3 \sqrt{2x^2+1}$.***

On a $f = u^{\frac{7}{2}}$, où u est la fonction $x \mapsto 2x^2+1$; la fonction u est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est la fonction $u' : x \mapsto 4x$; la fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction f' définie par :
$f'(x) = \frac{7}{2} \times 4x\left(2x^2+1\right)^{\frac{5}{2}} = 14x\left(2x^2+1\right)^2 \sqrt{2x^2+1}$.

VI.3 Dérivation et études de fonctions

VI.3.1 Sens de variation

THÉORÈME VI.3.1
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
- Si $f' > 0$ sur I (sauf peut-être en un nombre fini de points), alors f est strictement croissante sur I ;
- si $f' < 0$ sur I (sauf peut-être en un nombre fini de points), alors f est strictement décroissante sur I ;
- si f' est nulle sur I, alors f est constante sur I.

Remarque *De même si $f' \geqslant 0$ (resp. $f' \leqslant 0$) sur I, alors f est croissante (resp. décroissante) sur I.*

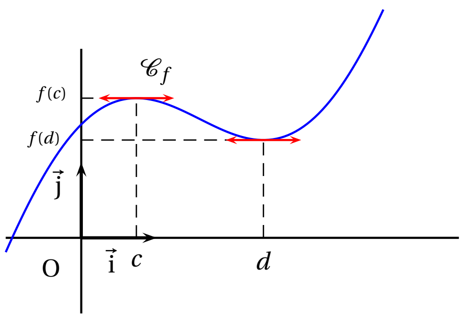
Exemple *La fonction $f : x \mapsto x^2$ est dérivable sur $[0;+\infty[$ et sa dérivée est strictement positive sur $]0;+\infty]$; donc f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.*

Remarque *La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ a une dérivée strictement négative sur son ensemble de définition et pourtant la fonction f n'est pas décroissante. L'ensemble de définition de f n'est pas un intervalle.*

VI.3.2 Extremum local

D'après la figure ci-contre :
- $f(c)$ est maximum local de f ;
- $f(d)$ est minimum local de f.

On dit également que f admet un maximum en c et un minimum en d.



THÉORÈME VI.3.2
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle *ouvert* I. f admet un extremum local en a si et seulement si f' s'annule et change de signe en a.

Ce théorème est connu depuis la classe de Première.

VI.4 Dérivées successives d'une fonction

DÉFINITIONS VI.4.1 DÉRIVÉE n-IÈME D'UNE FONCTION

Soit f une fonction et I un intervalle.
(1) Si f est dérivable sur I, sa dérivée f' est appelée dérivée première de f ; on la note aussi $f^{(1)}$.
(2) Si f' est dérivable sur I, sa dérivée f'' est appelée dérivée seconde de f ; on la note aussi $f^{(2)}$.
(3) De proche en proche, la fonction dérivée n-ième de f sur I, si elle existe, est la dérivée de la fonction dérivée $(n+1)$-ième de f sur I ; on la note $f^{(n)}$.

$f^{(n)}$ est aussi appelée dérivée d'ordre n de la fonction f. On utilise également, notamment en sciences physiques, la notation de Leibniz : f', f'', ..., $f^{(n)}$; sont notées respectivement $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$, ..., $\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$.

Exemples

1. **Exercice VI.4.1.** ***Calculer les dérivées successives de la fonction*** $f : x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 3x + 4$.

On a : $f'(x) = x^2 - 4x - 3$; $f''(x) = 2x - 4$; $f^{(3)}(x) = 2$; $f^{(4)}(x) = 0$.
Donc, pour tout nombre entier n tel que $n \geqslant 4$, on a : $f^{(n)}(x) = 0$.

2. **Exercice VI.4.2.** ***Calculer la dérivée n-ième de la fonction*** $g : x \mapsto \sin x$.

On a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\ g''(x) &= \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2 \times \frac{\pi}{2}\right) \\ g^{(3)}(x) &= \cos\left(x + 2 \times \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 3 \times \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

On peut conjecturer que : $\forall n \in \mathbb{N}^\star, g^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.
Démontrons cette égalité par récurrence.

1. *L'égalité est vraie pour $n = 1$.*
2. *Supposons l'égalité vraie pour un entier naturel non nul k, c'est-à-dire :*
   $g^{(k)}(x) = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)$;
   on en déduit que : $g^{(k+1)}(x) = \cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + (k+1)\frac{\pi}{2}\right)$;
   donc, l'égalité est vraie pour $k + 1$.

Elle est donc vraie pour tout entier naturel non nul.

VI.5 Exercices résolus

Exercice VI.5.1. ***Démontrer que la fonction*** $f : x \mapsto x + \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}$ ***réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et déterminer sa bijection réciproque.***

Solution *Pour tout réel x, $x^2 + 1 > 0$, donc l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.*
Soit y un nombre réel, démontrons que y a un et un seul antécédent x par f dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = x + \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1} \\ &\Leftrightarrow 2(y - x) = \sqrt{x^2+1} \\ &\Leftrightarrow (2(y-x))^2 = x^2 + 1 \text{ et } 2(y-x) \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow 3x^2 - 8yx + 4y^2 - 1 = 0 \text{ et } x - y \leqslant 0 \end{aligned}$$

On reconnaît une équation du second degré d'inconnue x dont le discriminant est :
$\Delta = (-8y)^2 - 4 \times 3(4y^2 - 1) = 16y^2 + 12$.
$\Delta > 0$ *donc l'équation a deux solutions :* $x_1 = \frac{8y - \sqrt{16y^2+12}}{6}$ *et* $x_2 = \frac{8y + \sqrt{16y^2+12}}{6}$;
c'est-à-dire : $x_1 = \frac{4y - \sqrt{4y^2+3}}{3}$ *et* $x_2 = \frac{4y + \sqrt{4y^2+3}}{3}$.
D'où il vient : $x_1 - y = \frac{y - \sqrt{4y^2+3}}{3}$ *et* $x_2 - y = \frac{y + \sqrt{4y^2+3}}{3}$.

Or : $4y^2+3>4y^2$ *; donc :* $\sqrt{4y^2+3}>|2y|$ *;*
D'où : $x_1-y<\dfrac{y-2|y|}{3}\leqslant 0$ *et* $x_2-y>\dfrac{y+2|y|}{3}\geqslant 0$.
x_1 *est la seule solution vérifiant la contrainte* $x-y\leqslant 0$ *,* x_1 *est donc l'unique antécédent de* y *dans* $\mathbb{R}$ *et on a :* $y=f(x)\Leftrightarrow x=\dfrac{4y-\sqrt{4y^2+3}}{3}$.
Par conséquent, la fonction f *réalise une bijection de* $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$ *et sa bijection réciproque est la fonction* $f^{-1}:x\mapsto\dfrac{4x-\sqrt{4x^2+3}}{3}$. □

Exercice VI.5.2. ***On se propose de déterminer la dérivée de la fonction*** $f:x\mapsto\sqrt{\cos x-1+\dfrac{x^2}{2}}$.

1. a. Étudier le signe de la fonction $u:x\mapsto\cos x-1+\dfrac{x^2}{2}$ ***(on pourra utiliser*** u''***).***

b. En déduire l'ensemble de définition de la fonction f.

2. Étudier la dérivabilité de f ***en 0 (on pourra poser :*** $t=\dfrac{x}{2}$***).***

3. Déterminer la dérivée de la fonction f.

Solution

1. a. *La fonction* u *est la somme de la fonction* cos *et d'une fonction polynôme, elle est donc deux fois dérivable sur* $\mathbb{R}$. *Sa dérivée première est la fonction* $u':x\mapsto x-\sin x$ *; et sa dérivée seconde est la fonction* $u'':x\mapsto 1-\cos x$. *La fonction* u'' *étant positive on en déduit que la fonction* u' *est strictement*[1] *croissante sur* $\mathbb{R}$. *De plus* $u'(0)=0$ *donc* u' *est strictement positive sur* $]0;+\infty[$ *et strictement négative sur* $]-\infty;0[$ *et par conséquent* u *est strictement croissante sur* $[0;+\infty[$ *et strictement décroissante sur* $]-\infty;0]$ *or* $u(0)=0$ *donc la fonction est strictement positive sur* $\mathbb{R}^\star$ *et s'annule en 0.*

On a $f=\sqrt{u}$. *La fonction* u *est dérivable sur* $\mathbb{R}$, *et est strictement positive sur* $\mathbb{R}^\star$, f *est donc dérivable sur* $\mathbb{R}^\star$ *et sa dérivée sur* $\mathbb{R}^\star$ *est* $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$, *pour savoir si elle dérivable en 0, on doit calculer la limite en 0 de la fonction* θ *définie par :* $\theta(x)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{f(x)}{x}$.
Posons : $t=\dfrac{x}{2}$. *Pour tout réel non nul* x, *on a :*
$u(x)=\cos 2t-1+\dfrac{(2t)^2}{2}=1-2\sin^2 t-1+2t^2=2t^2\left(1-\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^2\right)$.

Donc pour tout réel non nul x *:* $\theta(x)=\dfrac{\sqrt{u(x)}}{x}=\dfrac{\sqrt{2t^2\left(1-\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\right)}}{2t}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{|t|}{t}\sqrt{1-\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^2}$.

Donc : $\theta(x)=\begin{cases}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^2} & \text{si } t<0\\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^2} & \text{si } t>0\end{cases}$

On sait que : $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1$ *; donc par composition par la fonction* $x\mapsto\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-x^2}$ *:*
$\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^2}\right)=0$ *;*

on a de même : $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t<0}}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^2}\right)=0$.

Pour $x>0$, *on a :* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{x}{2}=0$ *avec* $\dfrac{x}{2}>0$ *et* $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^2}\right)=0$ *; Donc par composition :* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\theta(x)=0$ *; de même :* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\theta(x)=0$. *Donc la fonction* f *est dérivable en 0 et* $f'(0)=0$.
La fonction f *est donc dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et sa dérivée est la fonction* f' *définie par :*
$f'(x)=\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}=\dfrac{x-\sin x}{2\sqrt{\cos x-1+\frac{x^2}{2}}}$ *lorsque* $x\neq 0$ *et* $f'(0)=0$. □

1. on peut admettre ici cette justification peu rigoureuse, un argumentation correcte serait la suivante. Soit a et b deux réels tels que $a<b$. La fonction u'' est dérivable et strictement positive (sauf en nombre fini de points) sur $[a;b]$, u' est donc strictement croissante sur $[a;b]$; d'où : $u'(a)<u'(b)$; cette inégalité étant vérifiée pour tous réels a et b tels que $a<b$, la fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice VI.5.3. ***On se propose d'étudier la fonction $f : x \mapsto \dfrac{|x-1|\sqrt{3-x}}{\sqrt{4-x}}$.***

1. Déterminer l'ensemble de définition, D_f, de f.
2. Étudier la limite de f en $-\infty$
3. Étudier la dérivabilité de f en 1.
4. Étudier la dérivabilité de f en 3.
5. On considère la fonction u définie sur $]-\infty;3[$ par $u(x)=\sqrt{\dfrac{3-x}{4-x}}$;
calculer $u'(x)$.
6. Déterminer la dérivée de f, étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
7. a. Étudier la limite en $-\infty$ de $x \mapsto f(x)+x-1$ (on pourra poser $t=x-1$).

b. En déduire que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=-x+\dfrac{1}{2}$ est asymptote à la courbe représentative, $\mathscr{C}_f$, de f.
8. Représenter graphiquement la fonction f.

Solution

1. *Pour tout nombre réel x, f est définie en x si et seulement si $3-x \geqslant 0$ et $4-x>0$, donc $D_f =]-\infty;3]$*

2. *Pour tout $x<0$, on a : $f(x)=(1-x)\sqrt{\dfrac{1-\frac{3}{x}}{1-\frac{4}{x}}}$.*

De plus : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4}{x}=0$;
donc par différences, quotient puis composition par la fonction racine carrée :
$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\dfrac{1-\frac{3}{x}}{1-\frac{4}{x}}}=1$;
or : $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-x)=+\infty$; donc par produit : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$.

3. *On a : $f(1)=0$; donc pour étudier la dérivabilité de f en 1, il faut étudier la limite de $\dfrac{f(1+h)}{h}$ lorsque h tend vers 0.*
Pour $h\leqslant 2$ et $h\neq 0$, on a : $\dfrac{f(1+h)}{h}=\dfrac{|h|}{h}\times\dfrac{\sqrt{2-h}}{\sqrt{3-h}}$,
avec : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{2-h}}{\sqrt{3-h}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$; $\dfrac{|h|}{h}=-1$ lorsque h<0 et $\dfrac{|h|}{h}=1$ lorsque h>0.
Donc par produit : $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}}\dfrac{f(1+h)}{h}=-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ et $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\dfrac{f(1+h)}{h}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.
Donc f n'est pas dérivable en 1, mais la courbe $\mathscr{C}_f$ présente au point d'abscisse 1 une demi-tangente à droite de coefficient directeur $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ et une demi-tangente à gauche de coefficient directeur $-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

4. *La fonction f n'est pas définie à droite de 3 et $f(3)=0$, donc pour étudier la dérivabilité de f en 3, il faut étudier la limite de $\dfrac{f(3+h)}{h}$ lorsque h tend vers 0 par valeurs inférieures. Pour $h<0$, on a : $\dfrac{f(3+h)}{h}=\dfrac{\sqrt{-h}}{h}\times\dfrac{|2+h|}{\sqrt{1-h}}=-\dfrac{1}{\sqrt{-h}}\times\dfrac{|2+h|}{\sqrt{1-h}}$. On a : $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}}-\dfrac{1}{\sqrt{-h}}=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}}\dfrac{|2+h|}{\sqrt{1-h}}=2$; donc par produit : $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}}\dfrac{f(3+h)}{h}=-\infty$.*
Donc f n'est pas dérivable en 3, mais la courbe $\mathscr{C}_f$ présente au point d'abscisse 3 une demi-tangente verticale (vers le haut).

5. *La fonction $v : x\mapsto\dfrac{3-x}{4-x}$ est une fonction homographique, elle est donc dérivable sur son ensemble de définition, $\setminus\{4\}$, de plus pour $x<3$, $3-x>0$ et $4-x>0$ donc v est strictement positive sur $]-\infty;3[$ par $u=\sqrt{v}$ est dérivable sur $]-\infty;3[$ et sa dérivée est $u'=\dfrac{v'}{2\sqrt{v}}$. La dérivée de v est la fonction $v' : x\mapsto -\dfrac{1}{(4-x)^2}$, donc la dérivée de u est la fonction est la fonction u' définie sur $]-\infty;3[$ par : $u'(x)=\dfrac{-1}{2(4-x)^2\sqrt{\frac{3-x}{4-x}}}$.*

C'est-à-dire : $\boxed{u'(x)=\dfrac{-1}{2(4-x)\sqrt{(3-x)(4-x}}}$.

6. *Sur $]-\infty;1[\cup]1;3[$ f est le produit de deux fonctions dérivables donc f est dérivable.*
pour $x\in]1;3[$: $f(x)=(x-1)\,u(x)$; donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= u(x)+(x-1)\,u'(x)\\ &= \sqrt{\frac{3-x}{4-x}}-\frac{x-1}{2(4-x)\sqrt{(3-x)(4-x)}}\\ &= \frac{(3-x)\,(4-x)-(x-1)}{2\,(4-x)\,\sqrt{(3-x)\,(4-x)}}\\ &= \frac{2x^2-15x+25}{2\,(4-x)\,\sqrt{(3-x)\,(4-x)}} \end{aligned}$$

Dans cette fraction le dénominateur (produit de quantité positives) est positif, donc $f'(x)$ est du signe de $2x^2-15x+25$. Le discriminant est $\Delta=15^2-4\times 2\times 25=25$, donc le trinôme admet deux racines : $x_1=\frac{15-5}{4}=\frac{5}{2}$ et $x_1=\frac{15+5}{4}=5$. Le trinôme est du signe de 2 à l'extérieur des racines et du signe de -2 à l'intérieur, donc f' est strictement positive sur $]1;\frac{5}{2}[$ et strictement négative sur $]\frac{5}{2};3[$; donc f est strictement croissante sur $[1;\frac{5}{2}]$ et strictement décroissante sur $[\frac{5}{2};3]$.
Pour $x\in]-\infty;1[$: $f(x)=(1-x)\,u(x)$; donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -u(x)+(1-x)\,u'(x)\\ &= -\sqrt{\frac{3-x}{4-x}}+\frac{x-1}{2\,(4-x)\,\sqrt{(3-x)\,(4-x)}}\\ &= \frac{-(3-x)\,(4-x)+(x-1)}{2\,(4-x)\,\sqrt{(3-x)\,(4-x)}}\\ &= \frac{-\left(2x^2-15x+25\right)}{2\,(4-x)\,\sqrt{(3-x)\,(4-x)}} \end{aligned}$$

D'après l'étude précédente, f' est strictement négative sur $]-\infty;1[$ donc f est strictement décroissante sur $]-\infty;1]$. Donc finalement f est strictement décroissante sur $]-\infty;1]$ et sur $[\frac{5}{2};3]$ et strictement croissante sur $[1;\frac{5}{2}]$. On en déduit le tableau de variations ci-contre.

x	$-\infty$		1		$\frac{5}{2}$		3
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0

7. a. *Posons : $t=x-1$. Pour $x<1$, on a :*

$$\begin{aligned} f(x)+x-1 &= \frac{|t|\,\sqrt{2-t}}{\sqrt{3-t}}+t\\ &= t\left(1-\frac{\sqrt{2-t}}{\sqrt{3-t}}\right)\\ &= t\,\frac{\sqrt{3-t}-\sqrt{2-t}}{\sqrt{3-t}}\\ &= t\,\frac{(3-t)-(2-t)}{\sqrt{3-t}\left(\sqrt{3-t}+\sqrt{2-t}\right)}\\ &= t\,\frac{1}{\left(\sqrt{-t}\right)^2\sqrt{1-\frac{3}{t}}\left(\sqrt{1-\frac{3}{t}}+\sqrt{1-\frac{2}{t}}\right)}\\ &= \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{3}{t}}\left(\sqrt{1-\frac{3}{t}}+\sqrt{1-\frac{2}{t}}\right)} \end{aligned}$$

Or : $\lim\limits_{t\to-\infty}\frac{3}{t}=\lim\limits_{t\to-\infty}\frac{2}{t}=0$;
donc par différences, composition par la fonction racine carrée, somme, produit et quotient :
$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+x-1\right)=-\frac{1}{2}$. D'où il vient par somme : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-\left(-x+\frac{1}{2}\right)\right)=0$.
Donc la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=-x+\frac{1}{2}$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$. □

Chapitre VII

Nombres complexes

VII.1 Introduction

VII.1.1 Des équations et des ensembles

Dans les classes précédentes, on a vu l'ensemble $\mathbb{N}$, dans cette ensemble on peut résoudre des équations telles que : $x+3=7$; où la solution est 4. Cependant, dans $\mathbb{N}$, des équations telles que : $x+7=3$; n'ont pas de solution. C'est alors qu'on a eu l'idée d'étendre l'ensemble des nombres ; on a ainsi obtenu un nouvel ensemble appelé $\mathbb{Z}$, dans lequel l'équation précédente a une solution : -4. Mais cela n'était pas suffisant car dans cet ensemble des équations telles que : $3x=-15$; ont une solution alors que d'autres équations, pourtant semblables, telles que : $3x=-7$; n'en ont pas. On a donc à nouveau étendu l'ensemble des nombres pour obtenir un nouvel ensemble, $\mathbb{Q}$, dans lequel l'équation précédente a une solution : $-\frac{7}{3}$. Mais cela n'était pas suffisant car dans cet ensemble des équations telles que : $x^2=4$; ont deux solutions (2 et -2) alors que des équations assez proches telles que : $x^2=3$; n'en ont pas. On a donc à nouveau étendu l'ensemble des nombres pour obtenir un nouvel ensemble, $\mathbb{R}$, dans lequel l'équation précédente a deux solutions : $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$. Mais cela n'est pas suffisant car dans cet ensemble des équations telles que : $x^2=-4$; assez proches des deux équations précédentes, n'ont pas de solution. Si on veut qu'une telle équation ait, comme les autres, deux solutions il faut étendre l'ensemble des nombres.

On part du principe qu'il existe un nombre i (i comme imaginaire) tel que : $i^2=-1$; et notre objectif est de trouver un nouvel ensemble, que nous noterons $\mathbb{C}$, qui sera le plus petit ensemble de nombres (qui seront appelés nombres complexes) vérifiant les contraintes suivantes.

1. $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$;
2. $i\in\mathbb{C}$;
3. Les lois algébriques concernant l'addition et la multiplication des nombres sont les mêmes dans $\mathbb{C}$ que dans $\mathbb{R}$.

La somme ou le produit de deux nombres réels est un nombre réel, la dernière condition impose donc que la somme ou le produit de deux nombres complexes soit un nombre complexe. En particulier $2i$ et $-2i$ sont deux nombres complexes et on a :
$(2i)^2=2^2\times i^2=4\times(-1)=-4$ et $(-2i)^2=(-2)^2\times i^2=4\times(-1)=-4$;
donc la dernière équation envisagée à maintenant, elle aussi, deux solutions.

Pour les raisons que nous venons d'évoquer, tout nombre de la forme (dite *algébrique*) $a+ib$, où a et b sont des nombres réels, sont des nombres complexes. Peut-on par additions ou par multiplications obtenir des nombres complexes qui ne peuvent pas se mettre sous cette forme ? Pour se faire une idée, prenons quelques exemples.

VII.1.2 Activités

Mettre sous forme algébrique les nombre complexes suivants.

$$\begin{array}{lllllllll} z_1 &=& (2+5i)+(3-7i); & z_2 &=& (2+5i)-(3-7i); & z_3 &=& (2+5i)(3-7i) \\ z_4 &=& (2+5i)(2-5i); & z_5 &=& \dfrac{1}{2+i\sqrt{3}}; & z_6 &=& \dfrac{3-7i}{2+5i} \\ z_7 &=& i^4; & z_8 &=& (1+i)^2; & z_9 &=& (1+i)^{17} \end{array}$$

Plus généralement, pour $z=a+ib$ et $z'=a'+ib'$ (où a, a', b, b' sont des réels), mettre sous forme algébrique les nombres complexes $z+z'$, zz',$z-z'$ et lorsque $a\neq0$ ou $b\neq0$, $\frac{1}{z}$.

VII.1.3 Définitions

L'activité précédente suggère la définition suivante.

DÉFINITIONS VII.1.1 NOMBRE COMPLEXE, $\mathbb{C}$

(1) Un nombre complexe est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $a + i\,b$, où a et b sont des nombres réels et $i^2 = -1$.

(2) L'ensemble des nombres complexes est appelé $\mathbb{C}$.

Remarque *On a :* $0 \times 2i = (0 \times 2)i = 0 \times i$ *; donc :* $0 = 0 \times 2i - 0 \times i = 0(2i - i) = 0 \times i$ *; d'où :* $0 \times i = 0$.

Notations et vocabulaire

1. *lorsqu'un nombre complexe z est écrit sous la forme $a + i\,b$, où a et b sont des nombres réels, on dit qu'il est écrit sous* forme algébrique *;*

2. *le nombre réel a est appelé* partie réelle *de z et est noté* $\Re\mathrm{e}(z)$ *;*

3. *le nombre réel b est appelé* partie imaginaire *de z et est noté* $\Im\mathrm{m}(z)$ *; en particulier* $\Im\mathrm{m}(z)$ *est un nombre réel ;*

4. *si $b = 0$, alors $z = a$ (car on a : $i \times 0 = 0$) ; z est un nombre réel ; tout nombre réel est bien un nombre complexe ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$) ;*

5. *Si $a = 0$, alors $z = i\,b$; z est dit* imaginaire pur.

Exemple *Si :* $z = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ *; alors :* $\Re\mathrm{e}(z) = \dfrac{1}{2}$ *et* $\Im\mathrm{m}(z) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

VII.1.4 Calcul dans $\mathbb{C}$

VII.1.4.a Addition, soustraction, multiplication

Comme on l'a vu en activités, l'addition, la soustraction et la multiplication dans $\mathbb{C}$ sont définies de la façon suivante.

DÉFINITIONS VII.1.2

Soit a, a', b, b' des nombres réels.

(1) $(a + i\,b) + (a' + i\,b') = (a + a') + i(b + b')$;

(2) $(a + i\,b) - (a' + i\,b') = (a - a') + i(b - b')$;

(3) $(a + i\,b)(a' + i\,b') = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$.

Remarques

1. *Lorsque : $b = b' = 0$; on retrouve l'addition, la soustraction et la multiplication dans $\mathbb{R}$.*

2. *$(a + i\,b) + (-a - i\,b) = 0$; tout nombre complexe, $z = a + i\,b$, a un opposé : $-z = -a - i\,b$.*

Le théorème suivant signifie que, comme nous l'avions désiré, l'addition et la multiplication dans $\mathbb{C}$ ont les mêmes propriétés que dans $\mathbb{R}$; sa démonstration, fastidieuse et sans surprise, est laissée au soin du lecteur courageux.

THÉORÈME VII.1.1

Pour tous nombres complexes z, z', z'', on a :

(1)	$z + z' \in \mathbb{C}$	$+$ est un loi de composition interne à $\mathbb{C}$;
(2)	$z + z' = z' + z$	$+$ est commutative dans $\mathbb{C}$;
(3)	$z + (z' + z'') = (z + z') + z''$	$+$ est associative dans $\mathbb{C}$;
(4)	$z + 0 = 0 + z = z$	dans $\mathbb{C}$, 0 est élément neutre pour $+$;
(5)	$z \times z' \in \mathbb{C}$	$\times$ est un loi de composition interne à $\mathbb{C}$;
(6)	$z \times z' = z' \times z$	$\times$ est commutative dans $\mathbb{C}$;
(7)	$z \times (z' \times z'') = (z \times z') \times z''$	$\times$ est associative dans $\mathbb{C}$;
(8)	$z \times 1 = 1 \times z = z$	dans $\mathbb{C}$, 1 est élément neutre pour $\times$;
(9)	$z \times (z' + z'') = z \times z' + z \times z''$	$\times$ est distributive par rapport à $+$ dans $\mathbb{C}$;

VII.1.4.b Conjugué d'un nombre complexe

DÉFINITION VII.1.3 CONJUGUÉ D'UN NOMBRE COMPLEXE

Soit z un nombre complexe de forme algébrique : $z = a + i\,b$.

On appelle *conjugué* de z le nombre complexe, noté $\overline{z}$, défini par : $\overline{z} = a - i\,b$.

Exemple *Si* $z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, *alors* $\overline{z} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

VII.1.4.c Égalité de deux nombres complexes

THÉORÈME VII.1.2

Soit z et z' deux nombres complexes de formes algébriques : $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.
(1) $z = 0$ si et seulement si $a = 0$ et $b = 0$;
(2) $z = z'$ si et seulement si $a = a'$ et $b = b'$

0 est appelé *nombre complexe nul.*

Démonstration

(1) On sait que si $a = 0$ et $b = 0$, alors $z = 0$.
Réciproquement si $z = 0$, alors : $z\overline{z} = 0$; c'est-à-dire : $a^2 + b^2 = 0$;
a et b sont réels et on sait que dans $\mathbb{R}$ la somme des carrés de deux nombres est nulle si et seulement si les deux nombres sont nuls. On en déduit **(1)**.

(2) On a : $z - z' = (a - a') + i(b - b')$; donc : $z = z' \Longleftrightarrow z - z' = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} a - a' = 0 \\ b - b' = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$. □

VII.1.4.d Inverse d'un nombre complexe non nul, division

THÉORÈME VII.1.3

Tout nombre complexe non nul a un *inverse.*

Démonstration Soit z un nombre complexe non nul de forme algébrique : $z = a + ib$.
On a donc : $a^2 + b^2 \neq 0$; et d'après les définitions VII.1.2 :

$$\left(a + ib\right)\left(\frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}\right) = \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2}\right) + i\left(\frac{-ab}{a^2+b^2} + \frac{ba}{a^2+b^2}\right) = 1.$$

L'inverse de z s'obtient par la formule : $\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$. □

Exemple *Pour* $z = 3 + 5i$, *on obtient :* $\frac{1}{z} = \frac{1}{3+5i} = \frac{3-5i}{3^2+5^2} = \frac{3}{34} - \frac{5}{34}i$.

Remarque *La formule introduite dans la démonstration du théorème VII.1.3 peut s'écrire :* $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}}$.

THÉORÈME VII.1.4

Le produit de deux nombres complexes est nul si et seulement si l'un d'entre eux au moins est nul.

Démonstration Soit z et z' deux nombres complexes. D'après les définitions VII.1.2, le théorème VII.1.2 et la remarque §VII.1.3, si $z = 0$ ou $z' = 0$ alors $zz' = 0$.
Réciproquement, si $zz' = 0$ alors $z = 0$ ou $z' = 0$. En effet si $z \neq 0$, alors $\frac{1}{z} \times zz' = \frac{1}{z} \times 0$; c'est-à-dire : $z' = 0$. □

La *division* se définit par : $\frac{z'}{z} = z' \times \frac{1}{z}$ (pour $z \neq 0$).

Exemple $\frac{2+3i}{2-i} = \frac{(2+3i)(2+i)}{2^2+1^2} = \frac{1}{5} + \frac{7}{5}i$.

VII.1.4.e Groupes et corps

Ce paragraphe peut être omis par les élèves ne suivant l'enseignement de spécialité mathématique.

On a vu que dans $\mathbb{C}$, + est une loi de composition interne, commutative, associative dans laquelle 0 est élément neutre et pour laquelle tout élément a un opposé ; ces cinq propriétés étant réunies, on dit que $(\mathbb{C}, +)$, c'est-à-dire $\mathbb{C}$ muni de l'addition, est un groupe commutatif.

De même $\mathbb{C}^*$, c'est-à-dire $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, muni de la multiplication est groupe commutatif.

$(\mathbb{C}, +)$ est un groupe commutatif, $(\mathbb{C}^*, \times)$ est un groupe et $\times$ est distributive par rapport à + ; on dit que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps.

De plus $\times$ est commutative dans $\mathbb{C}$, on dit que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif.

Remarques

1. *$(\mathbb{R},+,\times)$ et $(\mathbb{Q},+,\times)$ sont des corps commutatifs.*

2. *$(\mathbb{Z},+)$ est un groupe commutatif, mais $(\mathbb{Z},+,\times)$ n'est un corps car certains entiers non nuls n'ont pas d'inverse entier.*

3. *Désignons par $\mathscr{I}$ l'ensemble des isométries du plan ; $(\mathscr{I},\circ)$ est un groupe, non commutatif.*

VII.1.4.f Identités remarquables

Les formules suivantes, établies dans $\mathbb{R}$, restent valables dans $\mathbb{C}$.

THÉORÈME VII.1.5

Pour tous nombres complexes z et z' et tout entier naturel non nul n, on a :

$$(z+z')^2 = z^2+2zz'+z'^2 \quad ; \quad (z-z')^2 = z^2-2zz'+z'^2$$

$$(z+z')(z-z') = z^2-z'^2 \quad ; \quad (z+z')^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z^k z'^{n-k} \text{(formule du binôme de NEWTON)}$$

$$z^n-z'^n = (z-z')\left(z^{n-1}+z^{n-2}z'+z^{n-3}z'^2+\cdots+z\,z'^{n-2}+z'^{n-1}\right) = (z-z')\sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k}z'^k$$

VII.2 Interprétations géométriques

Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.

VII.2.1 Affixe, point image, vecteur image

- L'application qui à tout nombre complexe de forme algébrique $a+i\,b$ associe le point $\mathrm{M}(a;b)$ est une bijection de $\mathbb{C}$ vers $\mathscr{P}$.
  $\mathrm{M}(a;b)$ est appelé *point image* du nombre complexe $a+i\,b$; $a+i\,b$ est appelé *affixe* du point $\mathrm{M}(a;b)$
- L'application qui à tout nombre complexe $a+i\,b$ associe le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est une bijection de $\mathbb{C}$ vers l'ensemble des vecteurs du plan.
  $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est appelé *vecteur image* du nombre complexe $a+i\,b$; $a+i\,b$ est appelé *affixe* du vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.
- Le plan muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est appelé *plan complexe*.
  Un point M d'affixe z est souvent noté $\mathrm{M}(z)$.
- Les droites de repères $(\mathrm{O};\vec{\imath})$ et $\left(\mathrm{O};\vec{\jmath}\right)$ sont respectivement appelée *axe réel* et *axe imaginaire*.

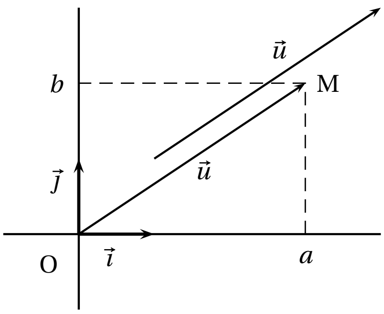


FIGURE VII.1 – Interprétation géométrique

Exemples

1. *O est le point d'affixe 0.*

2. *$\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont les vecteurs d'affixes respectives 1 et i.*

Remarques

1. *Deux points sont confondus si et seulement si ils ont la même affixe.*

2. *Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont la même affixe.*

VII.2.2 $\vec{u}+\vec{u}'$, $k\vec{u}$, $\overrightarrow{MM'}$

Le tableau VII.1 donne les interprétations géométriques de certaines opérations dans $\mathbb{C}$.

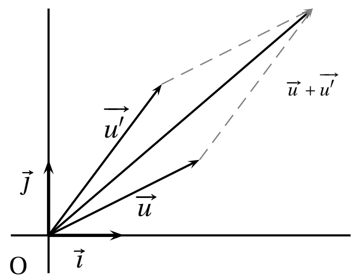
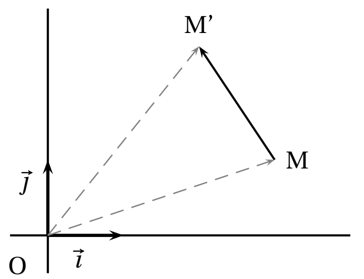
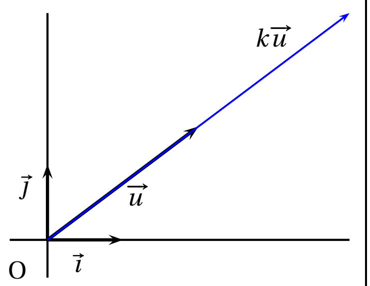
Somme	Différence	Produit par un nombre réel
		
$z_{\vec{u}}+z_{\vec{u}'}=z_{\vec{u}+\vec{u}'}$	$z_{M'}-z_M=z_{\overrightarrow{MM'}}$	$kz_{\vec{u}}=z_{k\vec{u}}$

TABLE VII.1 – Opérations sur les vecteurs

Exercice VII.2.1. **Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité graphique : 1 cm)**

1. Placer les points A, B, C et D d'affixes respectives : $z_A=1+2i$; $z_B=4-2i$; $z_c=5$ et $z_D=\frac{7}{2}+2i$. 2. Démontrer que le quadrilatère AOBC est un parallélogramme. 3. Démontrer que les droites (AB) (CD) sont parallèles.

Solution

1. *Voir figure VII.2.*

2. *Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{BC}$ ont respectivement pour affixe :*

$z_{\overrightarrow{OA}}=z_A=1+2i$ *et*

$z_{\overrightarrow{BC}}=z_C-z_B=5-(4-2i)=1+2i$ *; on a :* $z_{\overrightarrow{OA}}=z_{\overrightarrow{BC}}$ *; donc :* $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BC}$*. Le quadrilatère AOBC est donc un parallélogramme.*

3. *Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont respectivement pour affixe :*

$z_{\overrightarrow{CD}}=z_D-z_C=\frac{7}{2}+2i-5=-\frac{3}{2}+2i$ *et*

$z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A=(4-2i)-(1+2i)=3-4i=-2\left(-\frac{3}{2}+2i\right)$;

On a : $z_{\overrightarrow{CD}}=-2z_{\overrightarrow{CD}}$ *; donc :* $\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{CD}$*.*

Les droites (AB) (CD) ont des vecteurs directeurs colinéaires, elles sont donc sont parallèles. □

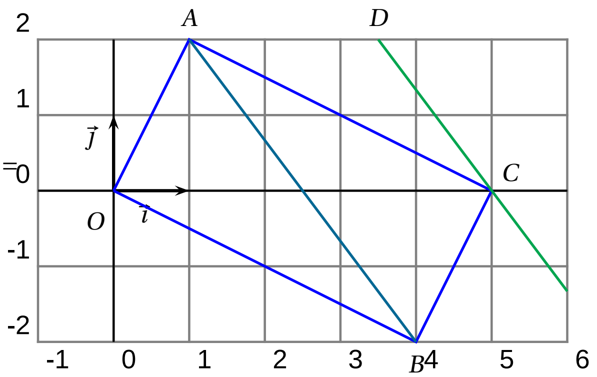


FIGURE *VII.2 –*

VII.2.3 Écriture complexe de certaines symétries

La symétrie par rapport à l'axe réel est la transformation qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z'=\overline{z}$.

De même la transformation complexe $z\mapsto -z$ est associée à la symétrie par rapport à l'origine et la transformation complexe $z\mapsto -\overline{z}$ est associée à la symétrie par rapport à l'axe imaginaire.

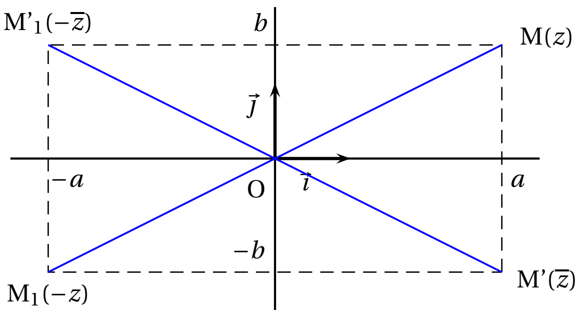


FIGURE VII.3 – Nombres complexes et symétries

VII.2.4 Coordonnées polaires

Un point M, distinct de l'origine peut-être repéré par ses coordonnées rectangulaires (a,b) ou par ces coordonnés polaires (r,θ).

Dire que M a pour coordonnées rectangulaires (a,b) signifie que $\overrightarrow{OM}=a\vec{\imath}+b\vec{\jmath}$.

Dire que M a pour coordonnées polaires (r,θ) signifie que $OM=r$ et $\left(\vec{\imath},\overrightarrow{OM}\right)\equiv\theta\,(\mathrm{mod}\,2\pi)$. Le schéma ci-dessous résume les règles de passage d'un système de coordonnées à l'autre.

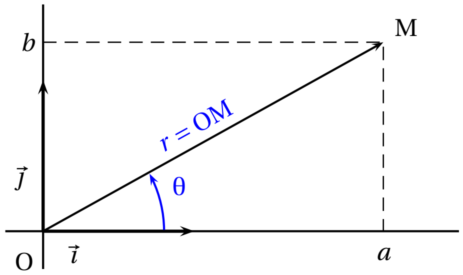


FIGURE VII.4 – Coordonnées polaires

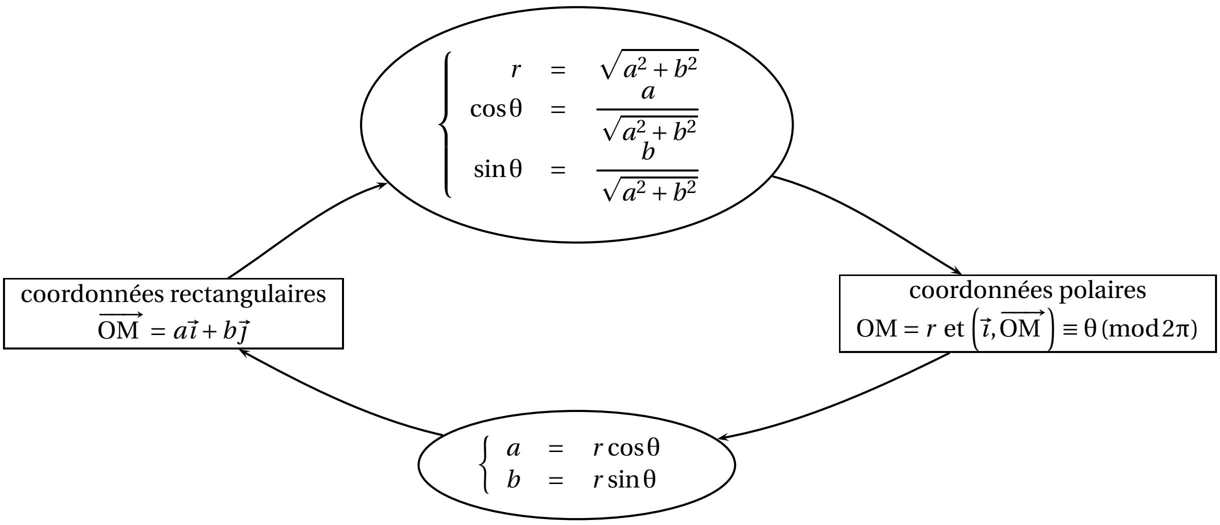


FIGURE VII.5 – Formules de conversions coordonnées polaires $\longleftrightarrow$ coordonnées rectangulaires

VII.2.5 Module et arguments

VII.2.5.a Module d'un nombre complexe

DÉFINITION VII.2.1 MODULE D'UN NOMBRE COMPLEXE

Soit z un nombre complexe non nul de forme algébrique : $z = a + i\,b$.

On appelle *module* de z le nombre réel positif, noté $|z|$, défini par : $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$.

Remarques

1. *Pour tout nombre complexe z, on a : $|z|^2 = z\overline{z}$.*

2. *Pour $b = 0$, on a : $z = a$ et $|z| = \sqrt{a^2} = |a|$; le module étend à $\mathbb{C}$ la fonction valeur absolue.*

Exemple *Pour $z = 2+3i$, on a : $|z| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$ et $z\overline{z} = (2+3i)(2-3i) = 2^2+3^2 = 13$*

THÉORÈME VII.2.1

Pour tout nombre complexe z, on a : $\quad |z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$

Démonstration $|z| = 0 \Longleftrightarrow |z|^2 = 0 \Longleftrightarrow z\overline{z} = 0 \Longleftrightarrow (z = 0 \text{ ou } \overline{z} = 0) \Longleftrightarrow z = 0.$ □

VII.2.5.b Arguments d'un nombre complexe non nul

DÉFINITION VII.2.2 ARGUMENTS D'UN NOMBRE COMPLEXE

Soit z un nombre complexe non nul et M son image dans le plan complexe.

On appelle *argument* de z toute mesure de l'angle $\left(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}\right)$.

Remarques

1. *Si θ et θ' sont deux arguments de z alors $\theta' = \theta + k2\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$).*

2. *On note : $\arg(z) = \theta + k2\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$) ou $\arg(z) \equiv \theta \,(\mathrm{mod}\, 2\pi)$.*

3. *Dire qu'un nombre complexe z a pour module r et pour argument θ signifie que l'image de z dans le plan complexe a pour coordonnées polaires (r, θ).*

VII.2.5.c Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Soit z un nombre complexe non nul de forme algébrique : $z = a + i\,b$; de module r, d'argument θ et M son image dans le plan complexe. On sait que : $a = r\cos\theta$ et $b = r\sin\theta$.
Donc : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

DÉFINITION VII.2.3 FORME TRIGONOMÉTRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE

Soit z un nombre complexe non nul de module r et d'argument θ.
On appelle *forme trigonométrique* de z l'écriture : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Exemples $1+i = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ *et* $-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}$

Remarques

1. *On passe de la forme algébrique à la forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul de la même façon qu'on transforme des coordonnées rectangulaires en coordonnées polaires (cf. figure §VII.5 page 82) ;*

2. *Soit $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $r \in \mathbb{R}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$;*

- *si $r > 0$ alors la forme trigonométrique de z est $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $\arg(z) \equiv \theta\ [2\pi]$;*
- *si $r < 0$ alors la forme trigonométrique de z est $z = -r\left(\cos(\theta+\pi) + i\sin(\theta+\pi)\right)$ et $\arg(z) \equiv \theta + \pi \pmod{2\pi}$.*

Exemple *La forme trigonométrique de* $-2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$ *est :* $2\left(\cos-\dfrac{5\pi}{6} + i\sin-\dfrac{5\pi}{6}\right)$.

On déduit de l'étude menée §VII.2.4 que deux nombres complexes non nuls ont même argument (modulo 2π) et même module si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire. Le théorème VII.1.2 permet alors d'établir le théorème suivant.

THÉORÈME VII.2.2

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls.
On a : $z = z'$ si et seulement si $|z| = |z'|$ et $\arg(z) \equiv \arg(z') \pmod{2\pi}$.

VII.3 Propriétés algébriques

VII.3.1 Propriétés du conjugué

Les propriétés suivantes sont des conséquences immédiates de la définition VII.1.3 p. 78.

THÉORÈME VII.3.1

Soit z un nombre complexe de forme algébrique : $z = a + ib$.

(1)	$\overline{\overline{z}} = z$;	**(2)**	$z\overline{z} = a^2 + b^2 = \lvert z\rvert^2$;
(3)	$z + \overline{z} = 2\Re e(z)$;	**(4)**	$z - \overline{z} = 2i\Im m(z)$;
(5)	z est réel si et seulement si $\overline{z} = z$;	**(6)**	z est imaginaire pur si et seulement si $\overline{z} = -z$;

Exemples

1. $\overline{\overline{3+2i}} = \overline{3-2i} = 3+2i$

2. $(-3+2i) + (-3-2i) = -6$

3. $(-3+2i)\overline{(-3-2i)} = (-3)^2 - (-4) = 13$

4. $(-3+2i) - (-3-2i) = 4i$

THÉORÈME VII.3.2

Pour tous nombres complexes z et z', pour tout entier relatif n, on a :

(1)	$\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$;	**(3)**	$\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$;	**(5)**	$\overline{\left(\dfrac{z'}{z}\right)} = \dfrac{\overline{z'}}{\overline{z}}$ $(z \neq 0)$;
(2)	$\overline{-z} = -\overline{z}$;	**(4)**	$\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$ $(z \neq 0)$;	**(6)**	$\overline{z^n} = \overline{z}^n$ $(z \neq 0)$;

Démonstration Introduisons les formes algébriques de z et z' : $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.
On en déduit immédiatement **(1)** et **(2)**.

(3) On a : $zz' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$ et $\overline{z}\,\overline{z'} = (a - ib)(a' - ib') = (aa' - bb') - i(ab' + a'b)$;
donc : $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$.

(4) Pour $z \neq 0$, on a : $z \times \dfrac{1}{z} = 1 \iff \overline{z \times \dfrac{1}{z}} = 1 \iff \overline{z} \times \overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = 1 \iff \overline{z} \times \dfrac{1}{\overline{z}} = 1 \iff \overline{\dfrac{1}{z}} = \dfrac{1}{\overline{z}}$;
donc : $\overline{\dfrac{1}{z}} = \dfrac{1}{\overline{z}}$.

(5) Pour $z \neq 0$, on a : $\overline{\left(\dfrac{z'}{z}\right)} = \overline{z' \times \dfrac{1}{z}} = \overline{z'} \times \overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \overline{z'} \times \dfrac{1}{\overline{z}} = \dfrac{\overline{z'}}{\overline{z}}$;

(6) Pour $n > 0$ la propriété est obtenue en appliquant $n - 1$ fois la propriété **(3)**.
Pour $n < 0$ on a $-n > 0$ et donc : $\overline{z^n} = \overline{\left(\dfrac{1}{z^{-n}}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z^{-n}}} = \dfrac{1^{-n}}{\overline{z}^{-n}} = \left(\dfrac{1}{\overline{z}}\right)^{-n} = \overline{z}^n$ □

VII.3.2 Propriétés du module et des arguments

THÉORÈME VII.3.3

Pour tous nombres complexes non nuls z et z', pour tout entier relatif n, on a :

(1)	$\lvert z+z'\rvert$	$\leqslant$	$\lvert z\rvert+\lvert z'\rvert$		*(inégalité triangulaire)*		
(2)	$\lvert zz'\rvert$	$=$	$\lvert z\rvert\times\lvert z'\rvert$	*et*	$\arg(zz')$	$\equiv$	$\arg(z)+\arg(z')\,(\mathrm{mod}\,2\pi)$
(3)	$\left\lvert\dfrac{1}{z}\right\rvert$	$=$	$\dfrac{1}{\lvert z\rvert}$	*et*	$\arg\left(\dfrac{1}{z}\right)$	$\equiv$	$-\arg(z)\,(\mathrm{mod}\,2\pi)$
(4)	$\left\lvert\dfrac{z'}{z}\right\rvert$	$=$	$\dfrac{\lvert z'\rvert}{\lvert z\rvert}$	*et*	$\arg\left(\dfrac{z'}{z}\right)$	$\equiv$	$\arg(z')-\arg(z)\,(\mathrm{mod}\,2\pi)$
(5)	$\lvert z^n\rvert$	$=$	$\lvert z\rvert^n$	*et*	$\arg(z^n)$	$\equiv$	$n\arg(z)\,(\mathrm{mod}\,2\pi)$

Démonstration

(1) L'inégalité triangulaire se déduit de l'interprétation géométrique de $|z+z'|$.

Introduisons les formes trigonométriques de z et z' : $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ et $z'=r'(\cos\theta'+i\sin\theta')$.

(2) On a :
$$\begin{aligned} zz' &= r(\cos\theta+i\sin\theta)r'(\cos\theta'+i\sin\theta')\\ &= rr'\left[(\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta')+i(\cos\theta\sin\theta'+\cos\theta'-\sin\theta)\right]\\ &= rr'\left(\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta')\right)\end{aligned}$$

On en déduit la propriété.

(3) On a : $\dfrac{1}{z}=\dfrac{\overline{z}}{|z|^2}=\dfrac{r}{r^2}(\cos\theta-i\sin\theta)=\dfrac{1}{r}\left(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\right)$.

On en déduit la propriété.

(4) On a :
$$\begin{aligned}\frac{z'}{z} &= z'\times\frac{1}{z}=r'(\cos\theta'+i\sin\theta')\frac{1}{r}\left(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\right)\\ &= \frac{r'}{r}\left[\left(\cos\theta'\cos(-\theta)-\sin\theta'\sin(-\theta)\right)+i\left(\cos\theta'\sin(-\theta)+\sin\theta'\cos(-\theta)\right)\right]\\ &= \frac{r'}{r}\left(\cos(\theta'-\theta)+i\sin(\theta'-\theta)\right).\end{aligned}$$

On en déduit la propriété.

(5) Pour $n=0$, la propriété est immédiate.

Pour $n>0$ la propriété est obtenue en appliquant $n-1$ fois la propriété **(2)**.

Pour $n<0$ on a $-n>0$ et donc, d'après **(3)** : $z^n=\dfrac{1}{z^{-n}}=\dfrac{1}{r^{-n}\left(\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta)\right)}=r^n\left(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)\right)$.

On en déduit la propriété. □

Remarques

1. *Le module est utilisé pour définir la distance entre deux nombres complexes. La distance entre z et z' est $|z'-z|$.*

2. *On dira qu'une suite (z_n) de nombres complexes converge vers un nombre complexe ℓ si la distance entre z_n et l tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$; c'est-à-dire si la suite réelle de terme général $|z_n-\ell|$ converge vers 0.*

3. *En particulier une suite géométrique de terme général : $z_n=w\times q^n$ ($w\in\mathbb{C}$ et $q\in\mathbb{C}$) converge vers 0 si et seulement si $|q|<1$, en effet : $|z_n|=|w|\times|q|^n$.*

On démontre, comme dans $\mathbb{R}$, que pour $|q|<1$, la suite de terme général : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(wq^k\right)$; converge vers : $\dfrac{w}{1-q}$.

VII.3.3 Formule de MOIVRE (complément)

Pour $r=1$ dans l'identité (5) du théorème VII.3.3, on obtient le théorème suivant.

THÉORÈME VII.3.4 FORMULE DE MOIVRE [1]

Pour tout nombre réel θ et tout nombre entier relatif n, on a :

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$$

Exercice VII.3.1. ***Déterminer la forme algébrique de :*** $z=\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2003}$.

Solution *On a :* $z=\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2003}=\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)^{2003}=\cos\left(2003\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(2003\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Or : $\dfrac{2003}{3}\pi=\dfrac{2004-1}{3}\pi=\dfrac{6\times334-1}{3}\pi=334\times2\pi-\dfrac{\pi}{3}$.

Donc : $z=\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. □

1. MOIVRE (ABRAHAM DE) *Vitry-le-François 1667 - Londres 1754,* mathématicien britannique d'origine française. Il précisa les principes du calcul des probabilités et introduisit la trigonométrie des quantités imaginaires, énonçant implicitement la formule qui porte son nom.

Remarque *Depuis la rentrée de septembre 2001, la formule de* MOIVRE *n'est plus au programme de Terminale S.*

VII.4 Notation exponentielle

VII.4.1 Une équation différentielle

Considérons la fonction :

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \cos(t)+i\sin(t). \end{array}$$

Soit t un nombre réel. Les fonctions cos et sin sont dérivables en t et ont respectivement pour nombre dérivés $-\sin(t)$ et $\cos(t)$; il existe donc deux fonctions ε_r et ε_i telles que : $\lim\limits_0 \varepsilon_r = \lim\limits_0 \varepsilon_i = 0$; et pour tout réel h :

$$\cos(t+h) = \cos(t) - h\sin(t) + h\varepsilon_r(h); \tag{VII.1}$$

$$\sin(t+h) = \sin(t) + h\cos(t) + h\varepsilon_i(h). \tag{VII.2}$$

Introduisons la fonction ε de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$ définie par : $\varepsilon = \varepsilon_r + i\varepsilon_i$. On a : $|\varepsilon| = \sqrt{\varepsilon_r^2+\varepsilon_i^2}$; donc par produit et somme des limites puis par composition par la fonction racine carrée : $\lim\limits_0 \varepsilon = 0$. De plus, pour tout réel h :

$$\begin{aligned} f(t+h) &= \cos(t+h) + i\sin(t+h) \\ &= (\cos(t) - h\sin(t) + h\varepsilon_r(h)) + i(\sin(t) + h\cos(t) + h\varepsilon_i(h)) \\ &= f(t) + h\big(-sin(t) + i\cos(t)\big) + h\big(\varepsilon_r(h) + i\varepsilon_i(h)\big) \\ &= f(t) + hi f(t) + h\varepsilon(h). \end{aligned}$$

On en déduit que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est la fonction : if. On a donc :

$$f' = if \qquad \text{et} \qquad f(0) = 1.$$

On reconnaît une équation différentielle d'ordre 1 avec une condition initiale dont la solution formelle est la fonction,

$$f : t \longmapsto e^{it}.$$

Notation Pour tout nombre réel θ, on convient de noté $e^{i\theta}$, le nombre complexe d'argument θ et de module 1. On a donc : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

VII.4.2 Définitions et propriétés

DÉFINITION VII.4.1 FORME EXPONENTIELLE D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL

Soit z un nombre complexe non nul de module r et d'argument θ .
On appelle *forme exponentielle* de z l'écriture : $z = re^{i\theta}$.

Exemples

1. $1 = e^{i0}$;
2. $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$;
3. $1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$;
4. $-1 = e^{i\pi}$;
5. $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$;
6. $1+i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$;

Remarque *Pour tous nombres réels r et θ :* $\left|re^{i\theta}\right| = |r| \times \left|e^{i\theta}\right| = |r|$.

Sous forme exponentielle, le théorème VII.3.3 s'écrit de la façon suivante.

THÉORÈME VII.4.1

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls de forme exponentielle : $z = r\,e^{i\theta}$ et $z' = r'\,e^{i\theta'}$; et n un entier relatif, on a :

(1) $\left|z+z'\right| \leqslant r + r'$;
(2) $zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$;
(3) $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}e^{-i\theta}$;
(4) $\dfrac{z'}{z} = \dfrac{r'}{r}e^{i(\theta'-\theta)}$;
(5) $z^n = r^n e^{in\theta}$.

VII.4.3 Forme exponentielle et symétries usuelles

Le théorème suivant est une conséquence immédiate de l'étude menée §VII.2.3. p. 81

THÉORÈME VII.4.2

Soit z un nombre complexe non nul de forme exponentielle : $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$.
Les formes exponentielles de $\overline{z}$, $-z$ et $-\overline{z}$ sont :
$\overline{z} = r\mathrm{e}^{-i\theta}$; $\quad -z = r\mathrm{e}^{i(\theta+\pi)}$; $\quad -\overline{z} = r\mathrm{e}^{i(\pi-\theta)}$.

Exemple *Pour* $z = 2\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$*, on obtient :* $\overline{z} = 2\mathrm{e}^{-\frac{2i\pi}{3}}$ *;* $-z = 2\mathrm{e}^{-\frac{i\pi}{3}}$ *et* $-\overline{z} = 2\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{3}}$.

VII.4.4 Formules d'EULER

D'après les formules (2) et (5) théorème VII.3.1, on a pour tout nombre complexe z :
$\Re\mathrm{e}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ et $\Im\mathrm{m}(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$.
En particulier pour $z = \mathrm{e}^{i\theta}$, on obtient le théorème suivant.

THÉORÈME VII.4.3 FORMULES D'EULER[2]

Pour tout nombre réel θ, on a :

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{i\theta}+\mathrm{e}^{-i\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{i\theta}-\mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}.$$

VII.4.5 Racines carrées d'un nombre complexe

On appelle racine carrée d'un nombre complexe Z tout nombre complexe z vérifiant : $z^2 = \mathrm{Z}$.
Par exemple 2 a deux racines carrées : $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$; -1 a également deux racines carrées : i et $-i$.
L'écriture $\sqrt{\mathrm{Z}}$ n'a de sens que si Z est un *réel positif*.

THÉORÈME VII.4.4

Soit Z un nombre complexe non nul de forme exponentielle : $\mathrm{Z} = r\mathrm{e}^{i\theta}$.
z a exactement deux racines complexes : $z_1 = \sqrt{r}\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}$ et $z_2 = \sqrt{r}\mathrm{e}^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)}$

Démonstration Les racines carrées de Z, sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation, d'inconnue z, (E) : $z^2 = \mathrm{Z}$.
On remarque que le nombre $z_1 = \sqrt{r}\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}$ est solution de (E), en effet : $z_1^2 = \left(\sqrt{r}\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}\right)^2 = r\mathrm{e}^{i\theta} = \mathrm{Z}$; donc :
(E) $\iff z^2 = z_1^2 \iff z^2 - z_1^2 = 0 \iff (z-z_1)(z+z_1) = 0$.
Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul ; Z a donc exactement deux racines carrées : z_1 et $z_2 = -z_1 = \sqrt{r}\mathrm{e}^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)}$. □

Remarques

1. *0 n'a qu'une racine carrée : 0.*
2. *Les deux racines carrées d'un nombre complexe non nul sont opposées.*
3. *Le théorème VII.4.4 permet d'obtenir les racines carrées d'un nombre complexe écrit sous forme exponentielle ; une méthode permettant de déterminer les racines carrées d'un nombre complexe écrit sous forme algébrique est proposée §VII.6.4.*

VII.5 Nombres complexes et polynômes (compléments)

Dans cette partie l'étude des démonstrations est facultative.

2. EULER (LEONHARD) *Bâle 1707 - Saint-Pétersbourg 1783,* mathématicien suisse. Il fut, au XVIIIe siècle, le principal artisan de l'essor de l'analyse, qu'il réorganisa autour du concept fondamental de fonction. Il exerça son inventivité dans de nombreux domaines de la physique mathématique.

VII.5.1 Théorème fondamental de l'algèbre

THÉORÈME VII.5.1 THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ALGÈBRE

Soit P un polynôme à coefficients complexes et α un nombre complexe.
α est racine de P si et seulement si il existe un polynôme Q tel que, pour tout nombre complexe z,

$$\mathrm{P}(z) = (z-\alpha)\mathrm{Q}(z).$$

Démonstration Si, pour tout nombre complexe z : $\mathrm{P}(z) = (z-\alpha)\mathrm{Q}(z)$; alors, pour $z = \alpha$, on obtient : $\mathrm{P}(\alpha) = (\alpha-\alpha)\mathrm{Q}(\alpha) = 0$; et donc α est racine de P.
Réciproquement, démontrons que si α est racine de P alors il existe un polynôme Q tel que, pour tout nombre complexe z, $\mathrm{P}(z) = (z-\alpha)\mathrm{Q}(z)$.
Si P est le polynôme nul, l'implication est immédiate car n'importe quel polynôme Q convient ; nous supposons désormais le polynôme P non nul.
P est alors défini par une expression du type : $\forall z \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{P}(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$ (avec $a_n \neq 0$).
On introduit donc le polynôme T défini par : $\mathrm{T}(z) = \mathrm{P}(z+\alpha)$. T est la composée d'un polynôme de degré 1 par un polynôme de degré n, T est donc un polynôme de degré n. Il est par conséquent défini par une expression du type : $\mathrm{T}(z) = b_n z^n + \ldots + b_1 z + b_0$.
Or : $\mathrm{T}(0) = \mathrm{P}(0+\alpha) = 0$; donc : $b_0 = 0$ et $\forall z \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{T}(z) = z\left(b_n z^{n-1} + \ldots + b_1\right)$.
On en déduit que pour tout nombre complexe z : $\mathrm{P}(z) = \mathrm{T}(z-\alpha) = (z-\alpha)\underbrace{\left(b_n (z-\alpha)^{n-1} + \ldots + b_1\right)}_{\mathrm{Q}(z)}$.
la propriété est alors démontrée est introduisant le polynôme Q défini par : $\mathrm{Q}(z) = b_n(z-\alpha)^{n-1} + \ldots + b_1$. □

Le lemme suivant est une conséquence du théorème fondamental de l'algèbre.

LEMME VII.5.2

Un polynôme non nul de degré inférieur ou égal à n a au plus n racines distinctes.

Démonstration Raisonnons par récurrence sur le degré de P.
Un polynôme non nul de degré inférieur ou égal à 0 est un polynôme constant non nul, il n'a donc pas de racine et la propriété est démontrée pour $n = 0$.

Il ne reste plus qu'à démontrer que si pour un certain entier naturel k, tout polynôme non nul de degré inférieur ou égal à k a au plus k racines distinctes, alors tout polynôme non nul de degré inférieur ou égal à $k+1$ a au plus $k+1$ racines distinctes.
Soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à $k+1$ ayant plus de $k+1$ racines distinctes et soit α l'une d'elle. On aura pour tout nombre complexe z : $\mathrm{P}(z) = (z-\alpha)\mathrm{Q}(z)$; où Q est un polynôme de degré inférieur ou égal à k. P ayant plus de $k+1$ racines distinctes, Q a plus k racines distinctes et d'après l'hypothèse de récurrence, Q est donc le polynôme nul ; d'où, par produit, P est le polynôme nul.
Donc, par récurrence, un polynôme non nul de degré n ($n \in \mathbb{N}$) a au plus n racines distinctes. □

THÉORÈME VII.5.3

(1) Un polynôme de degré n a au plus n racines distinctes.
(2) Deux polynômes de degrés inférieurs ou égaux à n coïncidant en $(n+1)$ valeurs distinctes sont égaux.

Démonstration (1) est une conséquence immédiate de lemme précédent.
(2) Si P et T sont deux polynômes de degré inférieurs ou égaux à n coïncidant en $(n+1)$ valeurs distinctes alors P-T est un polynôme degré inférieur ou égal à n qui a $n+1$ racines distinctes ; donc d'après le lemme, $\mathrm{P}-\mathrm{T}$ est le polynôme nul ; d'où : $\mathrm{P} = \mathrm{T}$. □

VII.5.2 Résolution des équations du second degré

VII.5.2.a Factorisation d'un trinôme du second degré

On se propose de factoriser dans $\mathbb{C}$ le polynôme P défini par : $\mathrm{P}(z) = az^2 + bz + c$
où a, b et c sont des nombres complexes avec $a \neq 0$.
Procédons, comme en classe de Première dans la cas réel, en utilisant la forme canonique. Pour tout nombre complexe z, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(z) &= a\left(z^2 + 2\frac{b}{2a}z + \frac{c}{a}\right) && \text{, car } a \neq 0 \\
&= a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\
&= a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right].
\end{aligned}$$

On introduit le nombre Δ, appelé *discriminant* de l'équation ou du trinôme, défini par : $\Delta = b^2 - 4ac$.
Si $\Delta = 0$, alors : $\mathrm{P}(z) = a\left(z+\dfrac{b}{2a}\right)^2$.
Si $\Delta \neq 0$ et on introduit δ une racine carrée complexe de Δ. On a alors :

$$\begin{aligned} P(z) &= a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\delta^2}{(2a)^2}\right]\\ &= a\left(z+\frac{b}{2a}+\frac{\delta}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}-\frac{\delta}{2a}\right)\\ &= a\left(z-\frac{-b-\delta}{2a}\right)\left(z-\frac{-b+\delta}{2a}\right)\end{aligned}$$

On déduit de cette étude le théorème suivant.

THÉORÈME VII.5.4

(1) Tout trinôme du second degré à coefficients complexes peut se décomposer en produit de deux facteurs de degré 1.

(2) Les racines du polynôme d'indéterminée z : az^2+bz+c ;
où a, b et c sont des nombres complexes avec $a \neq 0$, sont :

$$z_1=\frac{-b-\delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2=\frac{-b+\delta}{2a}$$

où δ est l'une des deux racines carrées complexes du discriminant : $\Delta = b^2-4ac$.
On a alors la factorisation :

$$az^2+bz+c=a(z-z_1)(z-z_2)$$

Remarques

1. *Les racines carrées de Δ sont δ et $-\delta$, donc remplacer δ par $-\delta$ ne fait qu'échanger z_1 et z_2.*

2. *Lorsque $\Delta=0$ les racines carrées du discriminant sont égales et on a : $z_1=z_2$.*

3. *Lorsque $\Delta\neq 0$, on a : $z_1\neq z_2$.*

Exercice VII.5.1. ***1. Déterminer, sous forme algébrique, les racines carrées de $2i$.***
2. Factoriser le trinôme : $P(z)=(1-i)z^2-\sqrt{2}z+\frac{1}{2}$.

Solution 1. *On a : $2i=2e^{i\frac{\pi}{2}}=\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2=\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^2=\left(\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^2=(1+i)^2$;*
Les racines carrées complexes de $2i$ sont donc : $1+i$ et $-1-i$.

2. *Le discriminant du trinôme est : $\Delta=\left(-\sqrt{2}\right)^2-4(1-i)\times\frac{1}{2}=2i=(1+i)^2$;*
il admet donc deux racines : $z_1=\dfrac{\sqrt{2}+(1+i)}{2(1-i)}=\dfrac{\sqrt{2}(1+i)+(1+i)^2}{2(1^2+1^2)}=\dfrac{\sqrt{2}(1+i)+2i}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}+i\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$
et $z_2=\dfrac{\sqrt{2}-(1+i)}{2(1-i)}=\dfrac{\sqrt{2}(1+i)-2i}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}+i\dfrac{-2+\sqrt{2}}{4}$.
Donc : $P(z)=(1-i)\left(z-\dfrac{\sqrt{2}}{4}-i\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}\right)\left(z-\dfrac{\sqrt{2}}{4}-i\dfrac{-2+\sqrt{2}}{4}\right)$ □

VII.5.2.b Résolution d'équations du second degré

On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation, d'inconnue z, (E) : $az^2+bz+c=0$;
où a, b et c sont des nombres complexes avec $a\neq 0$.
Reprenons les notations du théorème VII.5.4 ; on a :
$az^2+bz+c=0 \iff a(z-z_1)(z-z_2)=0 \iff (z=z_1 \quad \text{ou} \quad z=z_2)$.
On en déduit que lorsque $\Delta=0$, l'équation admet une solution double : $z=-\dfrac{b}{2a}$.
Lorsque $\Delta\neq 0$, l'équation admet deux solutions distinctes.

Exemples

1. ***Exercice VII.5.2.*** ***Résoudre dans $\mathbb{C}$, (E) : $2z^2+3z+3=0$***

Le discriminant est : $\Delta=3^2-4\times2\times3=-15=\left(i\sqrt{15}\right)^2$; donc : $S=\left\{\dfrac{-3-i\sqrt{15}}{4};\dfrac{-3+i\sqrt{15}}{4}\right\}$.

2. ***Exercice VII.5.3.*** ***Résoudre dans $\mathbb{C}$, (E) : $2z^2+3z-1=0$***

Le discriminant est : $\Delta=3^2-4\times2\times(-1)=17=\left(\sqrt{17}\right)^2$; donc : $S=\left\{\dfrac{-3-\sqrt{17}}{4};\dfrac{-3+\sqrt{17}}{4}\right\}$

VII.5.2.c Somme et produit de racines

Reprenons les notations du théorème VII.5.4 ; pour tout nombre complexe z on a :

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2) = az^2 - a(z_1 + z_2)z + az_1z_2$$

On en déduit, par identifications, que : $b = -a(z_1 + z_2)$ et $c = az_1z_2$.
D'où l'on tire le théorème suivant.

THÉORÈME VII.5.5
Soit $az^2 + bz + c$ un trinôme du second degré ($a \neq 0$), S la somme et P le produit des racines. On a :

$$\mathrm{S} = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad \mathrm{P} = \frac{c}{a}$$

Exemple **Exercice VII.5.4.** ***Résoudre : $3z^2 + 4z - 1 = 0$.***

On remarque que 1 est solution évidente, on sait que le produit des solutions dans $\mathbb{C}$ est $-\frac{1}{3}$ donc l'autre solution est : $-\frac{1}{3}$; d'où : $S = \left\{1; -\frac{1}{3}\right\}$

VII.6 Utilisation des nombres complexes (compléments)

Dans toute cette partie n désigne un entier naturel tel que : $n \geqslant 2$.

VII.6.1 Racines n-ièmes de l'unité

On appelle racine n-ième de l'unité tout nombre complexe z vérifiant : $z^n = 1$.
Les racines n-ièmes de l'unité sont donc les racines du polynôme de degré n : $z^n - 1$;
il y a donc au plus n racines n-ièmes de l'unité distinctes.
Pour tout entier k le nombre $\mathrm{e}^{ki\frac{2\pi}{n}}$ est racine n-ième de l'unité ; en effet : $\left(\mathrm{e}^{ki\frac{2\pi}{n}}\right)^n = \mathrm{e}^{ik2\pi} = 1$.
De plus deux entiers k et k' génèrent la même racine si et seulement si $\mathrm{e}^{ki\frac{2\pi}{n}} = \mathrm{e}^{k'i\frac{2\pi}{n}}$; c'est-à-dire : $\mathrm{e}^{i2\pi\frac{k-k'}{n}} = 1$; ce qui signifie que $k - k'$ est multiple de n c'est-à-dire que k et k' ont le même reste par la division par n. Or les restes possibles par la division par n sont les entiers compris entre 0 et $n-1$; on obtient donc toute les racines n-ièmes de l'unité en faisant varié k de 0 à $n-1$.
Sur la figure ci-contre, pour tout k, M_k est le point d'affixe $\mathrm{e}^{ki\frac{2\pi}{n}}$.
Si z est une racine n-ième de l'unité, alors $\overline{z}^n = \overline{z^n} = \overline{1} = 1$; donc $\overline{z}$ est également une racine n-ième de l'unité. On en déduit qu'à part 1 et éventuellement -1 (lorsque n est pair) les racines n-ièmes de l'unité sont deux à deux conjuguées.
Lorsqu'on effectue la somme des racines n-ièmes de l'unité, on obtient : $\mathrm{S} = 1 + \left(\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}}\right) + \left(\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^2 + \left(\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^3 + \cdots + \left(\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^{n-1}$. On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique, donc : $\mathrm{S} = \dfrac{1 - \left(\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^n}{1 - \left(\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}}\right)} = 0$.
La somme des racines n-ièmes de l'unité est nulle.

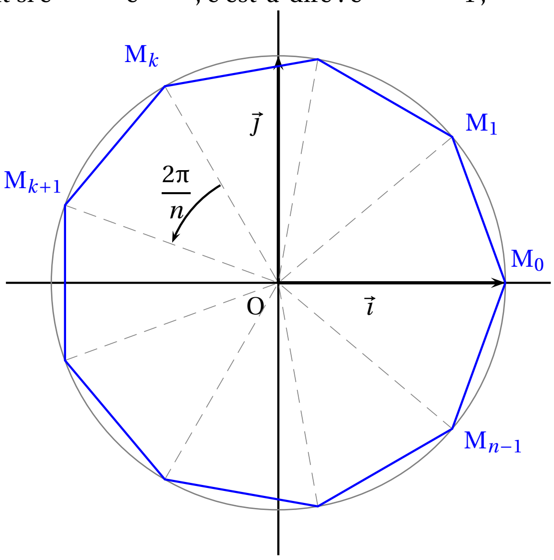


FIGURE VII.6 – Racines n-ièmes de l'unité

VII.6.2 Racines n-ièmes d'un nombre complexe non nul

Soit Z un nombre complexe non nul. On appelle racine n-ième de Z tout nombre complexe z vérifiant : $z^n = \mathrm{Z}$.
Les racines n-ièmes de Z sont donc les racines du polynôme de degré n : $z^n - \mathrm{Z}$;
il y a donc au plus n racines n-ièmes de Z distinctes.
Soit r le module et θ un argument de Z. Posons : $w = \frac{z}{\sqrt[n]{r}}\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{n}}$. On a donc : $z = \sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{n}}\,w$. On en déduit que : $z^n = \mathrm{Z} \iff \left(\sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{n}}\right)^n w^n = \mathrm{Z} \iff \mathrm{Z}w^n = \mathrm{Z} \iff w^n = 1$ (car $\mathrm{Z} \neq 0$.
z est donc racine n-ième de Z si et seulement si w est racine n-ième de l'unité. On sait qu'il y a n racines n-ième de

l'unité distinctes, il y donc également n racines n-ième de Z distinctes, ce sont les nombres de la forme : $\sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{n}}\,w$ où w est une racine n-ième de l'unité. Les racines n-ième de Z sont donc les nombres de la forme :

$$\sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{i\frac{\theta+k2\pi}{n}} \qquad (\text{avec } k \in \mathbb{Z}).$$

On établi de la même façon qu'en VII.6.1 que la somme des racines n-ièmes de Z est nulles.

Exercice VII.6.1. ***Déterminer les racines quatrièmes de*** $1+i$.

Solution *On a :* $1+i = \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$ *; donc :* $\left(\sqrt[8]{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{16}}\right)^4 = 1+i$*. On sait que les racines quatrièmes de l'unité sont :* 1 *;* i *;* -1 *et* $-i$ *; les racines quatrièmes de* $1+i$ *sont donc :* $\sqrt[8]{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{16}}$ *;* $i\sqrt[8]{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{16}}$ *;* $-\sqrt[8]{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{16}}$ *et* $-i\sqrt[8]{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{16}}$ *; c'est-à-dire :*

$$\sqrt[8]{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{16}}\,; \qquad \sqrt[8]{2}\mathrm{e}^{i\frac{9\pi}{16}}\,; \qquad \sqrt[8]{2}\mathrm{e}^{i\frac{17\pi}{16}}\,; \qquad \sqrt[8]{2}\mathrm{e}^{i\frac{25\pi}{16}}\,.$$

□

VII.6.3 Polynômes

VII.6.3.a Factorisation de polynômes symétriques

Considérons le polynôme : $2z^3+3z^2+3z+2$;
on observe une symétrie dans les coefficients : 2 ; 3 ; 3 ; 2.
On dit que le polynôme est symétrique.
Plus généralement un polynôme de degré n : $\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$;
est dit symétrique lorsque pour tout entier naturel k ($k \leqslant n$), on a : $a_k = a_{n-k}$.

Exercice VII.6.2. ***On se propose de factoriser, dans*** $\mathbb{C}$ ***puis dans*** $\mathbb{R}$***, le polynôme P défini par :***

$$P(z) = 4z^6+4z^5+21z^4+17z^3+21z^2+4z+4.$$

1. a. Démontrer que si un nombre complexe α ***est racine de P, alors son conjugué*** $\overline{\alpha}$ ***est également racine de P.***
b. 0 est-il racine de P ?
c. Démontrer que si un nombre complexe α ***est racine de P, alors son inverse*** $\frac{1}{\alpha}$ ***est également racine de P.***

2. a. Calculer $P(2i)$.
b. En déduire trois autres racines de P.
c. Décomposer P en produit d'un facteur de degré 4 par un facteur de degré 2.

3. a. Factoriser le polynôme : $Q(z) = z^2+z+1$.
b. Décomposer $P(z)$ ***sous forme d'un produit de six facteurs de degré 1 à coefficients complexes.***
c. Décomposer $P(z)$ ***sous forme d'un produit de trois facteurs de degré 2 à coefficients réels.***

Solution 1. a. *Soit* α *une racine de P, s'il en existe ; on a donc :* $P(\alpha)=0$ *; d'où :* $\overline{P(\alpha)} = 0$.

Or :
$$\begin{aligned}
\overline{P(\alpha)} &= \overline{4\alpha^6+4\alpha^5+21\alpha^4+17\alpha^3+21\alpha^2+4\alpha+4}\\
&= 4\overline{\alpha^6}+4\overline{\alpha^5}+21\overline{\alpha^4}+17\overline{\alpha^3}+21\overline{\alpha^2}+4\overline{\alpha}+4\\
&= 4\overline{\alpha}^6+4\overline{\alpha}^5+21\overline{\alpha}^4+17\overline{\alpha}^3+21\overline{\alpha}^2+4\overline{\alpha}+4\\
&= P\left(\overline{\alpha}\right)
\end{aligned}$$

Donc si un nombre complexe α *est racine de P, alors son conjugué* $\overline{\alpha}$ *est également racine de P.*

b. $P(0)=4$ *et* $4 \neq 0$ *; donc 0 n'est pas racine de P.*

c. *Soit* α *une racine de P, s'il en existe ; d'après* **1.a.**, *on a donc :* $\alpha \neq 0$ *; et donc* $\frac{1}{\alpha}$ *est défini.*

De plus :
$$\begin{aligned}
P\left(\frac{1}{\alpha}\right) &= 4\left(\frac{1}{\alpha}\right)^6+4\left(\frac{1}{\alpha}\right)^5+21\left(\frac{1}{\alpha}\right)^4+17\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3+21\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2+4\left(\frac{1}{\alpha}\right)+4\\
&= 4\frac{1}{\alpha^6}+4\frac{1}{\alpha^5}+21\frac{1}{\alpha^4}+17\frac{1}{\alpha^3}+21\frac{1}{\alpha^2}+4\frac{1}{\alpha}+4\\
&= \frac{1}{\alpha^6}\left(4+4\alpha+21\alpha^2+17\alpha^3+21\alpha^4+4\alpha^5+4\alpha^6\right)\\
&= \frac{P(\alpha)}{\alpha^6}
\end{aligned}$$

Or : $P(\alpha)=0$ *; d'où :* $P\left(\frac{1}{\alpha}\right)=0$.

Donc si un nombre complexe α *est racine de P, alors son inverse* $\frac{1}{\alpha}$ *est également racine de P.*

2. a. *Calculons* $P(2i)$.

$$\begin{aligned}
P(2i) &= 4(2i)^6+4(2i)^5+21(2i)^4+17(2i)^3+21(2i)^2+4(2i)+4\\
&= 4\times 64\times(-1)+4\times 32\times i+21\times 16\times 1+17\times 8\times(-i)+21\times 4\times(-1)+4\times 2i+4\\
&= -256+128i+336-136i-84+8i+4\\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc $\boldsymbol{2i}$ ***est racine de P.***

b. *$2i$ est racine de P, donc son conjugué, $-2i$ et son inverse, $-\frac{i}{2}$ sont également racines de P ; $-\frac{i}{2}$ est racine de P, donc son conjugué, $\frac{i}{2}$ est également racine de P.*

Les nombres $\boldsymbol{2i}$, $\boldsymbol{-2i}$, $\boldsymbol{\frac{i}{2}}$ ***et*** $\boldsymbol{-\frac{i}{2}}$ ***sont racines de P.***

c. *P est un polynôme de degré 6 admettant $2i$ pour racine, donc d'après le théorème fondamental de l'algèbre, il existe un polynôme Q_1, de degré 5, tel que pour tout nombre complexe z : $P(z)=(z-2i)Q_1(z)$.*
On sait que : $P(-2i)=0$ et $-2i$ n'est pas racine de $(z-2i)$ donc $-2i$ est racine Q_1. Il existe donc un polynôme Q_2, de degré 4, tel que pour tout nombre complexe z : $Q_1(z)=(z+2i)Q_2(z)$; soit : $P(z)=(z-2i)(z+2i)Q_2(z)$.

En réitérant le procédé pour $\frac{i}{2}$ et $-\frac{i}{2}$, on en déduit qu'il existe un polynôme Q_4, de degré 2, tel que pour tout nombre complexe z : $P(z)=(z-2i)(z+2i)(z-\frac{i}{2})(z+\frac{i}{2})Q_4(z)$.

Posons : $Q=\frac{1}{4}Q_4$.

On a alors pour tout z de $\mathbb{C}$:
$$\begin{aligned}
P(z) &= 4(z-2i)(z+2i)(z-\tfrac{i}{2})(z+\tfrac{i}{2})Q(z)\\
&= (z-2i)(z+2i)(2z-i)(2z+i)Q(z)\\
&= (z^2+4)(4z^2+1)Q(z)\\
&= (4z^4+17z^2+4)Q(z)
\end{aligned}$$

Pour déterminer l'expression de $Q(z)$ deux méthode s'offrent à nous, on peut procéder par identification ou effectuer la division euclidienne de $4z^6+4z^5+21z^4+17z^3+21z^2+4z+4$ par $4z^4+17z^2+4$.

1re méthode

Q est un polynôme de degré 2, il a donc une expression de la forme : $Q(z)=az^2+bz+c$.
On a donc pour tout z de $\mathbb{C}$:
$$\begin{aligned}
4z^6+4z^5+21z^4+17z^3+21z^2+4z+4 &= \left(4z^4+17z^2+4\right)\left(az^2+bz+c\right)\\
&= 4az^6+4bz^5+(4c+17a)z^4+17bz^3+(17c+4b)z^2+4bz+4c
\end{aligned}$$

Ces deux polynômes coïncident en une infinité de valeurs, ils sont donc égaux et par conséquent ils ont les mêmes coefficients ; a, b et c sont donc solutions du système :

$$\begin{cases}
4a & & & = & 4\\
 & 4b & & = & 4\\
17a & & +4c & = & 21\\
 & 17b & & = & 17\\
 & 4b & +17c & = & 21\\
 & 4b & & = & 4\\
 & & 4c & = & 4
\end{cases}$$

Le sous-système constitué de la 1re, la 2e, la 4e, la 6e et la 7e équation a pour unique solution : $a=b=c=1$; et cette solution est également solution des deux équations restantes, donc Q est le polynôme défini par : $Q(z)=z^2+z+1$.
Donc, pour tout z de $\mathbb{C}$: $\boldsymbol{P(z)=\left(4z^4+17z^2+4\right)\left(z^2+z+1\right)}$.

2e méthode

Effectuons la division euclidienne de $P(z)$ par $4z^4+17z^2+4$.

$$\begin{array}{rrrrrrr|l}
4z^6 & +4z^5 & +21z^4 & +17z^3 & +21z^2 & +4z & +4 & 4z^4+17z^2+4\\
\cline{8-8}
 & 4z^5 & +4z^4 & +17z^3 & +17z^2 & 4z & +4 & z^2+z+1\\
 & & 4z^4 & & +17z^2 & & +4 & \\
 & & & & & & 0 &
\end{array}$$

Donc, pour tout z de $\mathbb{C}$: $\boldsymbol{P(z)=\left(4z^4+17z^2+4\right)\left(z^2+z+1\right)}$.

3. a. *Le discriminant de Q est : $\Delta=1-4=-3=\left(i\sqrt{3}\right)^2$;*
les racines de Q sont donc : $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\overline{j}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

De plus, le coefficient de degré 2 de Q est 1, on en déduit que pour tout z de $\mathbb{C}$, on a :

$$Q(z) = \left(z + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(z + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

***b.** D'après **2.c.** et **3.a.**, on a donc pour tout z de $\mathbb{C}$:*

$$P(z) = (z-2i)(z+2i)(2z-i)(2z+i)\left(z + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(z + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

***c.** En effectuant le produit des facteurs dont les coefficients sont conjugués, on obtient alors pour tout z de $\mathbb{C}$:*

$$P(z) = (z^2+4)(4z^2+1)\left(z^2+z+1\right).$$

□

On remarque que 0 n'est jamais racine d'un polynôme symétrique de degré n : $\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$;
car : $P(0) = a_0 = a_n$ et $a_n \neq 0$.

M Pour déterminer les racines d'un polynôme symétrique à coefficients réels, on peut combiner deux propriétés :

1. Si α est racine de P, alors $\overline{\alpha}$ est également racine de P. Géométriquement, cela signifie que l'image de l'ensemble des racines de P est symétrique par rapport à l'axe réel.
2. Si α est racine de P, alors $\frac{1}{\alpha}$ est également racine de P. Géométriquement, cela signifie, en utilisant la propriété précédente, que l'ensemble des racines de P est invariant par la transformation du plan complexe privé de l'origine qui à tout point M d'affixe d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \frac{1}{\overline{z}}$.
   Cette transformation est une inversion de pôle O et de puissance 1, on la rencontrera peut-être dans un exercice de géométrie.

On déduit de ces deux propriétés que si α est racine de P, alors $\overline{\alpha}$, $\frac{1}{\alpha}$ et $\frac{1}{\overline{\alpha}}$ sont également racines de P. Ce qui permet, lorsque $\Im\text{m}(\alpha) \neq 1$ et $|\alpha| \neq 1$, de faire apparaître dans P quatre facteurs de degré 1.

VII.6.3.b factorisation de $x^n - y^n$

EN PROJET

VII.6.4 Forme algébrique des racines carrées d'un nombre complexe

Soit Z un nombre complexe non nul de forme algébrique : $Z = A + iB$; on se propose de déterminer la forme algébrique des racines carrées complexes de Z. On cherche donc les nombres z de forme algébrique : $z = a + ib$; tels que : $z^2 = Z$.

On remarque que : $|z|^2 = |Z|$; les couples $(a;b)$ cherchés sont donc les solutions du système : $\begin{cases} a^2+b^2 &= |Z| \\ a^2-b^2 &= \Re\text{e}(Z) \\ 2ab &= \Im\text{m}(Z) \end{cases}$

Pour résoudre ce système on utilise les deux premières équations pour déterminer a^2 et b^2, puis on se sert de la dernière pour déterminer les signes relatifs de a et b.

Exemples

1.** **Exercice VII.6.3.** **Déterminer les racines carrées complexes de $2+3i$.

On a : $|2+3i| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$.

Soit z un nombre complexe de forme algébrique : $z = a + ib$; on a : $z^2 = (a^2-b^2) + i(2ab)$ et $|z|^2 = a^2+b^2$.

z est racine carrée de $2+3i$ si et seulement si $(a;b)$ est solution du système : (Σ) $\begin{cases} a^2+b^2 &= \sqrt{13} \\ a^2-b^2 &= 2 \\ 2ab &= 3 \end{cases}$.

$$(\Sigma) \iff \begin{cases} 2a^2 &= \sqrt{13}+2 \\ 2b^2 &= \sqrt{13}-2 \\ 2ab &= 3 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 &= \dfrac{\sqrt{13}+2}{2} \\ b^2 &= \dfrac{\sqrt{13}-2}{2} \\ 2ab &= 3 \end{cases}.$$

On a donc : $\left(a = \sqrt{\frac{\sqrt{13}+2}{2}} \text{ ou } a = -\sqrt{\frac{\sqrt{13}+2}{2}}\right)$ et $\left(b = \sqrt{\frac{\sqrt{13}-2}{2}} \text{ ou } b = -\sqrt{\frac{\sqrt{13}-2}{2}}\right)$ et a et b sont de même signe.

Les racines carrées de $2+3i$ sont donc : $z = \sqrt{\frac{\sqrt{13}+2}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{13}-2}{2}}$;

et son opposé : $-z = -\sqrt{\frac{\sqrt{13}+2}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{13}-2}{2}}$.

2. **Exercice VII.6.4.** ***Déterminer*** $\cos\frac{\pi}{8}$ ***et*** $\sin\frac{\pi}{8}$.

$e^{i\frac{\pi}{8}}$ *est une racine carrée de* $e^{i\frac{\pi}{4}}$ *et :* $e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ *; donc :*

$$\begin{cases} \cos^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{\pi}{8} & = & 1 \\ \cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8} & = & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \qquad \textit{soit } 2\cos^2\frac{\pi}{8} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \textit{ et } 2\sin^2\frac{\pi}{8} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\,;$$

d'où : $\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$ *et* $\sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$.

On sait de plus que : $\frac{\pi}{8} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ *; donc :* $\cos\frac{\pi}{8} \geqslant 0$ *et* $\sin\frac{\pi}{8} \geqslant 0$ *;*

d'où : $\boldsymbol{\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$ *et* $\boldsymbol{\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$

VII.6.5 Trigonométrie

L'exponentielle complexe permet de retrouver assez rapidement beaucoup de formules de trigonométrie. Cette partie du cours donne quelques exemples de façons de procéder.

VII.6.5.a Détermination de lignes trigonométriques particulières

Exercice VII.6.5. ***Déterminer les lignes trigonométriques de*** $\frac{\pi}{12}$.

Solution *On a :* $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ *; donc :*

$e^{i\frac{\pi}{12}} = e^{i\frac{\pi}{3}}e^{-i\frac{\pi}{4}} = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ *; on en déduit que :*

$$\cos\frac{\pi}{12} = \Re e\left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \qquad \textit{et} \qquad \sin\frac{\pi}{12} = \Im m\left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4};$$

d'où :

$$\tan\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)} = \frac{8-2\sqrt{12}}{4} = 2-\sqrt{3}. \square$$

VII.6.5.b Formules usuelles de trigonométrie

Dérivées

D'un point de vue formel la dérivée de la fonction $t \mapsto e^{it}$ est la fonction $t \mapsto i\,e^{it}$, or pour tout nombre réel t, on a : $i\,e^{it} = -\sin(t) + i\cos(t)$. On retrouve ainsi facilement que la dérivée de cos est $-\sin$ et que la dérivée de sin est cos.

Transformation de produit en somme

Les formules transformations de produit en somme sont très faciles à retrouver.
Soit a et b deux nombres réels, on a par exemple :

$$\begin{aligned} \cos a \cos b &= \frac{e^{ia}+e^{-ia}}{2} \cdot \frac{e^{ib}+e^{-ib}}{2} \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{i(a+b)} + e^{i(a-b)} + e^{i(-a+b)} + e^{i(-a-b)}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{i(a+b)}+e^{-i(a+b)}}{2} + \frac{e^{i(a-b)}+e^{-i(a-b)}}{2}\right). \end{aligned}$$

On retrouve donc :

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\big(\cos(a+b) + \cos(a-b)\big)$$

Transformation de somme en produit

Les formules transformations de somme en produit sont également très faciles à retrouver. Soit p et q deux nombres réels, on a d'une part : $e^{ip} + e^{iq} = (\cos p + \cos q) + i(\sin p + \sin q)$; d'autre part en remarquant que :

$p = \frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{2}$ et $q = \frac{p+q}{2} - \frac{p-q}{2}$; il vient :
$e^{ip} + e^{iq} = e^{i\frac{p+q}{2}}\left(e^{i\frac{p-q}{2}} + e^{-i\frac{p-q}{2}}\right) = 2\left(\cos\frac{p+q}{2} + i\sin\frac{p+q}{2}\right)\cos\frac{p-q}{2}$.
En identifiant parties réelles et parties imaginaires, il vient :

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

VII.6.5.c Linéarisation de polynômes en $\cos x$ et en $\sin x$

VII.6.5.d Exercices divers

Exercice VII.6.6. ***Soit α un nombre réel. On considère la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :***

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(k\alpha)}{2^k}.$$

Exprimer C_n, pour $n \in \mathbb{N}$, sans signe somme. En déduire la limite de la suite (C_n).

Solution *Il suffit d'introduire la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(k\alpha)}{2^k}$.*

On a alors, pour $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$C_n + iS_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(k\alpha) + i\sin(k\alpha)}{2^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{ik\alpha}}{2^k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{e^{i\alpha}}{2}\right)^k.$$

On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique, donc :

$$C_n + iS_n = \frac{1 - \frac{e^{i(n+1)\alpha}}{2^{n+1}}}{1 - \frac{e^{i\alpha}}{2}} = \frac{\left(1 - \frac{e^{i(n+1)\alpha}}{2^{n+1}}\right)\left(1 - \frac{e^{-i\alpha}}{2}\right)}{\left(1 - \frac{e^{i\alpha}}{2}\right)\left(1 - \frac{e^{-i\alpha}}{2}\right)} = \frac{1 - \frac{e^{-i\alpha}}{2} - \frac{e^{i(n+1)\alpha}}{2^{n+1}} + \frac{e^{in\alpha}}{2^{n+2}}}{1 - \cos\alpha + \frac{1}{4}};$$

d'où :

$$C_n + iS_n = \frac{\left[4 - 2\cos\alpha - \frac{\cos\left((n+1)\alpha\right)}{2^{n-1}} + \frac{\cos\left(n\alpha\right)}{2^n}\right] + i\left[2\sin\alpha - \frac{\sin\left((n+1)\alpha\right)}{2^{n-1}} + \frac{\sin\left(n\alpha\right)}{2^n}\right]}{5 - 4\cos\alpha}.$$

On en déduit que pour tout entier naturel n :

$$C_n = \Re e\left(C_n + iS_n\right) = \frac{4 - 2\cos\alpha - \frac{\cos\left((n+1)\alpha\right)}{2^{n-1}} + \frac{\cos\left(n\alpha\right)}{2^n}}{5 - 4\cos\alpha}.$$

On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left|\frac{\cos\left((n+1)\alpha\right)}{2^{n-1}}\right| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}} \quad \text{et} \quad \left|\frac{\cos\left(n\alpha\right)}{2^n}\right| \leqslant \frac{1}{2^n};$$

De plus : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ *; donc par comparaison :*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos\left((n+1)\alpha\right)}{2^{n-1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cos\left(n\alpha\right)}{2^n} = 0.$$

Par somme puis par quotient on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} C_n = \frac{4 - 2\cos\alpha}{5 - 4\cos\alpha}.$$

□

VII.7 Géométrie et nombres complexes

Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

VII.7.1 Propriétés générales

THÉORÈME VII.7.1
Soit A, B, C, D ($A \neq B$ et $C \neq D$) quatre points d'affixes respectives : z_A ; z_B ; z_C ; z_D ; θ un réel et r un réel strictement positif. les propositions suivantes sont équivalentes.

(1) $CD = r\,AB$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) \equiv \theta \pmod{2\pi}$

(2) $z_D - z_C = r\,e^{i\theta}(z_B - z_A)$

(3) $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = r\,e^{i\theta}$

DémonstrationOn sait que $A \neq B$, donc : **(2)** $\iff$ **(3)**.
Démontrons que : **(3)** $\iff$ **1**. $z_D - z_C$ et $z_B - z_A$ sont les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AB}$; donc : $CD = |z_D - z_C|$ et $AB = |z_B - z_A|$.
De plus, d'après la relation de CHASLES sur les angles de vecteur : $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = \left(\vec{\imath}, \overrightarrow{CD}\right) - \left(\vec{\imath}, \overrightarrow{AB}\right)$;
d'où : $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) \equiv \arg(z_D - z_C) - \arg(z_B - z_A) \pmod{2\pi}$. Deux nombres complexes non nuls sont égaux si et seulement si ils ont même module et mêmes arguments, donc :

$$\textbf{(3)} \iff \left|\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right| = r \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv \theta \pmod{2\pi}.$$

En utilisant la propriété **(4)** du théorème VII.3.3 page 84, on en déduit que :

$$\textbf{(3)} \iff \frac{|z_D - z_C|}{|z_B - z_A|} = r \quad \text{et} \quad \arg(z_D - z_C) - \arg(z_B - z_{}) \equiv \theta \pmod{2\pi}.$$

D'où il vient : **(3)** $\iff$ **(1)**. □

VII.7.2 Écriture complexe de quelques transformations usuelles

Dans le tableau VII.2, pour chaque transformation, M désigne un point d'affixe z et M' désigne l'image de M. L'écriture complexe exprime l'affixe de M' en fonction de celle de M.

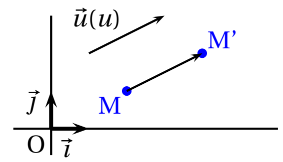
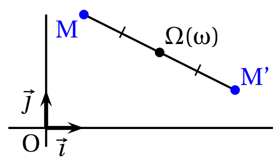
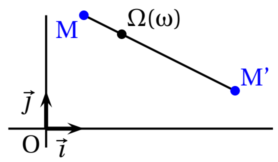
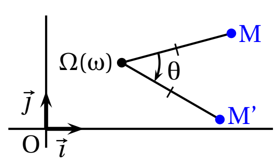
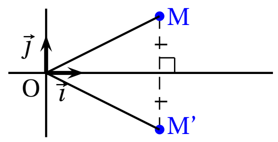
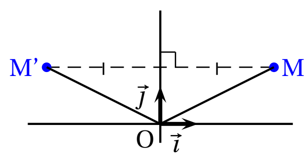
Transformation	M a pour image M'	Définition géométrique	Écriture complexe
Translation de vecteur $\vec{u}(u)$		$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$	$z' = z + u$ $u \in \mathbb{C}$
Symétrie de centre $\Omega(\omega)$		$\overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{\Omega M}$	$z' = -z + 2\omega$ $\omega \in \mathbb{C}$
Homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport k		$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$	$z' = k(z - \omega) + \omega$ $\omega \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{R}^*$
Rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ		$\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta \end{cases}$	$z' = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega$ $\omega \in \mathbb{C}$ et $\theta \in \mathbb{R}$
Réflexion par rapport à l'axe réel		$\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \left(\vec{\imath}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = -\left(\vec{\imath}, \overrightarrow{\Omega M}\right) \end{cases}$	$z' = \overline{z}$
Réflexion par rapport à l'axe imaginaire		$\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \left(\vec{\jmath}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = -\left(\vec{\jmath}, \overrightarrow{\Omega M}\right) \end{cases}$	$z' = -\overline{z}$

TABLE VII.2 – Écriture complexe de quelques transformations

VII.7.3 Affixe du barycentre d'un système de points pondérés

On déduit de la définition du barycentre et des propriétés des affixes de vecteurs le théorème suivant.

THÉORÈME VII.7.2

Soit $A_1, A_1, \ldots, A_n$, n points d'affixes respectives $z_{A_1}, z_{A_2}, \ldots, z_{A_n}$ et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, n nombres réels dont la somme n'est pas nulle.
L'affixe, z_G, du barycentre G du système de points pondérés $\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \ldots, (A_n, \alpha_n)\}$ est :

$$z_G = \frac{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k z_{A_k}}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k}$$

Exemples

1. *L'affixe du milieu de [AB] est :* $\dfrac{z_A + z_B}{2}$ *;*
2. *L'affixe du centre de gravité du triangle ABC est :* $\dfrac{z_A + z_B + z_C}{3}$.

Chapitre VIII

Intégration

VIII.1 Primitives d'une fonction

VIII.1.1 Introduction

Les intervalles considérés dans cette partie ne sont jamais réduits à un réel.

Définition VIII.1.1

Soit f une fonction et I un intervalle sur lequel f est définie.
Les primitives de f sur I (s'il en existe) sont les fonctions F définies et dérivables sur I vérifiant pour tout $x \in \mathrm{I}$:

$$\mathrm{F}'(x) = f(x).$$

Exemples

1. *Considérons la fonction $f : x \mapsto x^2$. Les fonctions $x \mapsto \dfrac{x^3}{3}$ et $x \mapsto \dfrac{x^3}{3} + 7$ sont deux primitives de f sur $\mathbb{R}$.*
2. *La fonction* ln *est une primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.*

Nous admettons le théorème suivant.

Théorème VIII.1.1

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

On sait que la dérivée d'une fonction constante définie sur un intervalle est la fonction nulle définie sur cet intervalle.
On sait également que si une fonction définie sur un intervalle a une dérivée nulle alors cette fonction est constante.
On en déduit le lemme suivant.

Lemme VIII.1.2

Soit I un intervalle.
Les primitives sur I de la fonction nulle sont les fonctions constantes définies sur I.

Théorème VIII.1.3

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I.
Les primitives de f sur I sont les fonctions $x \mapsto \mathrm{F}(x) + k$ où k est une constante réelle.

Démonstration Soit $k \in \mathbb{R}$ et G la fonction définie par : $\mathrm{G}(x) = \mathrm{F}(x) + k$. G est la somme de deux fonction dérivables sur I, elle donc dérivable sur I et pour tout $x \in \mathrm{I}$, on a : $\mathrm{G}'(x) = \mathrm{F}'(x) + 0 = f(x)$; donc G est une primitive de f sur I.

Réciproquement, soir G une primitive de f sur I, démontrons qu'elle ne diffèrent de F que d'une constante.
Pour tout $x \in \mathrm{I}$, on a : $(\mathrm{G} - \mathrm{F})'(x) = \mathrm{G}'(x) - \mathrm{F}'(x) = f(x) - f(x) = 0$; donc $\mathrm{G} - \mathrm{F}$ est une primitive sur I de la fonction nulle, on en déduit que $\mathrm{G} - \mathrm{F}$ est une fonction constante $x \mapsto k$ définie sur I ; d'où : $\mathrm{G} = \mathrm{F} + k$. □

Exemple *Les primitives sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto x^2$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \dfrac{x^3}{3} + k$ (avec $k \in \mathbb{R}$).*

Remarque *On déduit du théorème VIII.1.3 que deux primitives d'une fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante.*

Théorème VIII.1.4

Soit f un fonction continue sur un intervalle I, $a \in \mathrm{I}$ et $b \in \mathbb{R}$.
Il existe une unique primitive de f sur I prenant la valeur b en a.

Démonstration

Existence Soit G une primitive de f sur I et F la fonction définie par : $\mathrm{F}(x) = \mathrm{G}(x) - \mathrm{G}(a) + b$.
F est une primitive de f sur I et $\mathrm{F}(a) = \mathrm{G}(a) - \mathrm{G}(a) + b = b$.

Unicité Soit H une primitive de f sur I prenant la valeur b en a, démontrons que $\mathrm{H}=\mathrm{F}$.
Les fonctions F et H ont le même ensemble de définition : I. De plus ce sont deux primitives sur I de f, elle ne diffèrent donc que d'une constante, k. On a : $k=\mathrm{H}(a)-\mathrm{F}(a)=b-b=0$; donc : $\mathrm{H}=\mathrm{F}$.

□

Exemple *L'unique primitive de* $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ *sur* $]0,+\infty[$ *prenant la valeur* 7 *en* 10 *est la fonction* $x\mapsto \ln(x)-\ln(10)+7$.

VIII.1.2 Détermination pratique

En pratique pour déterminer une primitive d'une fonction sur un intervalle, on utilise les tableaux suivants qui sont essentiellement déduits des tableaux du paragraphe VI.1.3.

fonction	primitive	Intervalle
$x\mapsto k \qquad (k\in\mathbb{R})$	$x\mapsto kx$	$\mathbb{R}$
$x\mapsto x$	$x\mapsto\dfrac{x^2}{2}$	$\mathbb{R}$
$x\mapsto x^n \quad$ avec $n\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\}$	$x\mapsto\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$ si $n<-1$ $\mathbb{R}$ si $n>0$
$x\mapsto\sqrt{x}$	$x\mapsto\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$	$]0;+\infty[$
$x\mapsto\sin x$	$x\mapsto-\cos x$	$\mathbb{R}$
$x\mapsto\cos x$	$x\mapsto\sin x$	$\mathbb{R}$
$x\mapsto 1+\tan^2 x$ ou $x\mapsto\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$x\mapsto\tan x$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$ (avec $k\in\mathbb{Z}$)
$x\mapsto \mathrm{e}^x$	$x\mapsto\mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$
$x\mapsto\dfrac{1}{x}$	$x\mapsto\ln\lvert x\rvert$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$

TABLE VIII.1 – Primitives des fonctions élémentaires

fonction	primitive	remarque
$u+v$	$\mathrm{U}+\mathrm{V}$	
ku	$k\mathrm{U}$	
$u'\times u^n \quad$ avec $n\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\}$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	si $n<-1$ alors $u\neq 0$ sur I
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u>0$ sur I
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$	$u\neq 0$ sur I
$u'\mathrm{e}^u$	e^u	
$x\mapsto u(ax+b)$	$x\mapsto\dfrac{1}{a}\mathrm{U}(ax+b)$	
$v'\times(u'\circ v)$	$u\circ v$	

TABLE VIII.2 – Primitives et opérations sur les fonctions

Exercice VIII.1.1. ***Déterminer une primitive sur*** $\mathbb{R}^\star$ ***de*** $x\mapsto 2x^3+3x^2+\dfrac{5}{x^3}$.

Solution *La fonction* $x\mapsto 2x^3+3x^2$ *a pour primitive sur* $\mathbb{R}$ *la fonction* $x\mapsto\dfrac{1}{2}x^4+x^3$ *et la fonction* $x\mapsto x^{-3}$ *a pour primitive sur* $\mathbb{R}^\star$ *la fonction* $x\mapsto -2x^{-2}$.
Une primitive sur $\mathbb{R}^\star$ *de* $x\mapsto 2x^3+3x^2+\dfrac{5}{x^3}$ *est donc* $x\mapsto\dfrac{1}{2}x^4+x^3-\dfrac{5}{2x^2}$. □

Exercice VIII.1.2. ***Déterminer une primitive sur*** $\mathbb{R}$ ***de*** $x\mapsto\cos(2\pi x)+5\mathrm{e}^{3x}$.

Solution *Une primitive de* cos *est* sin, $x\mapsto\cos(2\pi x)$ *est de la forme* $x\mapsto\cos(ax+b)$ *avec* $a=2\pi$ *et* $b=0$ *; donc* $x\mapsto\dfrac{1}{2\pi}\sin(2\pi x)$ *est une primitive sur* $\mathbb{R}$ *de* $x\mapsto\cos(2\pi x)$. *De même,* $x\mapsto\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}$ *une primitive sur* $\mathbb{R}$ *de* $x\mapsto\mathrm{e}^{3x}$ *; donc une des primitives sur* $\mathbb{R}$ *de* $x\mapsto\cos(2\pi x)+5\mathrm{e}^{3x}$ *est* $x\mapsto\dfrac{1}{2\pi}\sin(2\pi x)+\dfrac{5}{3}\mathrm{e}^{3x}$. □

Exercice VIII.1.3. **Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto (3x^2-2x+3)(x^3-2x^2+3x+1)^{10}$.**

Solution *Considérons la fonction $u : x \mapsto x^3-2x^2+3x+1$. On a : $f = u'u^{10}$ donc la fonction $\frac{u^{11}}{11}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de f.*

Une des primitives sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto (3x^2-4x+3)(x^3-2x^2+3x+1)^{10}$ est $x \mapsto \frac{1}{11}(x^3-2x^2+3x+1)^{11}$. □

Exercice VIII.1.4. **Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$.**

Solution *Considérons la fonction $u : x \mapsto x^2+1$. On a : $f = \frac{1}{2}\frac{u'}{u}$ donc la fonction $\frac{1}{2}\ln|u|$, c'est-à-dire $\frac{1}{2}\ln u$ (car la fonction u est positive sur $\mathbb{R}$), est une primitive sur $\mathbb{R}$ de f.*

Une des primitives sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$ est $x \mapsto \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$. □

VIII.1.3 Exercices

VIII.1.a. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto 3x^5 - \pi x^5 + \sqrt{2}x^3 - 2x^2 + 3x - \ln 2$.

VIII.1.b. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto x\mathrm{e}^{-x^2}$.

VIII.1.c. Déterminer une primitive sur $\left]-\frac{2}{3}, +\infty\right[$ de $x \mapsto \frac{5}{3x+2}$.

VIII.1.d. Déterminer une primitive sur $\left]-\infty, -\frac{2}{3}\right[$ de $x \mapsto \frac{5}{3x+2}$.

VIII.1.e. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto 100\cos(2x+3)$.

VIII.1.f. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto 50\sin(3x+2)$.

VIII.1.g. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto 5x^2 + 3x - 1 + \frac{5}{x} - \frac{13}{x^2} + \frac{7}{x^4}$.

VIII.1.h. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \frac{5x^7 - 2x^4 + 8x^3 - 5x^2 + 6x - 1}{x^4}$.

VIII.1.i. Déterminer une primitive sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ de tan.

VIII.1.j. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \sin x \cdot \cos x$.

VIII.1.k. Déterminer une primitive sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ de $x \mapsto \tan x + \tan^3 x$.

VIII.2 Premiers calculs

VIII.2.1 Introduction

Dans tous ce chapitre le plan est muni d'un repère orthogonal $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

L'unité d'aire est l'aire du rectangle d'inéquations : $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \end{cases}$.

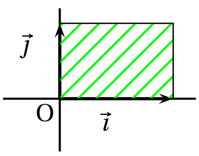


FIGURE VIII.1 –

On se propose d'aborder une théorie qui nous permette de calculer pour une fonction positive, f, définie sur un intervalle $[a, b]$ l'aire délimitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. Cette aire sera notée : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ se lit « intégrale de a à b de f de x dé x » ou « somme de a à b de f de x dé x ».

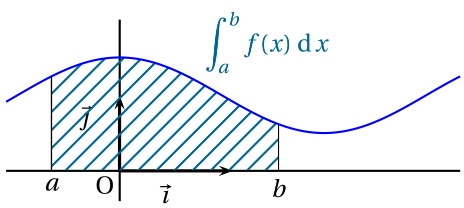


FIGURE VIII.2 –

Nous verrons que, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, a un sens même si $a > b$ ou si la fonction f n'est pas positive sur entre a et b.

À travers l'histoire les calculs d'aires ont longtemps occupés les hommes de sciences. LEIBNIZ[1] et NEWTON ont construits, de façons indépendantes et presque simultanées, une théorie de détermination d'aires et de volumes par le calcul intégral.

La construction rigoureuse du calcul intégral dans le cas des fonctions continues fut établie dans la première moitié du XIXe siècle par CAUCHY[2].

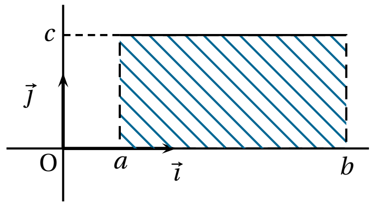
1. LEIBNIZ Gottfried Wilhelm savant Allemand 1645-1766.
2. CAUCHY Louis Augustin mathématicien Français 1789-1857.

Au milieu du XIX[e] siècle RIEMANN[3] généralisa cette théorie à une classe plus grande de fonctions. L'idée de cette théorie consiste à découper la région dont on cherche l'aire en rectangles verticaux et l'aire de la région est alors la limite des sommes des aires des rectangles quand leurs bases tend vers 0. La théorie de l'intégrale actuellement

FIGURE VIII.3 – Integrale de Riemann.

utilisée par les mathématiciens est la théorie présentée par LEBESGUE[4] dans la thèse qu'il soutint en 1902. L'exposé de cette théorie requiert généralement un niveau licence. En simplifiant, on peut dire que Lebesgue découpa la région dont on cherche l'aire en tranches horizontales et non verticales, comme l'avait fait Riemann. Là encore, la théorie de Lebesgue étend celle de Riemann à une classe plus grande de fonctions et la communauté mathématique considère cette théorie comme satisfaisante.

VIII.2.2 Intégrale d'une fonction constante



L'intégrale de a à b de la fonction $x \mapsto c$, où a, b, c sont des réels tels que : $a \leqslant b$ et $c \geqslant 0$; est l'aire de la région d'inéquations : $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ 0 \leqslant y \leqslant c \end{cases}$.

Ce nombre est noté : $\displaystyle\int_a^b c \, \mathrm{d}x$.

On a donc :

$$\int_a^b c \, \mathrm{d}x = c(b-a) \qquad \text{(VIII.1)}$$

Nous étendons la formule (VIII.1) aux cas où c est négatif ou $b < a$.

Exemples

1. *Calculer les intégrales suivantes, puis les illustrer graphiquement.*

$\displaystyle\int_2^7 3\,\mathrm{d}x$; $\displaystyle\int_7^2 3\,\mathrm{d}x$; $\displaystyle\int_{-1}^7 -2\,\mathrm{d}x$; $\displaystyle\int_7^{-1} -2\,\mathrm{d}x$.

2. *Calculer les intégrales suivantes :* $\displaystyle\int_2^5 \lambda\,\mathrm{d}x$; $\displaystyle\int_2^5 \mathrm{d}x$ *et* $\displaystyle\int_1^t 3\,\mathrm{d}x$.

Remarque *La variable d'intégration est muette.*

Exemple *Calculer :* $\displaystyle\int_2^7 3\,\mathrm{d}t$.

VIII.2.3 Intégrale d'une fonction en escalier

Soit $[a;b]$ un intervalle non réduit à un point. Une subdivision, σ, de $[a;b]$ est une suite finie et strictement croissante $x_0 = a$, x_1, $\cdots$, x_{n-1}, $x_n = b$. Le pas de cette subdivision est le plus grand des nombres $x_i - x_{i-1}$ pour $i \in [\![1;n]\!]$

Exemple

- $1 ; 1{,}5 ; 2$.
- $1 ; 1{,}3 ; 1{,}6 ; 2$.
- $1 ; 1{,}3 ; 1{,}5 ; 1{,}6 ; 2$.

sont des subdivisions de $[1;2]$ *de pas respectifs :* $0{,}5$; $0{,}4$ *et* $0{,}4$.

Tout élément de la première subdivision est élément de la troisième, on dit que la troisième est plus fine que la première.

Plus généralemant si σ et σ' sont deux subdivisions d'un intervalle $[a;b]$ la subdivision que l'on notera $\sigma \cup \sigma'$, constituée des éléments des deux subdivisions, est une subdivision plus fine que σ et σ'.

3. RIEMANN Bernhard mathématicien Allemand 1826-1866.
4. LEBESGUE Henri Léon mathématicien Français 1875-1941.

DÉFINITION VIII.2.1

Une fonction en escalier sur $[a;b]$, f, est une fonction à laquelle on peut associer une subdivision σ de $[a;b]$ telle que f soit une fonction constante sur chaque intervalle *ouvert* $]x_{i-1}, x_i[$.

Remarques

1. *Si σ' est une subdivision de $[a;b]$ plus fine que σ, alors σ' peut également être associer à f.*

2. *En pratique, on introduit les nombres $c_1, \cdots, c_i, \cdots, c_n$ tels que sur chaque intervalle $]x_{i-1}, x_i[$ la fonction f est constante et vaut : c_i.*

Soit f une fonction, positive et en escalier sur $[a;b]$, σ est une subdivision de $[a;b]$ associée à f et $c_1, \cdots, c_n$ les nombres tels que pour tout $i \in [\![0;n-1]\!]$: $f = c_i$ sur $[x_{i-1}; x_i]$. L'intégrale de f de a à b sera l'aire de la région $\mathscr{R}$ délimitée par les droites d'équations : $x = a$; $x = b$; l'axe des abscisses et la représentation graphique de f ; c'est-à-dire la région constituée des points dont les coordonnées vérifient le système :

$$\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) \end{cases}$$

$\mathscr{R}$ est constituée de n rectangles. Pour i variant de 1 à n, le i-ème rectangle a pour base $x_i - x_{i-1}$ et pour hauteur c_i il a donc pour aire : $(x_i - x_{i-1})c_i$. On en déduit que :

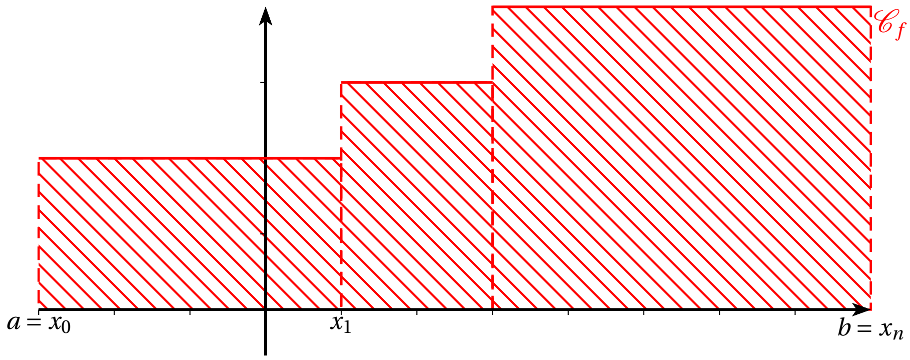


FIGURE VIII.4 – Intégrale d'une fonction en escalier positive.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \text{aire}\left(\mathscr{R}\right) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})c_i.$$

Nous admettons que cette aire est indépendante de la subdivision choisie. Ce qui justifie les définitions suivantes. Si on avait pris une subdivision plus fine $(y_j)_{j \leqslant m}$ en notant d_j la valeur de f sur $]y_{j_1}, x_j[$, on obtenait :

$$\text{aire}\left(\mathscr{A}\right) = \sum_{j=1}^{m} d_j(x_j - x_{j-1}).$$

Plus généralement on a la définition suivante.

DÉFINITIONS VIII.2.2

Soit f une fonction en escalier sur $[a;b]$ (f n'est plus nécessairement positive sur $[a;b]$).

(1) L'*intégrale* de f entre a et b est le nombre noté : $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$; défini par :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})c_i$$

où (x_i) est une subdivision de $[a;b]$ associée à f.

(2)

$$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Remarque *Les valeurs des $f(x_i)$ sont sans importance dans le calcul de cette intégrale.*

Soit α et β deux nombres, nous désignerons par $\max(\alpha;\beta)$ le plus grand des deux et par $\min(\alpha;\beta)$ le plus petit. Nous

étendons ces définitions au cas des fonctions.
Considérons par exemple sur l'intervalle $[-1;3]$ les fonctions $f: x \mapsto \frac{1}{2}x^2$ et $g: x \mapsto -x+4$. Sur $[-1;2]$: $g \geqslant f$; alors

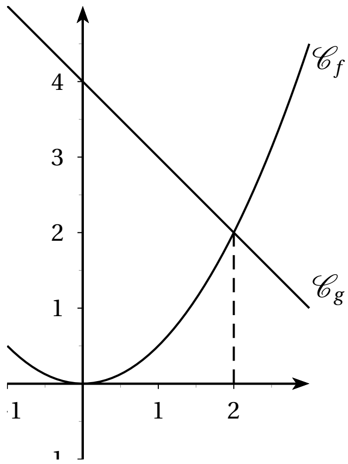


FIGURE VIII.5 – min et max de deux fonctions.

que sur $[-1;2]$: $f \geqslant g$; nous en déduisons que $\max(f,g)$ et $\min(f,g)$ sont définies par :

$$\max(f,g)(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in [-1;2] \\ f(x) & \text{si } x \in]2;3] \end{cases} \qquad \min(f,g)(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [-1;2] \\ g(x) & \text{si } x \in]2;3] \end{cases}$$

Nous admettons le théorème suivant.

THÉORÈME VIII.2.1

Soit f et g deux fonctions en escalier sur un intervalle $[a;b]$ respectivement associées à des subdivisions σ_f et σ_g.
Les fonctions $f+g$, λf (avec $\lambda \in \mathbb{R}$), $f \times g$, $\max(f,g)$ et $\min(f,g)$ sont des fonctions en escalier sur $[a;b]$ associées à la subdivision $\sigma_f \cup \sigma_g$

VIII.2.4 Activité

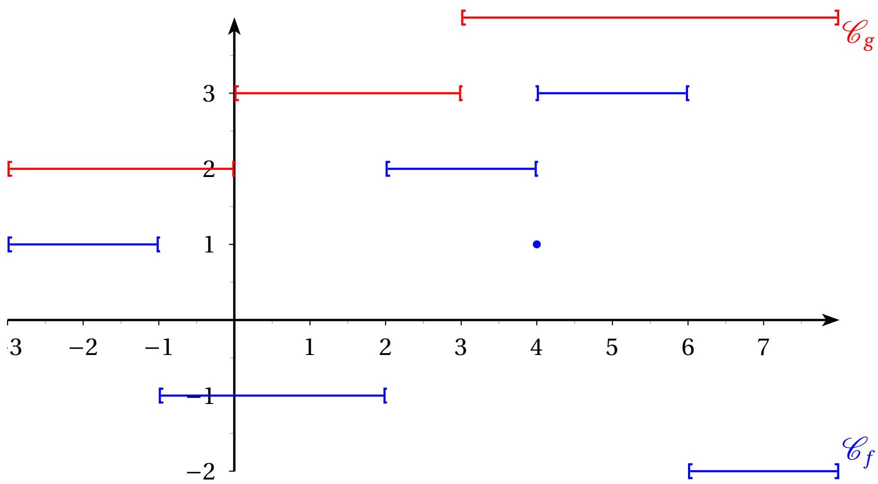


FIGURE VIII.6 – Représentations graphiques de deux fonctions en escalier.

1. Calculer : $\displaystyle\int_{-3}^{8} f(x)\,\mathrm{d}x$; $\displaystyle\int_{-3}^{8} g(x)\,\mathrm{d}x$.
Que remarque-t-on en termes de majorations ?

2. Calculer : $\displaystyle\int_{-3}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{5}^{8} f(x)\,\mathrm{d}x$.
Comparer d'une part : $\displaystyle\int_{-3}^{8} f(x)\,\mathrm{d}x$ avec $\displaystyle\int_{-3}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{5}^{8} f(x)\,\mathrm{d}x$;

d'autre part : $\int_{-3}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$ avec $\int_{-3}^{8} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{8}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$.

3. Tracer la représentation graphique de $2f$, puis calculer : $\int_{-3}^{8} 2f(x)\,\mathrm{d}x$.
Que remarque-t-on ?

4. Tracer la représentation graphique de $f+g$, puis calculer : $\int_{-3}^{8} (f+g)(x)\,\mathrm{d}x$.
Que remarque-t-on ?

VIII.2.5 Propriétés des intégrales de fonctions en escalier

L'activité ci-dessus suggère les théorèmes suivants que nous admettons.

THÉORÈME VIII.2.2 LINÉARITÉ

Soit f et g deux fonctions en escalier sur un intervalle $[a;b]$ et α un nombre réel.

(1)

$$\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

(2)

$$\int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Remarques

1. *Plus généralement :* $\int_a^b (\alpha f+\beta g)(x)\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

2. *L'intégrale d'une combinaison linéaire de fonctions est la conbinaison linéaire des intégrales. On dit que l'intégrales des fonctions en escalier est linéaire.*

THÉORÈME VIII.2.3 COMPARAISON DES INTÉGRALES

Soit f et g deux fonctions en escalier sur un intervalle $[a;b]$.

Si $f \geqslant g$ sur $[a,b]$ alors : $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Remarque *Le théorème n'est pas établi dans le cas d'une inégalité stricte.*

THÉORÈME VIII.2.4 RELATION DE CHASLES

Soit f une fonction en escalier sur un intervalle I et a, b et c trois éléments de I.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

VIII.3 Intégrale de Riemann

VIII.3.1 Définition

Nous allons maintenant définir l'intégrale d'une fonction quelconque comme une limite comune d'intégrales de fonctions en escalier.

DÉFINITION VIII.3.1

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a;b]$.
Nous dirons que f est intégrable au sens de Riemann sur $[a;b]$ s'il existe deux suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier vérifiant les propriétés suivantes :

(1) Pour tout entier naturel n, on a sur $[a;b]$: $f_n \leqslant f \leqslant g_n$.

(2) Les suites (I_n) et (J_n) définies par : $\mathrm{I}_n = \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{J}_n = \int_a^b g_n(x)\,\mathrm{d}x$; sont adjacentes.

La limite commune de ces deux suites est : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Pour justifier cette définition, nous devons établir que la limite commune des suites (I_n) et (J_n) est indépendantes des suites (f_n) et (g_n).
Soit deux suites $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier vérifiant :

– Pour tout entier naturel n, on a sur $[a;b]$: $k_n \leqslant f \leqslant l_n$.
– Les suites (K_n) et (L_n) définies par : $\mathrm{K}_n = \int_a^b k_n(x)\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{L}_n = \int_a^b l_n(x)\,\mathrm{d}x$; sont adjacentes.
  Désignons par ℓ leur limite commune.

Nous devons démontrer que : $\ell = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
On a, sur $[a;b]$, pour tout entier naturel n : $f_n \leqslant f \leqslant l_n$;
donc par comparaison des intégrales, pour tout entier naturel n : $\mathrm{I}_n \leqslant \mathrm{L}_n$.
Par comparaisons des limites (théorème III.7.7), nous en déduisons que : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \ell$.
En comparant k_n et g_n on démontre de même que : $\ell \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Donc : $\ell = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
Il serait maintenant intéressant connaître quelques fonctions intégrables au sens de Riemann. Nous admettons le théorème suivant.

THÉORÈME VIII.3.1
Les fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ ou monotones sur $[a,b]$ sont intégrables au sens de Riemann sur $[a,b]$.

VIII.3.2 Sommes de Riemann

VIII.3.2.a Introduction

Pour démontrer le théorème VIII.3.1, il faut considérer une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ puis construire les suites adjacentes (I_n) et (J_n). Pour construire ces suite qui convergent vers l'intégrale de f et donc sont des approximations de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$; on utilise les sommes de Riemann.

Soit f une fonction définie entre autre sur $[a;b]$, $(x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ est une subdivision de $[a;b]$ et $\xi_1,\cdots,\xi_n$ des nombres tels que pour tout $i \in [\![1;n]\!]$: $\xi_i \in [x_{i-1};x_i]$. La somme de Riemman de f sur $[a,b]$ associée à (x_i) et à (ξ_i) est l'intégrale de la fonction en escalier, f_e, définie par :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \qquad c_i = f(\xi_i)$$

On a alors :

$$\int_a^b f_e(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(\xi_i).$$

On devine que cette dernière intégrale sera une apprixmation de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ d'autant meilleure que la subdivision associée sera fine et que les ξ_i auront été choisis judicieusement.

En pratique on choisit le nombre, n, d'intervalles de la subdivision, puis on prend la subdivision à pas constant : $h = \dfrac{b-a}{n}$. La subdivision, σ_n, est alors définie par : $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n} = a + kh$.
Nous admettons le théorème suivant.

THÉORÈME VIII.3.2
Soit f une fonction continue ou montone sur $[a\,b]$ et (I_n) une suite de sommes de Riemann de f sur $[a,b]$, associées à σ_n.
La suite (I_n) est convergente et sa limite est : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Remarque *Ce théorème peut servir à démontrer le théorème VIII.3.1*

Nous allons maintenant examiner des exemples communs de sommes de Riemann. Le premier a un intérêt théorique, les suivants permettent de calculer des valeurs approchées d'une intégrale. Nous supposerons dans tous ces exemples que la fonction f est continue sur $[a,b]$ et nous calculerons une somme de Riemann de f sur $[a,b]$ associée à σ_n. Nous aurons ainsi :

$$\int_a^b f_e(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) = h\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i).$$

VIII.3.2.b Sommes de Darboux

Nous admettons le théorème suivant : par une fonction continue, l'image d'un intervalle fermé borné est un intervalle fermé borné.
Soit $i \in [\![1\,;n]\!]$, posons :

$$m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{M}_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$$

D'après ce théorème, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$: $f([x_{i-1}, x_1]) = [m_i, \mathrm{M}_i]$.
Il existe donc deux nombres ξ_i et ξ_i' éléments de $[x_{i-1}, x_1]$ tels que : $f(\xi_i) = m_i$ et $f(\xi_i') = \mathrm{M}_i$.
Nous appellerons respectivement somme de Darboux[5] inférieure et somme de Darboux supérieure de f relativement à σ_n les nombres $s_{\sigma_n}(f)$ et $\mathrm{S}_{\sigma_n}(f)$ définis par :

$$s_{\sigma_n}(f) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{S}_{\sigma_n}(f) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{M}_i(x_i - x_{i-1}).$$

On peut visualiser les sommes de Darboux en utilisant Geogebra.

Exemple *On se propose d'encadrer* $\int_1^7 f(x)\,\mathrm{d}x$ *entre deux sommes de Darboux dans le cas de la fonction* $f : x \mapsto \dfrac{x}{3} + 1 + \sin x$.
On entre successivement les instructions suivantes dans la ligne de commandes :

- *`f(x) = 1 + x / 3 + sin(x)`*
- *`n=6`*
- *`SommeInférieure[f, 1, 7, n]`*
- *`SommeSupérieure[f, 1, 7, n]`*

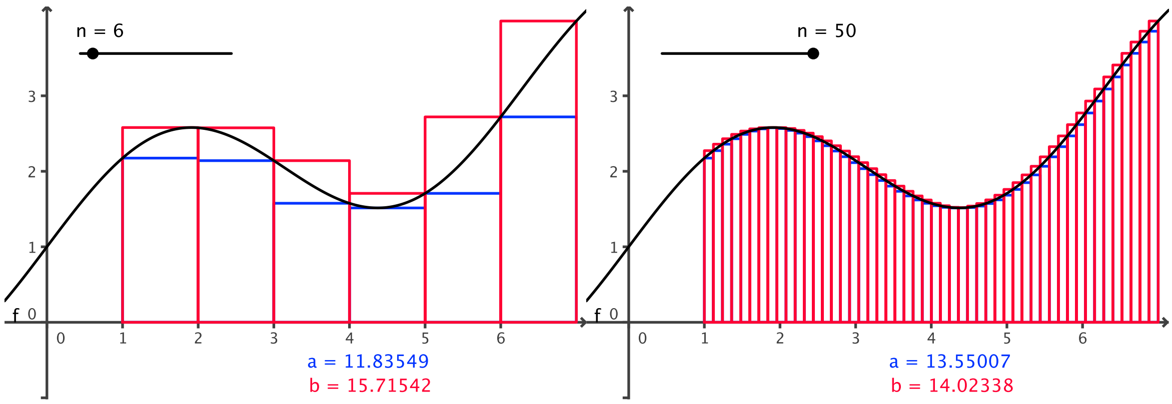


FIGURE VIII.7 – Sommes de Darboux.

D'après la figure VIII.7 : $s_{\sigma_6}(f) = 11{,}83\cdots$ *et* $\mathrm{S}_{\sigma_6}(f) = 15{,}71\cdots$

VIII.3.2.c Méthode des rectangles

On choisit, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$: $\xi_i = x_{i-1}$ ou $\xi_i = x_i$

Remarques

1. *Lorsque la fonction f est monotone, ces valeurs approchées coïncident avec les sommes de Darboux.*
2. *Si f est dérivable sur $[a, b]$ et si $|f'|$ est majorée par une constante M sur $[a, b]$ alors on peut démontrer que :*

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \right| \leqslant \frac{\mathrm{M}}{2n}(b-a)^2.$$

VIII.3.2.d Méthode du point médian

On choisit, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$: $\xi_i = \dfrac{x_{i-1} + x_i}{2}$

5. DARBOUX Jean-Gaston mathématicien Français 1842-1917.

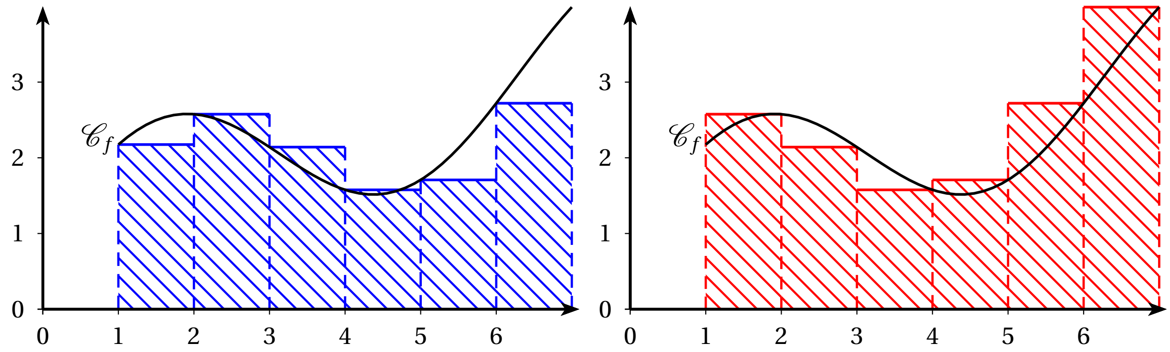


FIGURE VIII.8 – Valeur approchée d'une intégrale par la méthode des rectangles.

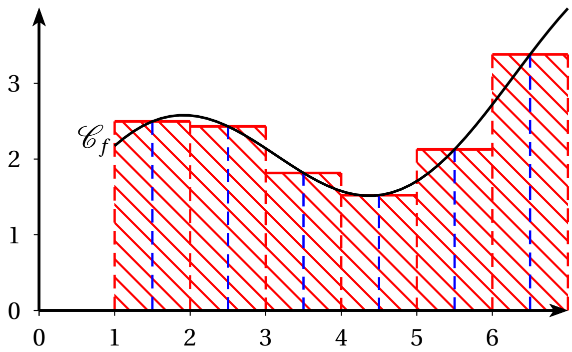


FIGURE VIII.9 – Valeur approchée d'une intégrale par la méthode des points médians.

Remarque *Si f est dérivable sur $[a,b]$ et si $|f'|$ est majorée par une constante M sur $[a,b]$ alors on peut démontrer que :*

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\right| \leqslant \frac{\mathrm{M}}{4n}(b-a)^2.$$

VIII.3.2.e Méthode des trapèzes

On choisit, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, xi_i tel que : $f(\xi_i) = \dfrac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$.
Les ξ_i sont bien définis grâce à la continuité de f et au théorème des valeurs intermédiaires.

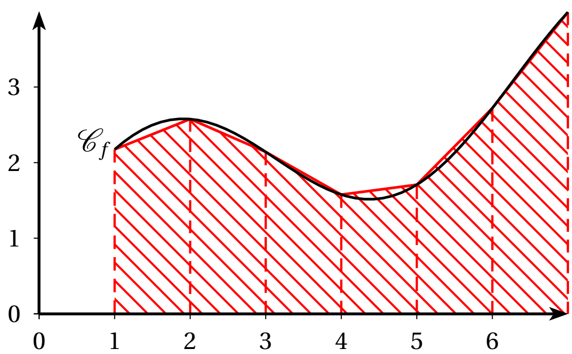


FIGURE VIII.10 – Valeur approchée d'une intégrale par la méthode des trapèzes.

Remarque *Si f est deux fois dérivable sur $[a,b]$ et si $|f''|$ est majorée par une constante M sur $[a,b]$ alors on peut démontrer que :*

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\right| \leqslant \frac{\mathrm{M}}{12n^2}(b-a)^3.$$

VIII.3.3 Exemple d'intégrale d'une fonction usuelle

On rappelle que la partie entière d'un nombre réel, x, est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x. La partie entière de x sera ici notée $\lfloor x \rfloor$. Pour tout nombre réel, x, $\lfloor x \rfloor$ est l'entier vérifiant :

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

On définit de même la fonction plafond par :

$$\lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor$$

$\lceil x \rceil$ est donc le plus petit entier relatif supérieur ou égal à x. Pour tout nombre réel, x, $\lceil x \rceil$ est l'entier vérifiant :

$$\lceil x \rceil - 1 < x \leqslant \lceil x \rceil.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc : $n = \lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$. Ces fonctions permettent d'encadrer n'importe quel réel entre deux entiers consécutifs (ou égaux si le réel considéré est un entier) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \lfloor x \rfloor \leqslant x \leqslant \lceil x \rceil.$$

On rapelle que pour tout entier naturel n :

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Dans cette activité, f désigne la fonction $x \mapsto x^2$ (on rappelle que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$) et α désigne un nombre réel strictement positif. On se propose de démontrer que la fonction f est intégrable sur $[0;\alpha]$ et d'exprimer $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ en fonction α.

Pour tout entier naturel non nul n, on définit sur $[0;\alpha]$ les fonctions f_n et g_n par :

$$f_n(x) = f\left(\frac{\alpha}{n}\left\lfloor \frac{nx}{\alpha}\right\rfloor\right) \qquad g_n(x) = f\left(\frac{\alpha}{n}\left\lceil \frac{nx}{\alpha}\right\rceil\right)$$

1. Dans cette question, $\alpha = 3$ et $n = 6$.

a. Représenter sur un même graphique les fonctions : f, f_6 et g_6.

b. Déterminer I_6 et J_6.

2. Dans cette question n désigne un entier naturel non nul fixé.

a. On veut subdiviser l'intervalle $[0;\alpha]$ en n intervalles de même amplitude.
Donner les éléments et le pas de la subdivision.

b. Démontrer que pour tout élément k de $[\![0;n]\!]$: $f_n\left(k\frac{\alpha}{n}\right) = g_n\left(k\frac{\alpha}{n}\right) = f\left(k\frac{\alpha}{n}\right)$.

c. Démontrer que pour tout élément k de $[\![1;n]\!]$, les fonctions f_n et g_n sont constantes sur l'intervalle $\left](k-1)\frac{\alpha}{n};k\frac{\alpha}{n}\right[$.
En déduire que f_n et g_n sont des fonctions en escalier associées à une subdivision qu'il conviendra de préciser.

d. Déduire de l'étude menée en 2.c que :

$$\mathrm{I}_n = \frac{\alpha^3}{6} \times \frac{(n-1)(2n-1)}{n^2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{J}_n = \frac{\alpha^3}{6} \times \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}.$$

3. a. Après avoit préciser le signe des suites (I_n) et (J_n), étudier leur monotonie (*on pourra calculer le quotient de deux termes consécutifs*).

b. Démontrer que les suites (I_n) et (J_n) sont adjacentes.

4. Déterminer la limite commune des suites (I_n) et (J_n). Puis dériver cette limite par rapport à α.

VIII.4 Théorème fondamental de l'analyse

VIII.4.1 Problème ouvert

Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (limite éventuelle et sens de variation) définie par, $u_0 = \mathrm{e}-1$, et pour tout nombre entier naturel, n : $u_{n+1} = -1+(n+1)u_n$.
Tous les théorèmes, toutes les calculatrices et tous les logiciels sont utilisables à volonté.

VIII.4.2 Théorème fondamental de l'analyse

Soit f une fonction continue, positive et croissante sur un intervalle I, α un élément de I et $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de f.

À tout élément, t, de I tel que $t \geqslant a$, on associe le nombre $\mathrm{F}(t)$ défini comme l'aire, en unités d'aires, de la région délimitée par l'axes des abscisses, $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = t$ (voir fig. VIII.11).

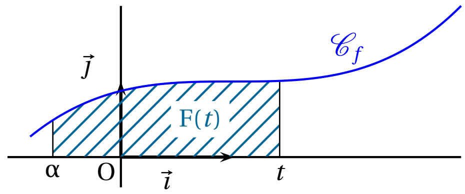


FIGURE VIII.11 –

Soit t_0 un nombre réel où la fonction F est définie. On aimerait savoir la fonction F est dérivable en t_0. Soit h un réel strictement positif suffisamment petit pour que $\mathrm{F}(t_0+h)$ soit défini(voir fig. VIII.11).

Désignons $\mathscr{R}$ la région hachurée dont l'aire est : $\mathrm{F}(t_0+h)-\mathrm{F}(t_0)$. $\mathscr{R}$ est incluse dans un rectangle de base h et de hauteur $f(t_0+h)$ et inclus un rectangle de base h et de hauteur $f(t_0)$. On en déduit que :

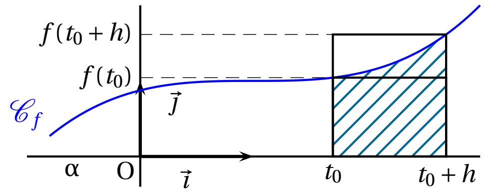


FIGURE VIII.12 –

$$h\times f(t_0) \leqslant \mathrm{F}(t_0+h)-\mathrm{F}(t_0) \leqslant h\times f(t_0+h).$$

En divisant membre à membre par h qui est positif, il vient :

$$f(t_0) \leqslant \frac{\mathrm{F}(t_0+h)-\mathrm{F}(t_0)}{h} \leqslant f(t_0+h). \qquad \text{(VIII.2)}$$

Pour h négatif, on a :

$$-h\times f(t_0+h) \leqslant \mathrm{F}(t_0)-\mathrm{F}(t_0+h) \leqslant -h\times f(t_0).$$

En divisant membre à membre par $-h$ qui est positif, il vient :

$$f(t_0+h) \leqslant \frac{\mathrm{F}(t_0+h)-\mathrm{F}(t_0)}{h} \leqslant f(t_0). \qquad \text{(VIII.3)}$$

La fonction f est continue en t_0, donc : $\lim\limits_{h\to 0} f(t_0+h) = f(t_0)$.
Par comparaison des limites dans (VIII.2) et (VIII.3) il vient :

$$\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{F}(t_0+h)-\mathrm{F}(t_0)}{h} = f(t_0)$$

Ainsi F est dérivable en t_0 et son nombre dérivé en t_0 est $f(t_0)$. Plus généralement, pour tout élément, t, ou F est définie : $\mathrm{F}'(t) = f(t)$. Donc F est une primitive de f.
Soit a et b deux éléments de I tels que : $\alpha \geqslant a \geqslant b$. On a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a).$$

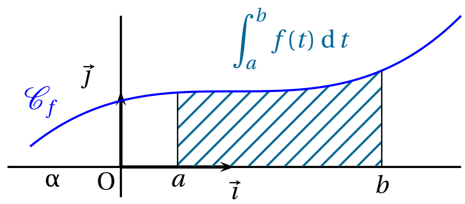


FIGURE VIII.13 –

Soit G une autre primitive de f. Il existe une constante, k, tel que : $\mathrm{G} = \mathrm{F}+k$. On a donc :

$$\mathrm{G}(b)-\mathrm{G}(a) = \big(\mathrm{F}(b)+k\big)-\big(\mathrm{F}(a)+k\big) = \mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a).$$

Cette étude suggère le théorème suivant que nous admettons.

THÉORÈME VIII.4.1 THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ANALYSE

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux éléments de I et F une primitive de f sur I.

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a).$$

Remarques

1. *En reprenant le dernier argument de l'étude précédente, on démontre que l'intégrale ne dépend pas de la primitive choisie.*

2. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle, I, dont la dérivée, f', est continue sur I et a et b deux éléments de I. La fonction f est une primitive sur I de la fonction f' continue sur cet intervalle, donc :*

$$f(b)-f(a)=\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Notations et vocabulaire

1. *On écrit :*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=[\mathrm{F}(t)]_a^b=\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a).$$

2. *L'expression « $[\mathrm{F}(t)]_a^b$ » se lit : « $\mathrm{F}(t)$ pris entre a et b »*

3. *a et b sont les bornes de l'intégrale.*

Exemples

1. *La fonction* sin *est continue sur $\mathbb{R}$ et a pour primitive sur cet intervalle la fonction, $-\cos$; donc :*

$$\int_0^\pi \sin(t)\,\mathrm{d}t=[-\cos t]_0^\pi=\left(-\cos\pi\right)-\left(-\cos 0\right)=2.$$

2. *La fonction, $f: x\mapsto 3x^2-6x$, est continue sur $\mathbb{R}$ et a pour primitive sur cet intervalle la fonction, $\mathrm{F}: x\mapsto x^3-3x^2$; donc :*

$$\int_{-1}^3 f(t)\,\mathrm{d}t=\left[t^3-3t^2\right]_{-1}^5=\left(3^3-3\times 3\right)-\left((-1)^3-3(-1)^2\right)=18+4=22.$$

COROLLAIRE VIII.4.2

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux éléments de I.

(1) On a : $$\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t=0.$$

(2) On a : $$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=-\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration Soit, F, une primitive de f sur I. On a :

(1) $$\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t=\mathrm{F}(a)-\mathrm{F}(a)=0.$$

(2) $$\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t=\mathrm{F}(a)-\mathrm{F}(b)=-\left(\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)\right)=-\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$ □

COROLLAIRE VIII.4.3

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et a un élément de I.

La fonction, $x\mapsto\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, est la primitive de f sur I nulle en a.

Démonstration L'existence et l'unicité d'une telle primitive sont garanties par le théorème VIII.1.4.

Considérons une primitive, F, de f sur I et désignons par G la fonction : $x\mapsto\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

On a : $\mathrm{G}(a)=\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t=0$. De plus, pour tout élément, x, de I, on a :

$$\mathrm{G}(x)=\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(a).$$

En dérivant membre à membre cette identité par rapport à x, il vient : $\mathrm{G}'(x)=f(x)$.

Donc G est la primitive de f sur I nulle en a. □

Exemple *La fonction* ln *est la primitive sur $]0;+\infty[$ de $t\mapsto\dfrac{1}{t}$ nulle en 1. Donc, pour tout nombre réel strictement positif, x :*

$$\int_1^x\frac{\mathrm{d}t}{t}=[\ln t]_1^x=\ln x-\ln 1=\ln x.$$

La fonction ln *peut être définie comme l'intégrale de la fonction inverse.*

Interprétation graphique

Soit f une fonction continue et *positive* sur un intervalle I, a et b deux éléments de I avec : $a<b$.

Le nombre, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, est la valeur de l'aire, en unité d'aire, de la région délimitée par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x=a$ et $x=b$. Voir figure VIII.13.

Exercice VIII.4.1. ***Calculer :*** $\displaystyle\int_{-1}^{3}\left(5t^2+3t+1\right)\,\mathrm{d}\,t.$

Solution $\displaystyle\int_{-1}^{3}\left(5t^2+3t+1\right)\,\mathrm{d}\,t=\left[5\frac{t^3}{3}+3\frac{t^2}{2}+t\right]_{-1}^{3}=61,5-\left(-\frac{7}{6}\right)=-\frac{188}{3}$ □

Exercice VIII.4.2. ***Calculer :*** $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}(3\cos 2t-2\sin 3t)\,\mathrm{d}\,t.$

Solution *On a :*

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}(3\cos 2t-2\sin 3t)\,\mathrm{d}\,t=\left[3\frac{\sin 2t}{2}+2\frac{\cos 3t}{3}\right]_{0}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{3}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{2}{3}=\frac{9\sqrt{3}-8}{12}.$$

□

Exercice VIII.4.3. ***Calculer :*** $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\sin t\left(3\cos^2 t-2\cos^3 t\right)\,\mathrm{d}\,t.$

Solution *Introduisons la fonction,* $u : t\mapsto\cos t$, *et la fonction polynôme,* $\mathrm{P} : t\mapsto\frac{1}{2}t^4-t^3$.
On a : $u'(t)=-\sin t$ *et* $\mathrm{P}'(t)=2t^3-3t^2$. *Donc, pour* $t\in\mathbb{R}$ *:* $\sin t\left(3\cos^2 t-2\cos^3 t\right)=u'\times\mathrm{P}'(u)(t)$. *Ainsi :*

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\sin t\left(3\cos^2 t-2\cos^3 t\right)\,\mathrm{d}\,t=\left[\frac{1}{2}\cos^4 t-\cos^3 t\right]_{0}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{9}{32}-\frac{3\sqrt{3}}{8}-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{25-12\sqrt{3}}{32}.$$

□

Exercice VIII.4.4. ***Calculer :*** $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\cos^5 t\,\mathrm{d}\,t.$

Solution *Pour* $t\in\mathbb{R}$, *on a :* $\cos^5 t=\cos t\left(\cos^2 t\right)^2=\cos t\left(1-\sin^2 t\right)^2=\cos t\left(\sin^4 t-2\sin^2 t+1\right).$

Introduisons les fonctions : $u : t\mapsto\sin t$ *et* $\mathrm{P} : t\mapsto\frac{t^5}{5}-2\frac{t^3}{3}+t.$

Pour tout $t\in\mathbb{R}$ *:* $u'(t)=\cos t$ *et* $\mathrm{P}'(t)=t^4-2t^2+1.$

Donc, pour tout $t\in\mathbb{R}$ *:* $u'(t)\times\mathrm{P}(u(t))=\cos t\left(\sin^4 t-2\sin^2 t+1\right)=\cos^5 t.$

D'où il vient :

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\cos^5 t\,\mathrm{d}\,t=[\mathrm{P}(u(t))]_{0}^{\frac{\pi}{3}}=\left[\frac{\sin^5 t}{5}-\frac{2}{3}\sin^3 t+\sin t\right]_{0}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{9\sqrt{3}}{160}-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{49\sqrt{3}}{160}.$$

□

VIII.4.3 Exercices

VIII.4.a. Calculer : $\displaystyle\int_{1}^{4}5x^3+4x^2+3x-5\,\mathrm{d}\,x.$

VIII.4.b. calculer : $\displaystyle\int_{0}^{5}(2x-3)\,\mathrm{d}\,t$; $\displaystyle\int_{0}^{x}(2t-3)\,\mathrm{d}\,t$ et $\displaystyle\int_{0}^{x}(2x-3)\,\mathrm{d}\,t.$

VIII.4.c. calculer : $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(5\cos 6t-3\sin 9t)\,\mathrm{d}\,t.$

VIII.4.d. calculer : $\displaystyle\int_{2}^{5}\left(5\mathrm{e}^{2t}-2\mathrm{e}^{5t}\right)\,\mathrm{d}\,t.$

VIII.4.e. calculer : $\displaystyle\int_{0}^{3}t^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}\,t.$

VIII.4.f. calculer : $\displaystyle\int_{0}^{9}\sqrt{t}\,\mathrm{d}\,t.$

VIII.4.g. calculer : $\displaystyle\int_{1}^{4}\frac{\mathrm{d}\,t}{\sqrt{t}}.$

VIII.4.h. calculer : $\displaystyle\int_{4}^{12}\frac{\mathrm{d}\,t}{\sqrt{2t+1}}.$

VIII.4.i. calculer : $\displaystyle\int_{0}^{3}(2t+3)\sqrt{2t+3}\,\mathrm{d}\,t.$

VIII.4.j. calculer : $\displaystyle\int_{-1}^{3}\frac{t\,\mathrm{d}\,t}{t^2+1}.$

VIII.4.k. calculer : $\displaystyle\int_{1}^{3}\frac{\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}\,t}{\mathrm{e}^{2t}-1}.$

VIII.4.l. calculer : $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos^2 t\,\mathrm{d}\,t.$

VIII.4.m. calculer : $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 t\,\mathrm{d}\,t.$

VIII.4.n. calculer : $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 t\,\mathrm{d}\,t.$

VIII.5 Proptiétés algébriques

VIII.5.1 Relation de Chasles

THÉORÈME VIII.5.1 RELATION DE CHASLES

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et a, b, c trois éléments de I.

On a :
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

Démonstration Soit F une primitive de f sur I. On a :
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}\,t = (\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)) + (\mathrm{F}(c)-\mathrm{F}(b)) = \mathrm{F}(c)-\mathrm{F}(a) = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}\,t.$$
□

Interprétation graphique

Si f est positive sur I et si, $a \leqslant b \leqslant c$, désignons par D la région délimitée par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = a$ et $x = c$. Le théorème VIII.5.1 signifie que :
$$\text{aire}\,(\mathrm{D}) = \text{aire}\,(\mathrm{D}_1) + \text{aire}\,(\mathrm{D}_2)$$

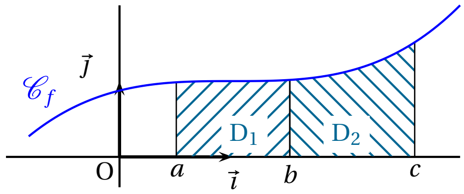


FIGURE VIII.14 –

Exercice VIII.5.1. ***Calculer :*** $\displaystyle\int_0^3 |t-1|\,\mathrm{d}\,t.$

Solution *Éliminons la valeur absolue. L'expression sans valeur absolue de* $||t-1||$ *est donnée par le tableau ci-dessous.*

x		1	
$\lvert t-1\rvert$	$1-t$	0	$t-1$

D'après la relation de Chasles, on a donc :
$$\int_0^3 |t-1|\,\mathrm{d} = \int_0^1 |t-1|\,\mathrm{d} + \int_1^3 |t-1|\,\mathrm{d} = \int_0^1 1-t\,\mathrm{d} + \int_1^3 t-1\,\mathrm{d} = \left[t-\frac{t^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{t^2}{2}-t\right]_1^3 = \frac{5}{2}.$$
□

VIII.5.2 Linéarité

THÉORÈME VIII.5.2 LINÉARITÉ DE L'INTÉGRALE

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, et a, b deux éléments de I.

(1) On a :
$$\int_a^b \big(f(t)+g(t)\big)\,\mathrm{d}\,t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

(2) On a :
$$\int_a^b \alpha f(t)\,\mathrm{d}\,t = \alpha \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

Démonstration Soit F et G deux primitives sur I de f et g.

(1) F + G est une primitive sur I de, $f+g$, donc :
$$\int_a^b \big(f(t)+g(t)\big)\,\mathrm{d}\,t = (\mathrm{F}+\mathrm{G})(b) - (\mathrm{F}+\mathrm{G})(a) = \mathrm{F}(b)+\mathrm{G}(b)-\mathrm{F}(a)-\mathrm{G}(a) = \mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)+\mathrm{G}(b)-\mathrm{G}(a) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

(2) αF est une primitive sur I de, αf, donc :
$$\int_a^b \alpha f(t)\,\mathrm{d}\,t = \alpha\mathrm{F}(b) - \alpha\mathrm{F}(a) = \alpha(\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)) = \alpha\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t.$$
□

On dit que l'intégrale est linéaire. Cela signifie que l'intégrale d"une combinaison linéaire de fonctions est la combinaison linéaire des intégrales.

Remarque *En particulier :*
$$\int_a^b -f(t)\,\mathrm{d}\,t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

Exemple
$$3\int_2^7 \left(2t^2-1\right)\mathrm{d}\,t - 2\int_2^7 \left(3t^2+4\right)\mathrm{d}\,t = \int_2^7 \left(3\left(2t^2-1\right)-2\left(3t^2+4\right)\right)\mathrm{d}\,t = \int_2^7 -11\,\mathrm{d}\,t = -55.$$

Exercice VIII.5.2. ***On rappelle l'identité :*** $(a+b)^6 = a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^4b^2+6ab^5+b^6$.
Calculer : $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 t \, \mathrm{d}t$.

Solution *Pour tout nombre réel, t, on a :*

$$\cos^6 t = \left(\frac{\mathrm{e}^{it}+\mathrm{e}^{-it}}{2}\right)^6 = \frac{1}{2^6}\left(\mathrm{e}^{i6t}+6\mathrm{e}^{i4t}+15\mathrm{e}^{i2t}+20+15\mathrm{e}^{-i2t}+6\mathrm{e}^{-i4t}+\mathrm{e}^{-i6t}\right) = \frac{1}{2^5}(\cos 6t+6\cos 4t+15\cos 2t+10).$$

On en déduit que :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 t \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2^5}\left[\frac{\sin 6t}{6}+3\frac{\sin 4t}{2}+15\frac{\sin 2t}{2}+10t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{10\pi}{32} = \frac{5\pi}{16}.$$

□

Remarque *Pour intégrer la fonction $t \mapsto \cos^6 t$, nous l'avons exprimée comme combinaison linéaire des fonctions : $t \mapsto \cos 6t$; $t \mapsto \cos 4t$; $t \mapsto \cos 2t$ et $t \mapsto 1$.*

Plus généralement, une fonction qui se présente comme un polynôme où les indéterminées sont les fonctions cos et sin est appelé polynôme trigonométrique.

Pour intégrer un polynôme trigonométrique on peut le linéariser ; c'est-à-dire l'exprimer comme combinaison linéaire de fonctions $t \mapsto \cos nt$ et $t \mapsto \sin bt$ ou n désigne un entier naturel.

VIII.5.3 Exercices

VIII.5.a. Calculer : $\int_0^5 |t+2| \, \mathrm{d}t$.

VIII.5.b. Calculer : $\int_0^{\frac{3\pi}{4}} |\cos t| \, \mathrm{d}t$.

VIII.5.c. Calculer : $\int_0^5 \left|(x-1)^2-4\right| \, \mathrm{d}t$.

VIII.5.d. On pose : $\mathrm{A} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, \mathrm{d}t$ et $\mathrm{B} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \, \mathrm{d}t$.

1. En ne calculer ni A ni B, calculer : A + B et A − B.

2. En déduire A et B.

VIII.5.e. En linéarisant $\cos^2$, calculer : $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 t \, \mathrm{d}t$

VIII.5.f. En linéarisant $\sin^2$, calculer : $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 t \, \mathrm{d}t$

VIII.5.g. En linéarisant $\cos^3$, calculer : $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 t \, \mathrm{d}t$

VIII.5.h. En linéarisant $\sin^3$, calculer : $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^3 t \, \mathrm{d}t$

VIII.6 Propriétés de comparaison

Afin d'illustrer les théorèmes par des exemples les plus proches possible des questions d'examen, on introduit la suite $(\mathrm{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\mathrm{U}_0 = \int_0^1 \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t$ et pour $n \geqslant 1$, $\mathrm{U}_n = \int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t$.

VIII.6.1 Signe de l'intégrale

THÉORÈME VIII.6.1
Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a, b deux éléments de I.
Si $a \leqslant b$ et si f est positive sur $[a;b]$, alors :

$$\int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t \geqslant 0.$$

Démonstration Soit F une primitive de f sur I. La fonction f est positive sur $[a;b]$, donc F est croissante sur cet intervalle. Ainsi : $\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a) \geqslant 0$; c'est-à-dire : $\int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t \geqslant 0$. □

Exemple *La fonction* exp *est positive sur* $[0;1]$, *donc :* $\mathrm{U}_0 \geqslant 0$.

THÉORÈME VIII.6.2
Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et a, b deux éléments de I.
Si $a \leqslant b$ et si $f \leqslant g$ sur $[a;b]$, alors :

$$\int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t) \, \mathrm{d}t.$$

Démonstration Soit F et G des primitives respectives de f sur I. On a : $f \leqslant g$ sur $[a;b]$, c'est-à-dire $g-f \geqslant 0$ sur $[a;b]$; d'après le théorème VIII.6.1 :

$\int_a^b (g-f)(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$. On en déduit le résultat désiré par linéarité. □

Exemples

1. *Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0;1]$: $1-t \leqslant 1$ et $(1-t)^n \mathrm{e}^t$ est positif; donc par produit : $(1-t)^{n+1}\mathrm{e}^t \leqslant (1-t)^n \mathrm{e}^t$.*
Par comparaison des intégrales sur $[0;1]$: $\mathrm{U}_{n+1} \leqslant \mathrm{U}_n$.
La suite est ainsi décroissante et minorée par 0 (voir exemple précédent) elle donc convergente.

2. *Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0;1]$: $1 \leqslant \mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e}$ et $(1-t)^n$ est positif; donc par produit : $(1-t)^n \leqslant (1-t)^n\mathrm{e}^t \leqslant (1-t)^n\mathrm{e}$.*
Par comparaison des intégrales sur $[0;1]$ et par linéarité : $\int_0^1 (1-t)^n\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{U}_n \leqslant \mathrm{e}\int_0^1 (1-t)^n\,\mathrm{d}t$.
Or : $\int_0^1 (1-t)^n\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{n+1}(1-t)^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$; donc pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{n+1} \leqslant \mathrm{U}_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n+1}$.
Par comparaison des limites, (U_n) converge vers 0.

COROLLAIRE VIII.6.3

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a, b deux éléments de I tels que : $a \leqslant b$.

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b \left|f(t)\right|\mathrm{d}t.$$

Démonstration On a : $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$ sur $[a;b]$; donc par comparaison des intégrales : $-\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$; c'est-à-dire :

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

□

Exercice VIII.6.1. ***Démontrer que pour tout nombre réel, x : $\mathrm{e}^x \geqslant x+1$.***

Solution

Si $x = 0$ *alors $\mathrm{e}^x = 1$ et $x+1 = 1$, donc : $\mathrm{e}^x \geqslant x+1$.*

Si $x > 0$ *alors pour $t \in [0;x]$, $\mathrm{e}^t \geqslant 1$, car la fonction exp est croissante sur $\mathbb{R}$. Donc par comparaison des intégrales :*

$$\int_0^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^x 1\,\mathrm{d}t.$$

C'est-à-dire : $\mathrm{e}^x - 1 \geqslant x$. D'où l'on tire l'inégalité désirée.

Si $x < 0$ *alors pour $t \in [x;0]$, $\mathrm{e}^t \leqslant 1$, car la fonction exp est croissante sur $\mathbb{R}$. Donc par comparaison des intégrales :*

$$\int_x^0 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \geqslant \int_x^0 1\,\mathrm{d}t.$$

C'est-à-dire : $1-\mathrm{e}^x \leqslant -x$. D'où l'on tire l'inégalité désirée.

□

M Pour démontrer une inégalité du type, $f < g$, sur un intervalle du type, $[a;b]$ ou $[a;\infty[$, il suffit parfois de vérifier que, $f(a) < f(b)$, de démontrer que , $f' < g'$, sur cet intervalle puis de comparer les intégrales.

VIII.6.2 Inégalité de la moyenne

THÉORÈME VIII.6.4 INÉGALITÉ DE LA MOYENNE

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a, b deux éléments de I tels que, $a \leqslant b$, et m, M deux nombres réels tels que pour tout élément, t, de $[a;b]$: $m \leqslant f(t) \leqslant \mathrm{M}$.

$$m(b-a)\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{M}(b-a).$$

Démonstration On a : $m \leqslant f \leqslant \mathrm{M}$ sur $[a;b]$; donc, par comparaison des intégrales : $\int_a^b m\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^f f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b \mathrm{M}\,\mathrm{d}t$; c'est-à-dire :

$$m(b-a)\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{M}(b-a).$$

□

Interprétation graphique Lorsque la fonction f est positive sur $[a;b]$, ce théorème signifie que l'aire du domaine hachuré est encadrée entre les aires des rectangles de base, $b-a$, et de hauteurs m et M.

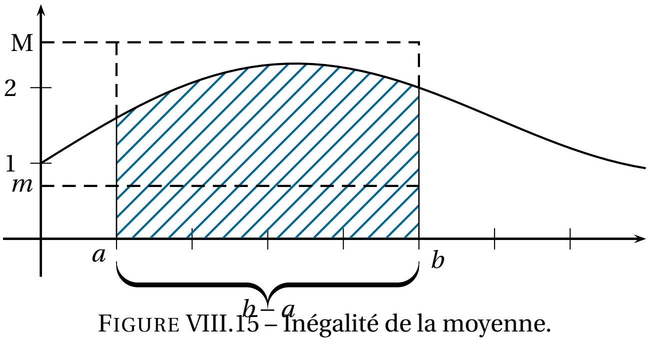


FIGURE VIII.15 – Inégalité de la moyenne.

Remarque *$b-a$ n'est autre que l'amplitude de l'intervalle $[a;b]$.*

Exemple *La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$, donc pour $t \in [3;5]$: $\frac{1}{25} \leqslant \frac{1}{t^2} \leqslant \frac{1}{9}$.*
D'après l'inégalité de la moyenne appliquée à $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ sur l'intervalle $[3;5]$:

$$\frac{2}{25} \leqslant \int_3^5 \frac{\mathrm{d}\,t}{t^2} \leqslant \frac{2}{9}.$$

Exercice VIII.6.2. ***Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$*** [6].

Solution *La fonction, $f : t \mapsto \frac{1}{t}$, est décroissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$, donc pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$: $\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k}$ sur $[k;k+1]$.*
D'après l'inégalité de la moyenne appliquée à f sur l'intervalle $[k;k+1]$:

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}\,t}{t} \leqslant \frac{1}{k}.$$

En additionnant membre à membre les n inégalités ainsi obtenues pour k variant de 1 à n, il vient :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}\,t}{t} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

C'est-à-dire :

$$u_{n+1} - 1 \leqslant \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}\,t}{t} \leqslant u_n.$$

Or : $\int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}\,t}{t} = \ln(n+1)$; donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, u_n \geqslant \ln(n+1) \qquad \textit{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty.$$

Par comparaison des limites :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

Voir figure VIII.16. □

L'inégalité de la moyenne peut aussi s'énoncer de la façon suivante.

THÉORÈME VIII.6.5 **INÉGALITÉ DE LA MOYENNE**
Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a, b deux éléments de I, et M un nombre réel tel que pour tout élément, t, de $[a;b]$: $|f(t)| \leqslant \mathrm{M}$.

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t\right| \leqslant \mathrm{M}\,|b-a|.$$

Démonstration $|f(t)| \leqslant \mathrm{M}$, signifie : $-\mathrm{M} \leqslant f(t) \leqslant \mathrm{M}$. Il suffit donc d'appliquer le théorème VIII.6.4 avec $m = -\mathrm{M}$. **Si $a \leqslant b$,** on a : $-\mathrm{M}(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)t\,\mathrm{d} \leqslant \mathrm{M}(b-a)$; donc : $\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t\right| \leqslant \mathrm{M}\,|b-a|$.
Si $b \leqslant a$, on a : $-\mathrm{M}(a-b) \leqslant \int_b^a f(t)t\,\mathrm{d} \leqslant \mathrm{M}(a-b)$; donc : $\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t\right| \leqslant \mathrm{M}\,|b-a|$. □

6. Cette suite est appelée série harmonique.

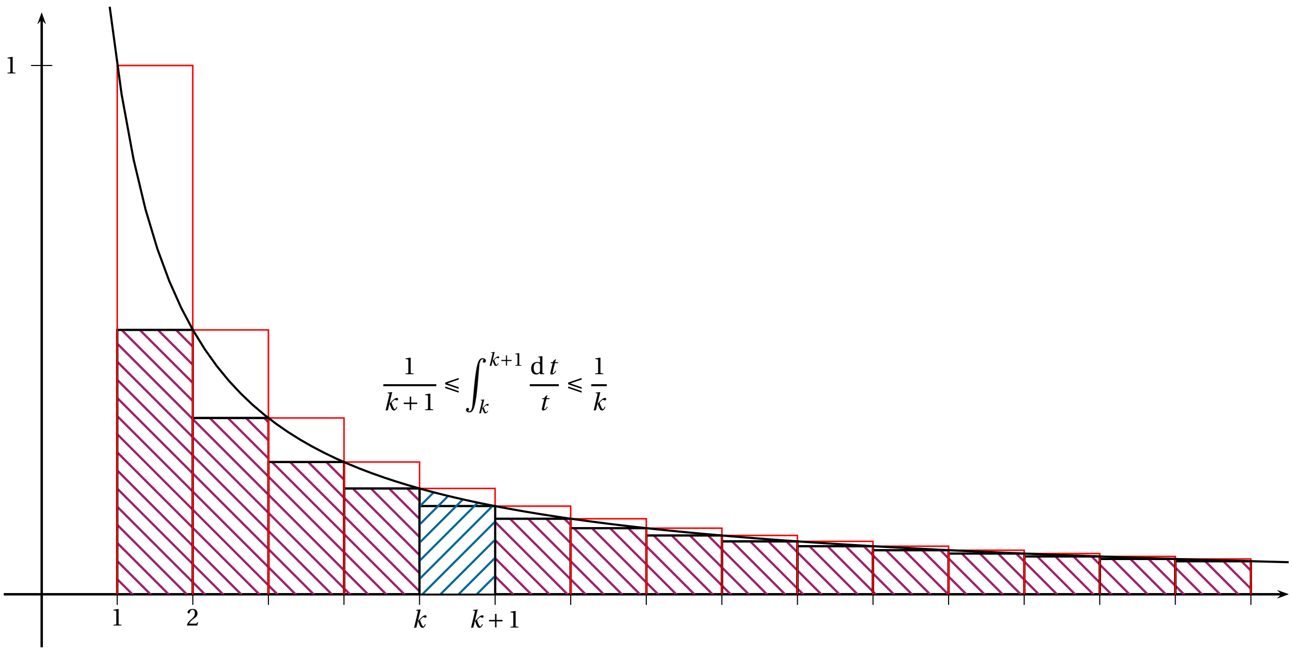


FIGURE VIII.16 – Limite de la série harmonique.

Exercice VIII.6.3. ***Déterminer la limite de la suite*** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$***, définie par :*** $u_n = \frac{1}{n}\int_n^{n-2(-1)^n} \sin t \,\mathrm{d}\,t$***.***

Solution *On sait que :* $|\sin| \leqslant 1$ *sur* $\mathbb{R}$*. Donc, d'après l'inégalité de la moyenne appliquée à* sin *entre* n *et* $n-2(-1)^n$ *:*
$\left|\int_n^{n-2(-1)^n} \sin t \,\mathrm{d}\,t\right| \leqslant 2.$
On en déduit que pour $n \in \mathbb{N}^\star$*, en divisant membre à membre l'inégalité ci-dessus par* n *qui est strictement positif :*

$$|u_n| \leqslant \frac{1}{n}\left|\int_n^{n-2(-1)^n} \sin t \,\mathrm{d}\,t\right| \leqslant \frac{2}{n}.$$

On sait que : $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{n} = 0$ *; donc, par comparaison des limites, la suite* (u_n) *converge vers* 0. □

VIII.6.3 Valeur moyenne d'une fonction

DÉFINITION VIII.6.1
Soit f une fonction continue sur une intervalle I et $[a;b]$ un intervalle non réduit à un point inclus dans I.

La valeur moyenne de f sur $[a;b]$ est le nombre réel μ défini par : $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t$.

Interprétation graphique Lorsque la fonction f est positive sur $[a;b]$, ce théorème signifie que l'aire du domaine hachuré est égale à l'aire du rectangle de base, $b-a$, et de hauteur μ. Voir figure VIII.17.

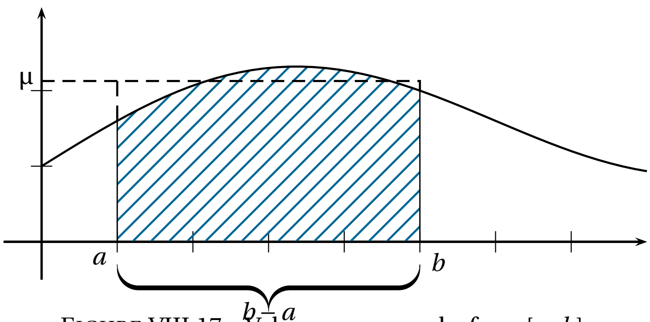


FIGURE VIII.17 – Valeur moyenne de f sur $[a;b]$.

Interprétation cinématique Une droite (AB) est graduée et orientée de A vers B. Un point mobile sur l'axe par de A à l'instant t_0 pour arriver en B à l'instant, t_1. La vitesse moyenne du trajet est le quotient de la distance parcourue par le mis pour la parcourir, c'est-à-dire :

$$v_{moy} = \frac{\mathrm{AB}}{t_1 - t_0} = \frac{x(t_1) - x(t_0)}{t_1 - t_0}.$$

Désignons respectivement par $x(t)$ et $\dot{x}(t)$ l'abscisse et la vitesse du point mobile à l'instant t. La valeur moyenne, μ, de la vitesse sur l'intervalle $[t_0\,;t_1]$ vérifie :

$$\mu = \frac{1}{t_1 - t_0}\int_{t_0}^{t_1} \dot{x}(t)\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{t_1 - t_0}\left[x(t)\right]_{t_0}^{t_1} = \frac{x(t_1) - x(t_0)}{t_1 - t_0} = v_{moy}.$$

On en déduit que la vitesse moyenne est la valeur moyenne de la vitesse.

Remarque *On déduit de l'inégalité de la moyenne, que si m et M sont respectivement un minorant et un majorant de f sur $[a;b]$, alors : $m \leqslant \mu \leqslant \mathrm{M}$.*

Exemples

1. *La valeur moyenne de la fonction* sin *sur l'intervalle* $[0;\pi]$ *est :*

$$\mu_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin t\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{\pi}\left[-\cos t\right]_0^{\pi} = \frac{-(-1)-(-1)}{\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

2. *La valeur moyenne de la fonction* sin *sur l'intervalle* $[0;2\pi]$ *est :*

$$\mu_2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin t\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2\pi}\left[-\cos t\right]_0^{2\pi} = \frac{-(-1)-(-(-1))}{2\pi} = 0.$$

VIII.6.4 Exercices

VIII.6.a. Peut-on, sans calcul, déterminer le signes des intégrales suivantes ?

a. $\displaystyle\int_{-2}^{1} \frac{\mathrm{d}\,x}{x^2+1}$. **b.** $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \mathrm{e}^x \ln x\,\mathrm{d}\,x$.

c. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}\,t}{\cos t}$. **d.** $\displaystyle\int_{0,2}^{0,8} \mathrm{e}^x \ln x\,\mathrm{d}\,x$.

VIII.6.b. **1.** Justifier que pour tout $t \in [0;1]$:

$$0 \leqslant \mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e}.$$

2. En déduire que pour tout $x \in [0;1]$:

$$x+1 \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}\,x+1.$$

VIII.6.c. **1.** Démontrer que pour tout $x \in [1;+\infty[$:

$$\ln x \leqslant x-1$$

2. Démontrer que pour tout $x \in]0;1]$:

$$\ln x \leqslant x-1$$

VIII.6.d. **1.** Justifier que pour tout $t \in \left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$:

$$1 \leqslant \frac{1}{\sin t} \leqslant 2.$$

2. En déduire que :

$$\frac{3}{\pi} \leqslant \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\,t}{\sin t} \leqslant \frac{6}{\pi}.$$

VIII.6.e. Démontrer que : $105 \leqslant \displaystyle\int_9^{16} \sqrt{x^2+144}\,\mathrm{d}\,x \leqslant 140$.

VIII.6.f. Déterminer la valeur moyenne de $x \mapsto x^2$ sur $[1;4]$.

VIII.6.g. Déterminer la valeur moyenne de $x \mapsto x^2$ sur $[-1;1]$.

VIII.6.h. Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$; m, μ et M sont respectivement un minorant, la valeur moyenne et un majorant de f sur $[a;b]$.
Démontrer que : $m \leqslant \mu \leqslant \mathrm{M}$.

VIII.7 Autres techniques de calcul

VIII.7.1 Intégration par parties

THÉORÈME VIII.7.1
Soit u et v deux fonctions continûment dérivables[7] sur un intervalle I et a, b deux éléments de I.

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration On a : $(uv)' = u'v + uv'$; donc : $u'v = (uv)' - uv'$. Les fonctions u et v sont continûment dérivables sur I, donc les fonctions, $u'v$, $(uv)'$ et uv' sont continues sur I. En intégrant terme à terme la dernière identité, il vient :

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b (uv)'(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

□

Exercice VIII.7.1. ***Calculer :*** $\int_0^{\pi} t\sin t\,\mathrm{d}t$.

Solution *Posons :* $v(t) = t$ *et* $u'(t) = \sin t$. *On a,* $v'(t) = 1$, *et on peut prendre :* $u(t) = -\cos t$.
Les fonctions u *et* v *sont continûment dérivables sur* $\mathbb{R}$, *en intégrant par parties, il vient :*

$$\int_0^{\pi} t\sin t\,\mathrm{d}t = [-t\cos t]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\cos t\,\mathrm{d}t = \pi + [\sin t]_0^{\pi} = \pi.$$

□

Exercice VIII.7.2. ***Déterminer une primitive sur*** $]0;+\infty[$ ***de la fonction*** $\ln$.

Solution *D'après le corollaire VIII.4.3, La primitive de fonction* $\ln$ *nulle en* 1 *est la fonction,* F, *définie par :*

$$F(x) = \int_1^x \ln t\,\mathrm{d}t.$$

Posons : $v(t) = \ln t$ *et* $u'(t) = 1$. *On a,* $v'(t) = \frac{1}{t}$, *et on peut prendre :* $u(t) = t$.
Les fonctions u *et* v *sont continûment dérivables sur* $]0;+\infty[$, *en intégrant par parties, il vient :*

$$F(x) = [t\ln t]_1^x - \int_1^x t \times \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = x\ln x - [t]_1^x = x\ln x - x + 1$$

□

On peut être amener à enchaîner plusieurs intégrations par parties pour obtenir un résultat.

Exercice VIII.7.3. ***Calculer :*** $\int_0^{\pi} t^2\cos t\,\mathrm{d}t$.

Solution *Posons :* $v(t) = t^2$ *et* $u'(t) = \cos t$. *On a,* $v'(t) = 2t$, *et on peut prendre :* $u(t) = \sin t$.
Les fonctions u *et* v *sont continûment dérivables sur* $\mathbb{R}$, *en intégrant par parties, il vient :*

$$\int_0^{\pi} t^2\cos t\,\mathrm{d}t = \left[t^2\sin t\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2t\sin t\,\mathrm{d}t = -2\int_0^{\pi} t\sin t\,\mathrm{d}t = -2\pi$$

□

Exercice VIII.7.4. ***Calculer :*** $I = \int_0^{\pi} e^{3t}\cos 2t\,\mathrm{d}t$.

Solution *Posons :* $v(t) = \cos 2t$ *et* $u'(t) = e^{3t}$. *On a,* $v'(t) = -2\sin 2t$, *et on peut prendre :* $u(t) = \frac{1}{3}e^{3t}$.
Les fonctions u *et* v *sont continûment dérivables sur* $\mathbb{R}$, *en intégrant par parties, il vient :*

$$I = \left[\frac{1}{3}e^{3t}\cos 2t\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\frac{2}{3}\sin 2t\, e^{3t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}e^{3\pi} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\int_0^{\pi}\sin t\, e^{3t}\,\mathrm{d}t.$$

Calculons : $\int_0^{\pi}\sin 2t\, e^{3t}\,\mathrm{d}t$.

Posons : $v(t) = \sin 2t$ *et* $u'(t) = e^{3t}$. *On a,* $v'(t) = 2\cos 2t$, *et on peut prendre :* $u(t) = \frac{1}{3}e^{3t}$.
Les fonctions u *et* v *sont continûment dérivables sur* $\mathbb{R}$, *en intégrant par parties, il vient :*

$$\int_0^{\pi}\sin 2t\, e^{3t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{3}e^{3t}\sin 2t\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{2}{3}\cos 2t\, e^{3t}\,\mathrm{d}t = -\frac{2}{3}I.$$

7. Une fonction continûment dérivable sur un intervalle, I, est une fonction dérivable sur I, dont la dérivée est continue sur I.

Ainsi : $3\mathrm{I} = \mathrm{e}^{3\pi} - 1 - \frac{4}{3}\mathrm{I}$*. On en déduit que :*

$$\mathrm{I} = \frac{3}{13}\left(\mathrm{e}^{3\pi} - 1\right)$$

□

Exercice VIII.7.5. ***1.*** ***(U_n) est la suite introduite à la deuxième ligne de section VIII.6.***
Déterminer une expression de U_{n+1} en fonction de U_n, valable pour tout entier naturel, n.
2. En déduire la résolution du problème ouvert énoncé à la sous-section VIII.4.1

Solution ***1.*** *Soit n un entier naturel. On a :*

$$\mathrm{U}_{n+1} = \int_0^1 (1-t)^{n+1} \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$$

Posons : $v(t) = (1-t)^{n+1}$ *et* $u'(t) = \mathrm{e}^t$*. On a,* $v'(t) = -(n+1)(1-t)^n$*, et on peut prendre :* $u(t) = \mathrm{e}^t$*.*
Les fonctions u et v sont continûment dérivables sur $\mathbb{R}$, en intégrant par parties, il vient :

$$\mathrm{U}_{n+1} = \left[(1-t)^{n+1}\mathrm{e}^t\right]_0^1 - \int_0^1 -(n+1)(1-t)^n \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = -1 + (n+1)\mathrm{U}_n$$

Donc, pour tout entier naturel, n :

$$\mathrm{U}_{n+1} = -1 + (n+1)\mathrm{U}_n$$

2. *Ainsi la suite(U_n) a la même relation de récurrence que la suite (u_n) introduite à la sous-section VIII.4.1. Si de plus ces deux suites avaient le même premier termes, elles seraient alors égales.*
On sait que : $u_0 = \mathrm{e} - 1$*. Calculons* U_0*. On a :*

$$\mathrm{U}_0 = \int_0^1 \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = \left[\mathrm{e}^t\right]_0^1 = \mathrm{e} - 1.$$

Les suites (U_n) et (u_n) sont égales, donc la suite(u_n) est décroissante et converge vers 0. □

Pour établir la relation de récurrence d'une suite définie par une intégrale, on utilise souvent une (ou plusieurs) intégration par parties.

VIII.7.2 Intégration et invariance géométrique

VIII.7.2.a Intégration de fonctions paires ou impaires

Théorème VIII.7.2
Soit f une fonction continue sur un intervalle I, symétrique par rapport à 0.

(1) Si f est paire, alors pour tout élément a de I :

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t.$$

(2) Si f est impaire, alors pour tout élément a de I :

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Démonstration Soit F une primitive de f sur I.

Si f est paire On introduit la fonction, G définie sur I par : $\mathrm{G}(x) = 2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = 2(\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(0)) - (\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(-x))\mathrm{F}(x)+\mathrm{F}(-x)-2\mathrm{F}(0)$.
La fonction F est dérivable sur I, donc G aussi et pour tout élément,x, de I : $\mathrm{G}'(x) = f(x) - f(-x) = 0$ (car f est paire).
La fonction G est donc constante sur l'intervalle I et pour tout élément,a, de I : $\mathrm{G}(a) = \mathrm{G}(0) = 0$; d'où : $\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$.

Si f est impaire On introduit la fonction, G définie sur I par : $\mathrm{G}(x) = \int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(-x)$.
La fonction F est dérivable sur I, donc G aussi et pour tout élément,x, de I : $\mathrm{G}'(x) = f(x) + f(-x) = 0$ (car f est impaire).
La fonction G est donc constante sur l'intervalle I et pour tout élément,a, de I : $\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{G}(a) = \mathrm{G}(0) = \int_0^0 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

□

Remarques

1. *Lorsque f est paire, l'égalité est équivalente à :* $\int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$.

En effet, on passe de l'une à l'autre en ajoutant ou en retranchant membre à membre $\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$.

2. *Lorsque f est impaire, l'égalité est équivalente à :* $\int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$.
En effet, on passe de l'une à l'autre en ajoutant ou en retranchant membre à membre $\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Interprétation graphique Lorsque $f > 0$ sur $\mathbb{R}$, voir figure VIII.18.
Dans le cas où la f est paire, les domaines D_1 et D_2 ont la même aire parce qu'ils sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. On en déduit que :

$$\int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Dans le cas où la f est impaire, les domaines D_1 et D_2 ont la même aire parce qu'ils sont symétriques par rapport à l'origine. On en déduit que :

$$-\int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$$

FIGURE VIII.18 – Intégrales de fonctions paires ou impaires.

Exemples

1. *La fonction $x \mapsto x^2$ est paire, donc :* $\int_{-3}^{3} t^2\,\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{3} t^2\,\mathrm{d}t = 2\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^3 = 18.$

2. *La fonction $x \mapsto x^3$ est impaire, donc :* $\int_{-3}^{3} t^2\,\mathrm{d}t = 0.$

VIII.7.2.b Intégration de fonctions périodiques

THÉORÈME VIII.7.3
Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T.
Pour tous nombres réels a et b.

(1) $\int_{a}^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{T} f(t)\,\mathrm{d}t.$ **(2)** $\int_{a+T}^{b+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$

Démonstration Soit F une primitive de f sur I.
(1) On introduit la fonction, G, définie sur $\mathbb{R}$ par : $G(x) = \int_{x}^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t = F(x+T) - F(x)$.
La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc G l'est aussi et pour tout élément,x, de $\mathbb{R}$: $G'(x) = f(x+T) - f(x) = 0$ (car f est T-périodique).
La fonction G est donc constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et pour tout élément,a, de I : $\int_{a}^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = G(a) = G(0) = \int_{0}^{T} f(t)\,\mathrm{d}t$.
(2) On déduit de **(1)** : $\int_{b}^{b+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a}^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t$; c'est-à-dire : $F(b+T) - F(b) = F(a+T) - F(a)$.
D'où : $F(b+T) - F(a+T) = F(b) - F(a)$; c'est-à-dire : $\int_{a+T}^{b+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$. □

Interprétation graphique Lorsque $f > 0$ sur $\mathbb{R}$, voir figure VIII.19.
(1) Les domaines D_1 et D_2 ont la même aire parce qu'ils peuvent être coupés en deux morceaux tels que le premier de D_2 est l'image du second de D_1 par la translation de vecteur $T\vec{\imath}$ et le second de D_2 est l'image du premier de D_1 par la translation de vecteur $2T\vec{\imath}$.
On en déduit que :

$$\int_{a}^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{T} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

(2) Les domaines D_3 et D_4 ont la même aire parce que D_4 est l'image de D_3 par la translation de vecteur $T\vec{\imath}$. On en déduit que :

$$\int_{a+T}^{b+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

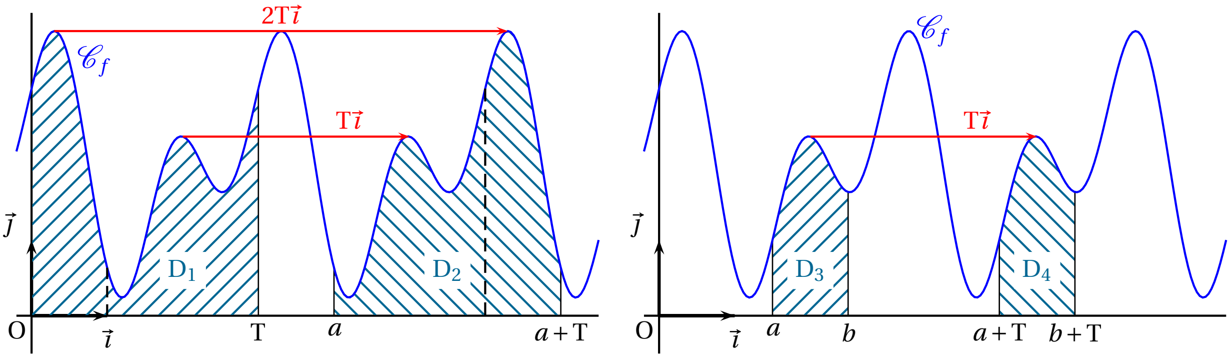


FIGURE VIII.19 – Intégrale de fonction périodique.

Remarques

1. *Plus généralement, pour tout entier relatif, n :* $\displaystyle\int_{a+nT}^{b+nT} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$

2. *La propriété **(1)** du théorème signifie que l'intégrale de f sur un intervalle d'amplitude T est indépendante de cet intervalle.*

3. *En particulier la valeur moyenne d'une fonction, f, T-périodique est la valeur moyenne de f sur un intervalle d'amplitude T.*

VIII.7.3 Exercices

VIII.7.a. Calculer : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t\,\mathrm{d}t.$

VIII.7.b. Calculer : $\displaystyle\int_0^2 t\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^2 t^2\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$

VIII.7.c. Calculer : $\displaystyle\int_0^2 t^2\,\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t.$

VIII.7.d. Calculer : $\displaystyle\int_0^{\pi} t^2\sin 2t\,\mathrm{d}t.$

Chapitre IX

Dénombrement

IX.1 Notions Préliminaires

IX.1.1 Rappels et compléments sur les ensembles

Dans tout ce paragraphe, E désigne un ensemble fini.

- Le *cardinal* de E, noté card (E) ou card E, est le nombre d'éléments de E.
  Par exemple, pour $E = \{a, b, c, d\}$, on a : card (E) = 4.
- *L'ensemble des parties* de E est noté $\mathscr{P}(E)$
  Par exemple, pour $E = \{a, b, c\}$, on a : card (E) = 3.
  $\mathscr{P}(E) = \big\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\big\}$.
  On a : $\operatorname{card}\big(\mathscr{P}(E)\big) = 8$.
- Une *partition* de E est un ensemble de parties non vides de E, deux à deux disjointes, dont l'union est E.
  Par exemple $\big\{\{a\}, \{b\}, \{c, d\}\big\}$ est une partition de $\{a, b, c, d\}$.

Théorème IX.1.1 Principe d'additivité

Si $\{E_1, \dots, E_n\}$ est une partition de E, alors : $\operatorname{card}(E) = \operatorname{card}(E_1) + \cdots + \operatorname{card}(E_n)$.

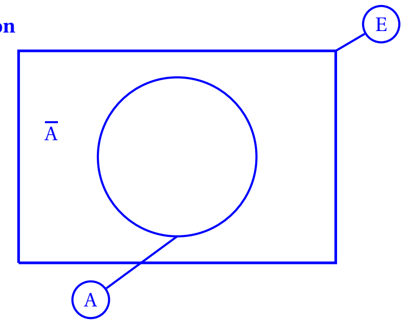
Théorème IX.1.2

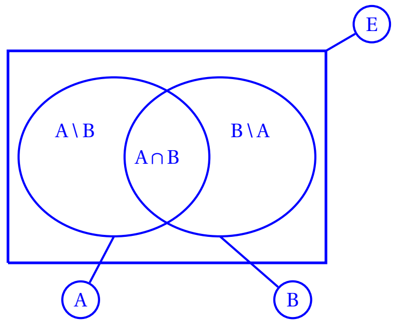
Pour toute parties A et B d'un ensemble E, on a :

(1) $\operatorname{card}\left(\overline{A}\right) = \operatorname{card}(E) - \operatorname{card}(A)$.

(2) $\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B) - \operatorname{card}(A \cap B)$

Démonstration





(1) $\{A, \overline{A}\}$ est une partition de E ; donc :

$$\operatorname{card}(A) + \operatorname{card}\left(\overline{A}\right) = \operatorname{card}(E)$$

On en déduit la propriété.

(2) $\{A \setminus B, A \cap B, B \setminus A\}$ est une partition de $A \cup B$; donc :

$$\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(A \setminus B) + \operatorname{card}(A \cap B) + \operatorname{card}(B \setminus A)$$

c'est-à-dire :

$$\operatorname{card}(A \cup B) = \big(\operatorname{card}(A \setminus B) + \operatorname{card}(A \cap B)\big) + \big(\operatorname{card}(B \setminus A) + \operatorname{card}(A \cap B)\big) - \operatorname{card}(B \cap A)$$

Or $\{A \setminus B, A \cap B\}$ et $\{A \cap B, B \setminus A\}$ sont respectivement des partitions de A et B ; donc :

$$\operatorname{card}(A \setminus B) + \operatorname{card}(A \cap B) = \operatorname{card}(A) \quad \text{et} \quad \operatorname{card}(B \setminus A) + \operatorname{card}(A \cap B) = \operatorname{card}(B).$$

On en déduit la propriété. □

Exercice IX.1.1. ***Dans un groupe d'individus.***

(1) ***200 pratiquent le football, parmi eux 80 pratiquent le rugby et 30 le tennis de table ;***

(2) **160 *pratiquent le rugby et parmi eux* 25 *pratiquent le tennis de table ;***

(3) **50 *pratiquent le tennis de table ;***

(4) **10 *pratiquent les trois sports ;***

(5) **20 *ne pratiquent aucun des sports cités.***

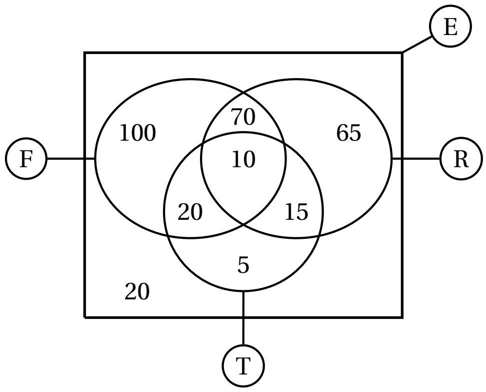
Combien y a-t-il de d'individus dans ce groupe ?

Pour résoudre le problème, on peut construire le diagramme ci-contre.

F désigne l'ensemble des footballeurs etc. On peut répartir les individus en huit classes :

$F\cap T\cap R$; $F\cap T\cap\overline{R}$; $F\cap\overline{T}\cap R$; $\overline{F}\cap T\cap R$; $F\cap\overline{T}\cap\overline{R}$; $\overline{F}\cap T\cap\overline{R}$; $\overline{F}\cap\overline{T}\cap R$; $\overline{F}\cap\overline{T}\cap\overline{R}$;

qui forment une partition de E. On en déduit la construction du diagramme :



- D'après **(5)** : $\text{card}\left(\overline{F}\cap\overline{T}\cap\overline{R}\right)=20$;
- D'après **(4)** : $\text{card}\,(F\cap T\cap R)=10$;
- D'après **(1)** 80 individus pratiquent le football et le rugby et on sait que parmi eux 10 pratiquent les trois sports donc 70 pratiquent uniquement le football et le rugby : $\text{card}\left(F\cap\overline{T}\cap R\right)=70$;
- De même : $\text{card}\left(F\cap T\cap\overline{R}\right)=20$;
- Parmi les 200 footballeurs 100 (10+70+20) pratiquent donc au moins un des deux autres sports, d'où : $\text{card}\left(F\cap\overline{T}\cap\overline{R}\right)=100$;
- D'après **(2)** 25 individus pratiquent le rugby et le tennis de table et on sait que parmi eux 10 pratiquent les trois sports donc 15 pratiquent uniquement le rugby et le tennis de table : $\text{card}\left(\overline{F}\cap T\cap R\right)=15$;
- Parmi les 160 rugbymen 10+70+15 c'est-à-dire 85 pratiquent au moins un des deux autres sports, donc : $\text{card}\left(\overline{F}\cap\overline{T}\cap R\right)=75$;
- Parmi les 50 pongistes 10+20+15 c'est-à-dire 45 pratiquent au moins un des deux autres sports, donc : $\text{card}\left(\overline{F}\cap T\cap\overline{R}\right)=5$;

On en déduit le nombre d'individu : 305.

Pour dénombrer un ensemble, on peut en faire apparaître une partition.

IX.1.2 Produit cartésien d'ensembles

Le produit cartésien de deux ensembles E et F est l'ensemble, noté $E\times F$, des couples (x,y) où $x\in E$ et $y\in F$. L'écriture $E\times F$ se lit « E croix F ».

Exemple

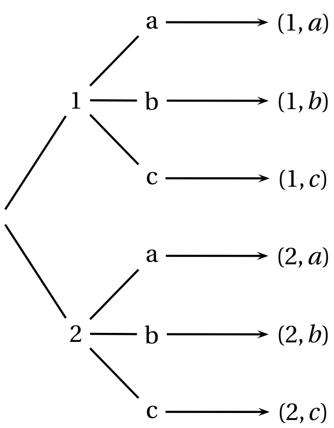
Pour $E=\{1;2\}$ *et* $F=\{a;b;c\}$, *on a :*

$E\times F=\left\{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c)\right\}$

$E\times F$	a	b	c
1	$(1,a)$	$(1,b)$	$(1,c)$
2	$(2,a)$	$(2,b)$	$(2,c)$

Théorème IX.1.3

Lorsque E et F sont des ensembles finis : $\text{card}\,(E\times F)=\text{card}\,(E)\times\text{card}\,(F)$.



Lorsqu'un ensemble E peut être construit par un arbre où on a :
- 1^{re} étape : n_1 cas ;
- 2^{e} étape : pour chaque cas de l'étape précédente, n_2 cas ;
- …
- p^{e} étape : pour chaque cas de l'étape précédente, n_p cas.

On a alors : $\text{card}\,(E)=n_1\times n_2\times\cdots\times n_p$.

Remarques

1. *Plus généralement, on définit le produit cartésien de p ensembles :* $E_1\times E_2\times\cdots\times E_p$

2. *Lorsque* $E_1, \dots, E_p$ *sont finis, on a :* $\operatorname{card}(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p) = \operatorname{card}(E_1) \times \cdots \times \operatorname{card}(E_p)$.

3. *En particulier, l'ensemble* $\underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{p \text{ fois}}$ *est noté* E^p*. Les éléments de* E^p *sont les* p*-uplets, ou* p*-listes, d'éléments de E. Et on a :* $\operatorname{card}(E^p) = \operatorname{card}(E)^p$.

Exercice IX.1.2. ***Combien y a-t-il de codes possibles dans un cadenas présentant quatre molettes de dix chiffres chacune.***

Solution *Considérons l'ensemble :* $E = \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ *;* $\operatorname{card}(E) = 10$*. L'ensemble des codes est l'ensemble des quadruplets* $(c_1;c_2;c_3;c_4)$ *d'éléments de E. Il y a donc* $\operatorname{card}(E^4)$*, c'est-à-dire 10 000, codes possibles.* □

IX.2 Factorielle

DÉFINITION IX.2.1

Soit n un entier naturel, on appelle $n!$ (lire : « factorielle n ») l'entier naturel non nul défini par :

$$n! = \begin{cases} 1 \times 2 \times \cdots \times n & \text{, si } n \neq 0\,; \\ 1 & \text{, si } n = 0. \end{cases}$$

Exemples

1. $0! = 1$; $1! = 1$.

2. $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$ *; ou encore :* $5! = 3! \times 4 \times 5$.

3. $\dfrac{6!}{4!} = 5 \times 6$; $\dfrac{12!}{4! \times 8!} = \dfrac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 445$.

Plus généralement, pour $0 \leqslant p \leqslant n$ *:* $\dfrac{n!}{p!} = (p+1) \times \cdots \times n$.

4. **Exercice IX.2.1.** ***Une mère a quatre petits garçons, elle a acheté quatre voitures de couleurs différentes. De combien de façons peut-elle attribuer une voiture à chacun ?***

Elle a :

- ▷ 4 *choix possibles pour attribuer la première voiture ;*
- ▷ 3 *choix possibles pour attribuer la deuxième voiture ;*
- ▷ 2 *choix possibles pour attribuer la troisième voiture ;*
- ▷ 1 *choix possible pour attribuer la dernière voiture.*

Soit en tout 4 ! = 24.

5. *Plus généralement pour construire une bijection d'un ensemble E vers un ensemble F, de même cardinal* n*. On a :*

- ▷ n *choix possibles pour attribuer l'image du premier élément ;*
- ▷ $n-1$ *choix possibles pour attribuer l'image du deuxième élément ;*

$\vdots$

- ▷ $n-k+1$ *choix possibles pour attribuer l'image du* k^{e} *élément ;*

$\vdots$

- ▷ 1 *choix possible pour attribuer l'image du dernier élément.*

Soit en tout n !.

On en déduit le théorème suivant.

THÉORÈME IX.2.1

Le nombre de bijections d'un ensemble E vers un ensemble F, de même cardinal n, est $n!$.

Exercice IX.2.2. ***Un groupe de six personnes décide de s'asseoir autour d'une table à six places. De combien de façons les individus peuvent ils se répartir autour de la table ?***

Solution *Chaque répartition est une bijection entre l'ensemble des individus et l'ensemble des places, il y a donc* $6!$ *répartitions possibles, c'est-à-dire :* 720. □

Remarque *Deux ensembles images l'un de l'autre par une bijection ont même cardinal.*

DÉFINITION IX.2.2

Une *permutation* d'un ensemble E est une bijection de E vers E.

Remarque *Si* card (E) $= n$*, alors il y a* $n!$ *permutations de E.*

IX.3 Tirage de p éléments dans un ensemble à n éléments

IX.3.1 Tirages successifs avec remise

Exercice IX.3.1. ***Une urne contient n billes, numérotés de 1 à n.***
On choisit une premier bille, on note le choix et on la remet dans l'urne.
On choisit une deuxième bille, on note le choix et on la remet dans l'urne.

$\vdots$

On choisit une p-ième bille, on note le choix et on la remet dans l'urne.
Combien y a-t-il de choix possibles ?

Solution

1re ***méthode*** *L'ensemble des choix possibles est* E^p*, il y en a donc :* $\text{card}\left(E^p\right) = n^p$.

2e ***méthode*** *On a n possibilités pour le premier tirage.*
Pour chacune des ces possibilités, on a n possibilités pour le deuxième tirage.

$\vdots$ □

On a n possibilités pour le $(p-1)$-ième tirage.
Pour chacune des ces possibilités, on a n possibilités pour le p-ième tirage.
Soit au total : n^p choix possibles.

THÉORÈME IX.3.1

Lorsqu'on pratique le tirage *successif avec remise* de p éléments d'un ensemble E à n éléments, le nombre de choix possibles est : $\text{card}\left(E^p\right) = n^p$.

Remarque *On peut avoir : $p > n$.*

Exercice IX.3.2. ***Dans une classe de 17 élèves on doit choisir un responsable du cahier de texte par semaine et ceci pour les 33 semaines de cours. Combien y a-t-il de répartitions possibles ?***

Solution *Désignons par E l'ensemble des élèves de la classe. Les répartitions possibles sont les* 33*-uplets d'éléments de E (l'ensembles des répartitions possibles est donc E^{33}) ; il y a donc : 17^{33} ; répartitions possibles, c'est-à-dire :* 40 254 497 110 927 943 179 349 807 054 456 171 205 137. □

IX.3.2 Tirages successifs sans remise

Exercice IX.3.3. ***Une urne contient n billes, numérotés de 1 à n.***
On choisit une premier bille, on note le choix et on ne la remet pas dans l'urne.
On choisit une deuxième bille, on note le choix et on ne la remet pas dans l'urne.

$\vdots$

On choisit une p-ième bille ($p \leqslant n$), on note le choix et on ne la remet pas dans l'urne.
Combien y a-t-il de choix possibles ?

Solution *On a n possibilités le premier tirage.*
Pour chacune des ces possibilités, on a $n-1$ possibilités le deuxième tirage.

$\vdots$

On a $n-p+1$ possibilités le $(p-1)$-ième tirage.
Pour chacune des ces possibilités, on a $n-p$ possibilités le p-ième tirage.
Soit au total : $\underbrace{n(n-1)\cdots(n-p+1)}_{p \text{ facteurs}} = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ *choix possibles.* □

THÉORÈME IX.3.2

Lorsqu'on pratique le tirage *successif sans remise* de p éléments d'un ensemble E à n éléments, le nombre de choix possibles est : $\dfrac{n!}{(n-p)!}$.

Remarque *On a nécessairement :* $0 \leqslant p \leqslant n$.

Exercice IX.3.4. ***Une course de chevaux, pour le tiercé, a 17 partants. Combien a t-on d'arrivées possibles ?***

Solution *Désignons par E l'ensemble des chevaux. Les arrivées possibles sont les triplets d'éléments* distincts *de E ; il y a donc :* $\frac{17!}{(17-3)!}$ *; arrivées possibles, c'est-à-dire :* $17 \times 16 \times 15 = 4080$. □

Remarque *Lorsque* $p = n$*, un tirage est une bijection de E vers* $\{1; 2; \cdots; n\}$ *et on obtient* $n!$ *tirages possibles.*

IX.3.3 Combinaisons - Tirages simultanés

IX.3.3.a Combinaisons

DÉFINITION IX.3.1

Soit E un ensemble de n éléments et p un entier tel que $0 \leqslant p \leqslant n$.
Une combinaison de p éléments de E est une partie de E qui contient p éléments.

Exemple *Pour* $E = \{a, b, c\}$ *et* $p = 2$.
Les combinaisons de deux éléments de E sont les parties : $\{a, b\}$; $\{a, c\}$; $\{b, c\}$.

Remarques
1. *Dans un ensemble, les éléments sont deux à deux distincts.*
Ainsi $\{a, b, a\}$ *n'est pas un ensemble car il contient deux fois a.*
2. *Deux ensembles qui contiennent les mêmes éléments sont égaux.*
Ainsi : $\{a, b\} = \{b, a\}$.

Notation Le nombre de parties (i.e. de combinaisons) de p éléments d'un ensemble de n éléments est noté C_n^p ou $\binom{n}{p}$, $0 \leqslant p \leqslant n$.

Exemples

1. *De l'exemple ci-dessus, on déduit que :* $\binom{3}{2} = 3$;

2. *E est un ensemble à* n *éléments. Il n'existe qu'une partie de E qui contient zéro élément, c'est l'ensemble vide, donc :* $\binom{n}{0} = 1$

3. *une seule partie de E contient* n *éléments, c'est E lui-même, donc :* $\binom{n}{n} = 1$;

4. *il y a autant d'éléments que de singletons, donc :* $\binom{n}{1} = n$.

THÉORÈME IX.3.3

Pour tous entiers p et n tels que : $0 \leqslant p \leqslant n$; on a :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Démonstration Soit A une combinaison de p éléments de E. Pour former avec les éléments de A un p-uplet d'éléments distincts on choisit quel élément sera le premier, quel élément (parmi les éléments restants) sera le deuxième et ainsi de suite. Choisir un p-uplet d'éléments distincts de A c'est donc se donner une bijection entre A et $\{1; \ldots; p\}$. On peut donc former $p!$ p-uplets d'éléments distincts de A. Plus généralement, avec chaque combinaison de p éléments de E on peut former $p!$ p-uplets d'éléments distincts. Or il y a $\binom{n}{p}$ combinaisons de E à p éléments, il y a donc en tout $p!\binom{n}{p}$ p-uplets d'éléments distincts de E. Donc, d'après le théorème IX.3.2 :

$$p!\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

On en déduit que :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

□

Exemples

1. $\dbinom{9}{3} = \dfrac{9!}{3! \times 6!} = \dfrac{9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3} = 3 \times 4 \times 7 = 84.$

2. $\dbinom{49}{6} = \dfrac{49!}{6! \times 43!} = \dfrac{49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 44}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6} = 44 \times 3 \times 46 \times 47 \times 49 = 13\,983\,816.$

THÉORÈME IX.3.4

Pour tous entiers p et n tels que : $0 \leqslant p \leqslant n$; on a :

(1) $\dbinom{n}{p} = \dbinom{n}{n-p}$.

(2) $\dbinom{n-1}{p-1} + \dbinom{n-1}{p} = \dbinom{n}{p}$.

Démonstration Soit p et n deux entiers tels que : $0 \leqslant p \leqslant n$;

(1) $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!} = \dfrac{n!}{(n-p)!\big(n-(n-p)\big)!} = \dbinom{n}{n-p}$;

(2)
$$\begin{aligned}\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!\big((n-1)-(p-1)\big)!} + \frac{(n-1)!}{p!\big((n-1)-p\big)!}\\ &= \frac{p(n-1)!}{p!(n-p)!} + \frac{(n-p)(n-1)!}{p!(n-p)!}\\ &= \frac{n(n-1)!}{p!(n-p)!}\\ &= \frac{n!}{p!(n-p)!}\\ &= \binom{n}{p}\end{aligned}$$
□

Exemples $\dbinom{10}{7} = \dbinom{10}{3}$; $\dbinom{10}{6} + \dbinom{10}{7} = \dbinom{11}{7}$

Remarques *Les propriétés du théorème IX.3.4 se justifient également par des arguments intuitifs simples. Soit E un ensemble à n éléments.*

1. *Une combinaison de E a p éléments si et seulement si la combinaison complémentaire a $n-p$ éléments. Il y a donc autant de combinaisons de E à p éléments que de combinaisons de E à $n-p$ éléments.*

2. *Dans le cas où $1 \leqslant p \leqslant n-1$, on choisit un élément fixé e. Les combinaisons de E à p éléments se répartissent en deux types ; celles qui contiennent e et celles qui ne contiennent pas e. Une combinaison contenant e est l'union de $\{e\}$ avec une combinaison de $\mathrm{E} \setminus \{e\}$ à $p-1$ éléments. Il y a donc $\dbinom{n-1}{p-1}$ combinaisons de E à p éléments contenant e. Une combinaison ne contenant pas e est une combinaison de $\mathrm{E} \setminus \{e\}$ à p éléments. Il y a donc $\dbinom{n-1}{p}$ combinaisons de E à p éléments ne contenant pas e ; d'où : $\dbinom{n-1}{p-1} + \dbinom{n-1}{p} = \dbinom{n}{p}$*

IX.3.3.b Triangle de Pascal

On sait que pour $0 < p < n$, on a :

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}.$$

Ce résultat permet de calculer les nombres $\binom{n}{p}$ de proche en proche, en formant le triangle de Pascal[1] à l'aide du schéma suivant :

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$
$$\shortparallel$$
$$\binom{n}{p}$$

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
$\vdots$	$\vdots$						$\ddots$

IX.3.3.c Tirages simultanés

Choisir p éléments parmi les n éléments d'un ensemble E c'est se donner une combinaison de E à p éléments ; il y a donc $\binom{n}{p}$ façons de choisir p éléments parmi n.

Exercice IX.3.5. ***25 individus doivent choisir trois d'entre eux pour les représenter. De combien de façon peuvent-ils choisir leurs trois représentants ?***

Solution *Les choix possibles sont les combinaisons de trois individus parmi les* 25 *du groupe, il y a donc* $\binom{25}{3}$ *choix possibles ; c'est-à-dire :* 2300. □

IX.3.3.d La formule du binôme de Newton

Théorème IX.3.5 Formule du binôme de Newton[2]

Soit a et b deux nombres complexes non nuls et n un entier naturel ($n \neq 0$ si $a+b=0$). On a :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p.$$

Démonstration Raisonnons par récurrence sur n.

Pour $n = 0$, on a : $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1 = (a+b)^0$;

L'égalité est donc vraie pour $n = 0$.

Pour $n = 1$, on a : $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 = a + b = (a+b)^1$;

L'égalité est donc vraie également pour $n = 1$.

Supposons l'égalité vraie pour un entier naturel non nul k, c'est-à-dire : $(a+b)^k = \sum_{p=0}^{k} \mathrm{C}_k^p a^{k-p} b^p$.

On a alors :

$$\begin{aligned}
(a+b)^{k+1} &= (a+b)(a+b)^k \\
&= (a+b)\left(\mathrm{C}_k^0 a^k + \mathrm{C}_k^1 a^{k-1} b + \mathrm{C}_k^2 a^{k-2} b^2 + \cdots + \mathrm{C}_k^k b^k\right) \\
&= \left(\mathrm{C}_k^0 a^{k+1} + \mathrm{C}_k^1 a^k b + \mathrm{C}_k^2 a^{k-1} b^2 + \cdots + \mathrm{C}_k^k a b^k\right) + \left(\mathrm{C}_k^0 a^k b + \mathrm{C}_k^1 a^{k-1} b^2 + \mathrm{C}_k^2 a^{k-2} b^3 + \cdots + \mathrm{C}_k^k b^{k+1}\right) \\
&= \mathrm{C}_k^0 a^{k+1} + \left(\mathrm{C}_k^0 + \mathrm{C}_k^1\right) a^k b + \cdots + \left(\mathrm{C}_k^{p-1} + \mathrm{C}_k^p\right) a^{k-p+1} b^p + \cdots + \left(\mathrm{C}_k^{k-1} + \mathrm{C}_k^k\right) a b^k + \mathrm{C}_k^k b^{k+1} \\
&= \mathrm{C}_{k+1}^0 a^{k+1} + \mathrm{C}_{k+1}^1 a^k b + \cdots + \mathrm{C}_{k+1}^p a^{k-p+1} b^p + \cdots + \mathrm{C}_{k+1}^k a b^k + \mathrm{C}_{k+1}^{k+1} b^{k+1} \\
&= \sum_{p=0}^{k+1} \mathrm{C}_{k+1}^p a^{k+1-p} b^p
\end{aligned}$$

1. Blaise Pascal (1623 - 1662), mathématicien, physicien et philosophe français.
2. Isaac Newton (1642 - 1727), mathématicien, physicien et astronome anglais.

Ou encore :
$$\begin{aligned}(a+b)^{k+1} &= (a+b)(a+b)^k\\
&= (a+b)\sum_{p=0}^{k} \mathrm{C}_k^p\, a^{k-p}\, b^p\\
&= a\sum_{p=0}^{k} \mathrm{C}_k^p\, a^{k-p}\, b^p + b\sum_{p=0}^{k} \mathrm{C}_k^p\, a^{k-p}\, b^p\\
&= \sum_{p=0}^{k} \mathrm{C}_k^p\, a^{k-p+1}\, b^p + \sum_{p=0}^{k} \mathrm{C}_k^p\, a^{k-p}\, b^{p+1}\\
&= \sum_{p=0}^{k} \mathrm{C}_k^p\, a^{k-p+1}\, b^p + \sum_{p=1}^{k+1} \mathrm{C}_k^{p-1}\, a^{k-p+1}\, b^p\\
&= \mathrm{C}_k^0\, a^{k-0+1}\, b^0 + \sum_{p=1}^{k}\left(\mathrm{C}_k^p\, a^{k-p+1}\, b^p + \mathrm{C}_k^{p-1}\, a^{k-p+1}\, b^p\right) + \mathrm{C}_k^k\, a^{k-(k+1)+1}\, b^{k+1}\\
&= \mathrm{C}_{k+1}^0\, a^{k+1-0}\, b^0 + \sum_{p=1}^{k}\left(\mathrm{C}_{k+1}^p\, a^{k-p+1}\, b^p\right) + \mathrm{C}_{k+1}^{k+1}\, a^{k+1-(k+1)}\, b^{k+1}\\
&= \sum_{p=0}^{k+1} \mathrm{C}_{k+1}^p\, a^{k+1-p}\, b^p\end{aligned}$$

Donc, par récurrence, la formule du binôme de Newton est démontrée. □

Remarques

1. *Cette formule explique le nom de « coefficients binomiaux » donné aux nombres* $\binom{n}{p}$.

2. *La formule du binôme de Newton peut également être établie à partir de considérations plus intuitives. Fixons* n*, on a :*

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\times\cdots\times(a+b)}_{n \text{ facteurs}}. \tag{IX.1}$$

$a+b$ est une somme de monômes de degré 1 en a et b donc $(a+b)^n$ est une somme de monômes de degré n en a et b ; c'est-à-dire de monômes de la forme : $\alpha_p a^{n-p} b^p$; en observant la formule (IX.1) on remarque que α_p est le nombre de fois où apparaît $a^{n-p} b^p$ dans le développement. Or les monômes $a^{n-p} b^p$ apparaissent lorsqu'on prend a dans $n-p$ facteurs et b dans les p facteurs restants. Par conséquent, il y a autant de monômes $a^{n-p} b^p$ dans le développement qu'il y a de façons de choisir $n-p$ facteurs parmi n ; c'est-à-dire : $\binom{n}{n-p}$; ou encore : $\binom{n}{p}$; donc : $\alpha_p = \binom{n}{p}$; puis :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p} a^{n-p} b^p$$

Exemples

1.
$$\begin{aligned}(2+i)^6 &= \binom{6}{0}2^6 + \binom{6}{1}2^5 i + \binom{6}{2}2^4 i^2 + \binom{6}{3}2^3 i^3 + \binom{4}{2}2^2 i^4 + \binom{6}{5}2^1 i^5 + \binom{6}{6}2^0 i^6\\
&= 1\times 64 + 6\times 32 i + 15\times 16\times(-1) + 20\times 8\times(-i) + 15\times 4\times 1 + 6\times 2\times i + 1\times 1\times(-1)\\
&= -117 + 44 i\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}(1+\sqrt{2})^5 &= 1 + 5\sqrt{2} + 10\sqrt{2}^2 + 10\sqrt{2}^3 + 5\sqrt{2}^4 + \sqrt{2}^5\\
&= 1 + 5\sqrt{2} + 10\times 2 + 10\times 2\sqrt{2} + 5\times 4 + 4\sqrt{2}\\
&= 41 + 29\sqrt{2}\end{aligned}$$

COROLLAIRE IX.3.6

Soit E un ensemble à n éléments.
Le nombre de parties de E est : 2^n

Démonstration Pour tout entier p tel que : $0 \leqslant p \leqslant n$; le nombre de parties de E à p éléments est : $\binom{n}{p}$. Donc :

$$\operatorname{card}\mathscr{P}(\mathrm{E}) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = \binom{n}{0}1^n\times 1^0 + \binom{n}{1}1^1\times 1^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1}1^{n-1}\times 1^1 + \binom{n}{n}1^0\times 1^n = (1+1)^n = 2^n \ \square$$

Remarque *On aurait pu obtenir cette propriété sans utiliser la formule du binôme du Newton. En effet, numérotons les éléments de E de 1 à n. Considérons une partie A de E, à chaque numéro associons $\in$ si l'élément correspondant appartient à A et $\notin$ sinon, on associe ainsi à A un n-uplet d'éléments de $\{\in, \notin\}$. En répétant le procédé pour toutes les parties de A de E, on met en bijection l'ensemble des parties de E avec l'ensemble des n-uplets d'éléments de $\{\in, \notin\}$; d'où : $\operatorname{card}\mathscr{P}(\mathrm{E}) = 2^n$.*

IX.3.4 Tableau récapitulatif

Le tableau ci-dessous récapitule les façons de calculer le cardinal de l'univers dans les principaux cas.

<table>
<tr><th></th><th>Tirages successifs de p éléments parmi n</th><th>Tirage simultané de p éléments parmi n</th></tr>
<tr><td>avec remise</td><td>n^p</td><td rowspan="2">$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$</td></tr>
<tr><td>sans remise</td><td>$\frac{n!}{(n-p)!}$</td></tr>
</table>

TABLE IX.1 – Tableau récapitulatif

Chapitre X

Calcul des probabilités

X.1 Calculs de probabilités

X.1.1 Vocabulaire des événements

X.1.1.a Expérience aléatoire

- Lorsqu'on lance un dé, six résultats sont possibles : 1, 2, 3, 4, 5, 6.
  On dit qu'on a réalisé une *expérience aléatoire* (ou *épreuve*) comportant 6 *éventualités* ou *issues* et que l'*univers* associé a cette expérience aléatoire est : $\Omega = \{1;2;3;4;5;\ 6\}$.
- Le lancer de deux pièces de monnaies distinctes est une expérience aléatoire comportant 4 éventualités. L'univers associé à cette épreuve est : $\Omega = \{(P,P);(P,\ F);(F,P);(F,F)\}$.

Dans la première moitié de ce chapitre, les univers considérés sont des ensembles finis non vides.

X.1.1.b Événements liés à une expérience aléatoire

DÉFINITIONS X.1.1
Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire.
(1) On appelle *événement* toute partie de Ω.
(2) On appelle *événement élémentaire* tout singleton de Ω.

Exemples *Dans le lancer d'un dé :*
1. *« obtenir un nombre pair » est l'événement* $\{2;4;6\}$ *;*
2. *« obtenir un nombre premier pair » est l'événement élémentaire* $\{2\}$.

Dans une épreuve, un événement est réalisé s'il contient le résultat de l'expérience. Par exemple, si on obtient « 4 » lors d'un lancer de dé, l'événement « obtenir un nombre pair » est réalisé.

Le tableau suivant indique la signification des diverses expressions utilisées dans le langage des événements.

Vocabulaire des événements	Signification ensembliste	Notation
Univers	Ensemble Ω	Ω
Éventualité ou issue	Élément de Ω	$\omega\ (\omega \in \Omega)$
Événement	Partie de Ω	$A (A \subset \Omega)$
Événement élémentaire	Singleton	$\{\omega\}(\omega \in \Omega)$
Événement certain	Partie pleine	Ω
Événement impossible	Partie vide	$\varnothing$
Événement « A ou B »	Réunion des parties A et B	$A \cup B$
Événement « A et B »	Intersection des parties A et B	$A \cap B$
Événements A et B incompatibles	Parties A et B disjointes	$A \cap B = \varnothing$
Événement contraire de A	Complémentaire de A dans Ω	$\overline{A}$

Exemples *Dans le lancer d'un dé, on considère les événements A : « obtenir un nombre pair » ; B : « obtenir un nombre premier » ; C : « obtenir 6 ».*
1. *On a :* $A \cup B = \{2;3;4;5;6\}$ *;* $A \cup B$ *est l'événement « obtenir un nombre pair ou premier ».*
2. *On a :* $A \cap B = \{2\}$ *;* $A \cap B$ *est l'événement « obtenir un nombre pair et premier ».*
3. *Les événements B et C sont incompatibles.*

4. *On a :* $\bar{A} = \{1;3;5\}$ *;* $\bar{A}$ *est l'événement : « obtenir un nombre impair ».*

X.1.2 Probabilité d'un événement

X.1.2.a Introduction

On lance un dé bien équilibré ; l'univers associé à cette épreuve est : $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$.
La chance d'apparition est la même pour chaque face.

- L'événement $\{2\}$ a une chance sur six d'être réalisé ; on dit que la probabilité de cet événement est $\frac{1}{6}$.
- L'événement $\{1;5\}$ a deux chances sur six d'être réalisé, on dit que la probabilité de cet événement est $\frac{1}{3}$.
- « obtenir un nombre pair » est l'événement $\{2;4;6\}$, dont la probabilité est $\frac{1}{2}$.
- L'événement certain a six chances sur six d'être réalisé ; sa probabilité est 1.
- L'événement impossible n'a aucune chance d'être réalisé ; sa probabilité est 0.

DÉFINITION X.1.2
Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire.
Une *probabilité* sur l'univers Ω est une application P de $\mathscr{P}(\Omega)$ vers $[0;1]$, qui à toute partie A de Ω associe le nombre réel P(A) appelé probabilité de l'événement A et qui vérifie les conditions suivantes :
- la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent ;
- la probabilité de l'événement certain est 1 ;
- la probabilité de l'événement impossible est 0.

Remarques
1. *La probabilité de l'événement élémentaire* $\{\omega\}$ *est notée* $P(\omega)$*.*
2. *Une probabilité P est parfaitement déterminée par la donnée des probabilités des événements élémentaires.*

ω	ω_1	$\cdots$	ω_i	$\cdots$	ω_n
$P(\omega)$	p_1	$\cdots$	p_i	$\cdots$	p_n

Exemples *On lance un dé pipé dont les faces sont numérotées de 1 à 6.*
La probabilité d'apparition d'un nombre pair est le double de la probabilité d'apparition d'un nombre impair et les probabilités d'apparition de deux nombres de même parité sont égales.
1. *Déterminer la probabilité d'apparition de chaque face du dé.*
L'univers est : $\Omega = \{1;2;3;4;5;\ 6\}$*. Soit* p *la probabilité d'apparition d'un nombre pair et* q *celle d'un nombre impair.*
On a : $p = 2q$*.*
Or : $P(\Omega) = 1$ *; donc :* $3p + 3q = 1$*.*
On en déduit que : $q = \frac{1}{9}$ *et* $p = \frac{2}{9}$*.*
Le tableau ci-contre donne la probabilité d'apparition de chaque face du dé.

ω	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
$P(\omega)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$

2. *Quelle est la probabilité d'apparition d'un nombre inférieur ou égal à 4 ?*
La probabilité cherchée est celle de l'événement : $A = \{1;2;3;4\}$*.*
On a : $P(A) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) = \frac{2}{3}$*.*

X.1.2.b Équiprobabilité

Lorsque les événements élémentaires d'une expérience ont la même probabilité, on dit qu'il y a *équiprobabilité*.
Les situations d'équiprobabilité sont généralement suggérées par des expressions comme : « dé parfait », « dé non pipé », « pièce parfaite » « boules indiscernables au toucher », « cartes bien battues », « on tire au hasard » etc.

THÉORÈME X.1.1
Soit P une probabilité définie sur un univers Ω.
Dans l'hypothèse d'équiprobabilité, pour tout événement A, on a : $P(A) = \frac{\text{card}\,(A)}{\text{card}\,(\Omega)}$.

Démonstration Les événements élémentaires ont tous la même probabilité, soit p cette probabilité. On a : $P(\Omega) = 1$; donc : $p\,\text{card}\,(\Omega) = 1$; d'où : $p = \frac{1}{\text{card}\,(\Omega)}$.

On en déduit que pour tout événement A, on a : $P(A) = p\,\text{card}\,(A) = \dfrac{\text{card}\,(A)}{\text{card}\,(\Omega)}$. □

Remarque *Les éventualités de A sont appelés cas favorables et celles de* Ω*, cas possibles.*
On écrit souvent : $P(A) = \dfrac{\textit{nombres de cas favorables}}{\textit{nombres de cas possibles}}$.

Exercice X.1.1. ***On lance deux dés parfaits et on note la somme des nombres obtenus.***
Quelle est la probabilité d'obtenir **10 *?***

Solution *L'univers* Ω *est l'ensemble des couples d'éléments de :* $\{1;2;3;4;5;6\}$.
On a : $\text{card}\,(\Omega) = 6^2 = 36$. *« Obtenir 10 » est l'événement :* $\{(4;6),(5;5),(6;4)\}$.
On est dans une situation d'équiprobabilité (dés parfaits), donc la probabilité cherchée est : $\dfrac{1}{12}$. □

Exercice X.1.2. ***On tire simultanément et au hasard*** **5** ***cartes dans un jeu de*** **32** ***cartes.***
Quelle est la probabilité de tirer le roi de cœur ?

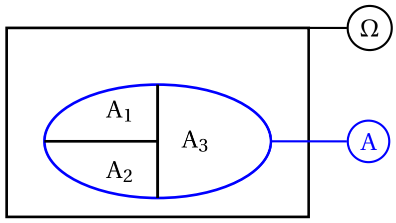
Solution *L'univers* Ω *est l'ensemble des combinaisons de* 5 *cartes d'un jeu de* 32*, donc :* $\text{card}\,(\Omega) = \dbinom{32}{5} = 201\,376$.
Les cartes sont tirées au hasard, on est donc dans une situation d'équiprobabilité.
Soit A l'événement : « tirer le roi de cœur ». Réaliser A c'est choisir le roi de cœur puis tirer 4 cartes parmi les 31 *cartes restantes ; donc :* $\text{card}\,(A) = \dbinom{31}{4} = 31\,465$.
La probabilité cherchée est donc : $\dfrac{\text{card}\,(A)}{\text{card}\,(\Omega)} = \dfrac{31\,465}{201\,376} = \dfrac{5}{32} = 0{,}156\,25$. □

X.1.2.c Propriétés

Théorème X.1.2
Soit P une probabilité définie sur un univers Ω, A et B deux événements. On a :
(1) si $A \cap B = \varnothing$ alors : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;
(2) $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

Démonstration
(1) Si l'un (au moins) des événements A ou B est impossible, alors la propriété est évidente. En effet si $A = \varnothing$ alors : $P(A \cup B) = P(\varnothing \cup B) = P(B)$ et $P(A) + P(B) = P(\varnothing) + P(B) = 0 + P(B) = P(B)$.
Si les deux événements sont possibles, alors quitte à numéroter à nouveau les éventualités on peut supposer que : $A = \{\omega_1;\dots;\omega_p\}$ et $B = \{\omega_{p+1};\dots;\omega_q\}$.
On a alors : $A \cup B = \{\omega_1;\dots;\omega_q\}$;
d'où : $P(A) + P(B) = \sum_{i=1}^{p} P(\omega_i) + \sum_{i=p+1}^{q} P(\omega_i) = \sum_{i=1}^{q} P(\omega_i) = P(A \cup B)$.
(2) Pour $B = \bar{A}$, on obtient : $P(A) + P(\bar{A}) = P(A \cup \bar{A}) = P(\Omega) = 1$. □

Remarque *Plus généralement, par récurrence, on déduit de* **(1)** *que si* $A_1, \dots, A_n$ *sont des événements deux à deux incompatibles, alors :* $P(A_1) + \cdots + P(A_n) = P(A_1 \cup \cdots \cup A_n)$.
Ce qui peut également s'écrire : $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

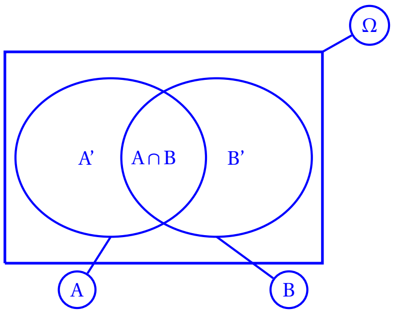


On en déduit le théorème suivant.
Théorème X.1.3 **Théorème faible des probabilités totales**
Si $\{A_1,\dots,A_n\}$ est une partition[1] d'un événement A, alors :
$P(A) = P(A_1) + \cdots + P(A_n)$.

Théorème X.1.4
Soit P une probabilité définie sur un univers Ω et A, B deux événements.
On a : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Démonstration

Notons A' le complémentaire de $A \cap B$ dans A et B' le complémentaire de $A \cap B$ dans B.
On a : $A = (A \cap B) \cup A'$, avec $(A \cap B) \cap A' = \varnothing$;
donc : $P(A) = P(A \cap B) + P(A')$.
On a : $B = (A \cap B) \cup B'$, avec $(A \cap B) \cap B' = \varnothing$;
donc : $P(B) = P(A \cap B) + P(B')$.
Tout élément de $A \cup B$ est soit élément de A mais pas de B, soit élément de B mais pas de A soit élément des deux. $\{A', A \cap B, B'\}$ est donc une partition de $A \cup B$. On en déduit que : $P(A \cup B) = P(A') + P(B') + P(A \cap B)$
$P(A \cup B) = (P(A') + P(A \cap B)) + (P(B') + P(A \cap B)) - P(A \cap B)$
$P(A \cup B) = P(A \cap B) + P(A \cup B)$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



□

Exercice X.1.3. ***Une urne contient 15 boules, numérotées de 1 à 15. On tire au hasard une boule et on désigne par N son numéro. On désigne respectivement par A et B les événements « N est pair » et « N est multiple de trois ».***

1. Déterminer la probabilité des événements A, B et $A \cap B$.

2. Calculer la probabilité des événements $\bar{A}$, $\bar{B}$ et $A \cup B$.

Solution 1. *L'univers est :* $\Omega = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12;13;14;15\}$ *;*
La boule est tirée au hasard on a donc équiprobabilité.
Pour tout événement élémentaire $\{\omega\}$, *on a donc :* $P(\omega) = \dfrac{1}{15}$ *;*
d'où : $P(A) = P(\{2;4;6;8;10;12;14\}) = \dfrac{7}{15}$; $P(B) = P(\{3;6;9;12;15\}) = \dfrac{5}{15} = \dfrac{1}{3}$
et $P(A \cap B) = P(\{6;12\}) = \dfrac{2}{15}$.
2. *On a :* $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \dfrac{8}{15}$ *;* $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = \dfrac{2}{3}$ *;*
et $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \dfrac{7}{15} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{15} = \dfrac{2}{3}$. □

X.1.2.d Événements indépendants

DÉFINITION X.1.3
Soit P une probabilité définie sur un univers Ω.
Deux événements A et B sont *indépendants* lorsque : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Dans le cas contraire, A et B sont dits dépendants.

Exemples

1. *Dans une classe de* 36 *élèves, on aimerait savoir si les élèves littéraires sont meilleurs en sport que les élèves non littéraires.*

Un élève est déclaré littéraire lorsqu'il a obtenu la moyenne en français, sportif lorsqu'il a obtenu la moyenne en éducation physique et sportive. Le tableau ci-joint récapitule les résultats de l'enquête menée dans cette classe.

	Littéraires	*Non littéraires*	*Total*
Sportifs	*18*	*6*	*24*
Non sportifs	*9*	*3*	*12*
Total	*27*	*9*	*36*

TABLE *X.1 – sportifs & littéraires*

On choisit au hasard un élève et on considère les événements suivants.

S : « l'élève est sportif »
L : « l'élève est littéraire »

On a : $P(S) = \dfrac{2}{3}$; $P(L) = \dfrac{3}{4}$ *et* $P(S \cap L) = \dfrac{1}{2}$ *; donc :*

$$P(S \cap L) = P(S) \times P(L)$$

Les événements S et L sont indépendants.
Si on choisit un littéraire au hasard, la probabilité pour qu'il soit sportif est : $\dfrac{18}{27} = \dfrac{2}{3}$.
Si on choisit un non littéraire au hasard, la probabilité pour qu'il soit sportif est encore : $\dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$.
Dans cette classe, les littéraires ne sont ni plus ni moins sportifs que les non littéraires.
2. *Une classe comprend* 15 *filles et* 21 *garçons.*

On demande des volontaires pour former une équipe de football mixte, on obtient les résultats ci-contre. On choisit un (ou une) élève au hasard dans la classe et on considère les événements F : « l'élève est une fille » et V : « l'élève est volontaire ».

	Filles	*Garçons*	*Total*
Volontaires	8	16	24
Non volontaires	7	5	12
Total	15	21	36

TABLE *X.2 – Volontaires par genre*

On a : $\mathrm{P(F)} = \dfrac{5}{12}$; $\mathrm{P(V)} = \dfrac{2}{3}$ *et* $\mathrm{P(V \cap F)} = \dfrac{2}{9}$ *; donc :*

$$\mathrm{P(F \cap V)} \neq \mathrm{P(F)} \times \mathrm{P(V)}$$

Les événements F et V sont dépendants.

Si on choisit une fille au hasard, la probabilité pour qu'elle soit volontaire est : $\dfrac{8}{15}$.

Si on choisit un garçon au hasard, la probabilité pour qu'il soit volontaire est : $\dfrac{16}{21}$.

Plus généralement, on définit l'indépendance de n événements.

DÉFINITION X.1.4

Soit P une probabilité définie sur un univers Ω.

n événements $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n$ sont *indépendants* lorsque pour tout sous-ensemble $\{i_1, \ldots, i_p\}$ de $\{1 ; \ldots ; n\}$, on a :

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{k=1}^{p} \mathrm{A}_{i_k}\right) = \prod_{k=1}^{p} \mathrm{P}(\mathrm{A}_{i_k}).$$

Remarque *Les considérations précédentes permettent de calculer la probabilité de* $\mathrm{A \cap B}$ *lorsque A et B sont des événements indépendants. Cette indépendance peut être signalée dans l'énoncé. Mais elle peut aussi découler des conditions de l'expérience ; ainsi, il y a indépendance entre les résultats :*

- *de tirages successifs avec remise ;*
- *de jets successifs d'un dé, ou d'une pièce de monnaie.*

Exercice X.1.4. ***On joue à pile ou face avec une pièce tordue où la probabilité d'obtenir face est*** $\dfrac{1}{3}$ ***et celle d'obtenir pile*** $\dfrac{2}{3}$***. On lance neuf fois cette pièce. On désigne par*** F_1 ***l'événement « obtenir face au 1***[er] ***lancer » puis*** F_2 ***…***

Quelle est la probabilité de l'événement (F_1 ***et*** F_2 ***et*** F_9***) ?***

Solution *Les événements* F_1, F_2 *et* F_9 *sont indépendants donc :*

$$\mathrm{P}(\mathrm{F}_1 \text{ et } \mathrm{F}_2 \text{ et } \mathrm{F}_9) = \mathrm{P}(\mathrm{F}_1) \times \mathrm{P}(\mathrm{F}_2) \times \mathrm{P}(\mathrm{F}_9) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \qquad \square$$

Exercice X.1.5. ***Un joueur de fléchettes dispose d'une cible carrée d'un mètre de côté. Il lance une fléchette, on suppose qu'il plante la fléchette dans la cible, mais n'importe où dans la cible. Ainsi la probabilité que la fléchette se plante dans une région R est l'aire, en mètre carré de cette région. Par abus de langage nous identifierons la région et l'événement correspondant. On considère les événements suivants. A ; B ; C ; D.***

1. Démontrer que les événements A, B, C et D sont deux à deux indépendants.

2. Les événements A, B, C sont-ils indépendants ?

3. Les événements A, B, C, D sont-ils indépendants ?

Solution 1. *Les aires des régions A, B, C, D représentent chacune la moitié de l'aire de la cible, donc :*

$$\mathrm{P(A)} = \mathrm{P(B)} = \mathrm{P(C)} = \mathrm{P(D)} = \frac{1}{2}.$$

D'où :

$$\mathrm{P(A)} \times \mathrm{P(B)} = \mathrm{P(A)} \times \mathrm{P(C)} = \mathrm{P(A)} \times \mathrm{P(D)} = \mathrm{P(B)} \times \mathrm{P(C)} = \mathrm{P(B)} \times \mathrm{P(D)} = \mathrm{P(C)} \times \mathrm{P(D)} = \frac{1}{4}$$

Les intersections sont définies par : $\mathrm{A \cap B}$; $\mathrm{A \cap C}$; $\mathrm{A \cap D}$; $\mathrm{B \cap C}$; $\mathrm{B \cap D}$; $\mathrm{C \cap D}$.

Les aires de ces intersections représentent chacune le quart de l'aire de la cible aire ; donc :

$$\mathrm{P(A \cap B)} = \mathrm{P(A \cap C)} = \mathrm{P(A \cap D)} = \mathrm{P(B \cap C)} = \mathrm{P(B \cap D)} = \mathrm{P(C \cap D)} = \frac{1}{4}$$

Les événements A, B, C et D sont donc deux à deux indépendants.

2. *On sait déjà que les événements A, B, C sont deux à deux indépendants, pour savoir s'ils sont indépendants il ne reste plus qu'a comparer* $\mathrm{P(A)} \times \mathrm{P(B)} \times \mathrm{P(C)}$ *avec* $\mathrm{P(A \cap B \cap C)}$*. On a :* $\mathrm{P(A)} \times \mathrm{P(B)} \times \mathrm{P(C)} = \dfrac{1}{8}$.

$\mathrm{A \cap B \cap C}$ *est la région : ; donc :* $\mathrm{P(A \cap B \cap C)} = \dfrac{1}{8}$.

Par conséquent les événements A, B, C sont indépendants.

3. *On sait déjà que les événements A, B, C, D sont deux à deux indépendants, pour savoir s'ils sont indépendants il ne reste plus qu'a savoir si, lorsqu'on en choisit trois ou lorsqu'on choisit les quatre, la probabilité de l'intersection est le produit des probabilités.*

D'après l'étude menée en ***1.*** *:* $A \cap D = B \cap D$ *; donc :* $A \cap B \cap D = A \cap D$ *; d'où :* $P(A \cap B \cap D) = \frac{1}{4}$.

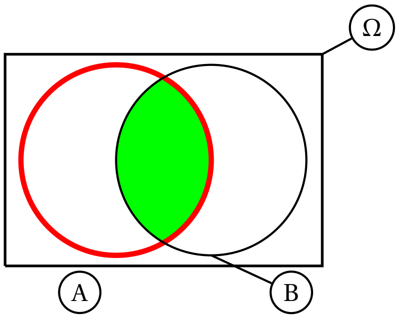
Or : $P(A) \times P(B) \times P(D) = \frac{1}{8}$.

Les événements A, B, C, D sont donc dépendants. □

X.1.3 Probabilités conditionnelles

Dans cette partie, un univers Ω est muni d'une probabilité P.

X.1.3.a Introduction



Soit A et B deux événements ($P(A) \neq 0$). On cherche à connaître la probabilité que B se réalise sachant que A est réalisé. On appellera *probabilité de B sachant A* cette probabilité et on la notera : $P_A(B)$ ou $P(B|A)$.
Pour répondre à cette question, il suffit en fait de prendre A comme nouvel univers. La probabilité sur ce nouvel univers est notée P_A. On doit avoir : $P_A(A) = 1$; on choisit donc de définir, pour tout événement B, $P_A(B)$ par :

$$P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}.$$

DÉFINITION X.1.5 PROBABILITÉ CONDITIONNELLE

Soit A un événement de probabilité non nulle.

La probabilité sachant A, notée P_A, est la probabilité définie par : $P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$.

Exemples *Reprenons les exemples de la définition X.1.3 (événements indépendants) page 134.*

1. *On choisit un élève au hasard, sachant qu'il est littéraire, quelle est la probabilité pour qu'il soit sportif ?*

Solution

$$P_L(S) = \frac{P(S \cap L)}{P(L)} = \frac{2}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{2}{3}.$$

□

On remarque que : $P_L(S) = P(S)$.

2. *On choisit une élève au hasard, sachant qu'il est littéraire, quelle est la probabilité pour qu'elle soit volontaire pour jouer au football ?*

Solution

$$P_F(V) = \frac{P(V \cap F)}{P(F)} = \frac{2}{9} \times \frac{12}{5} = \frac{8}{15}.$$

□

On remarque que : $P_F(V) \neq P(V)$.

Remarque *Dans les exemples ci-dessus, les probabilités conditionnelles peuvent s'obtenir par lecture directs dans les tableaux X.1 et X.2 pages 134 et 135.*

THÉORÈME X.1.5

Soit A et B deux événements tels que : $P(A) \neq 0$.

(1) A et B sont indépendants si et seulement si : $P_A(B) = P(B)$.

(2) $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$.

Démonstration

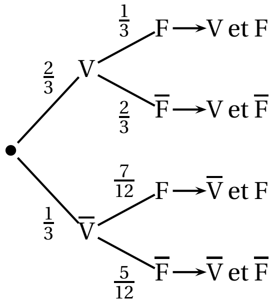
(1) $P_A(B) = P(B) \iff \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = P(B) \iff P(A) \times P(B) = P(B \cap A)$.

(2) C'est une conséquence de la définition X.1.5. □

X.1.3.b Arbres pondérés

Pour schématiser une situation et effectuer rapidement les calculs demandés, on représente souvent la situation étudiée par un *arbre pondéré*.
L'arbre ci-contre représente le situation du tableau X.2 page 135. D'après ce tableau :
$P(V) = \dfrac{2}{3}$; $P_{\overline{V}}(F) = \dfrac{7}{12}$; $P(\overline{V} \cap \overline{F}) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{5}{12} = \dfrac{5}{36}$.

Déterminer la probabilité des événements : $\overline{V} \cap \overline{F}$; $V \cap \overline{F}$; $V \cap F$ et $\overline{V} \cap F$.
Combien vaut la somme des probabilités des événements : $V \cap F$; $V \cap \overline{F}$; $\overline{V} \cap F$ et $\overline{V} \cap \overline{F}$.



Remarque *Un arbre pondéré est une représentation intuitive permettant une utilisation simplifiée du théorème X.1.5.*

X.1.3.c Théorème des probabilités totales

On se propose d'utiliser l'arbre pondéré ci-dessus pour déterminer $P(F)$.
$\{V, \overline{V}\}$ est une partition de l'univers Ω, donc $\{V \cap F, \overline{V} \cap F\}$ est une partition de F. En utilisant le théorème faible des probabilités totales (théorème X.1.3 page 133) on en déduit que :

$$P(F) = P(V \cap F) + P(\overline{V} \cap F)$$

or :

$$P(V \cap F) = P(V) \times P_V(F) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{8}{36} \qquad \text{et} \qquad P(\overline{V} \cap F) = P(\overline{V}) \times P_{\overline{V}}(F) = \frac{1}{3} \times \frac{7}{12} = \frac{7}{36}$$

donc :

$$P(F) = \frac{5}{12}.$$

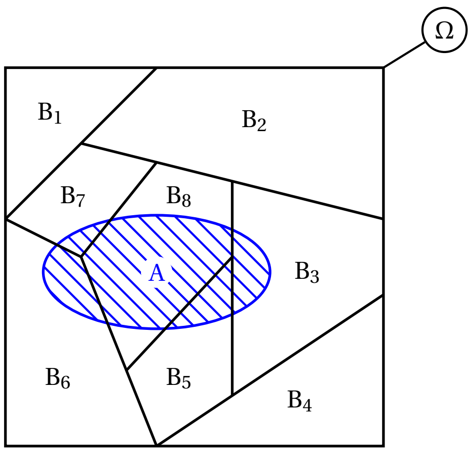
Plus généralement, si $\{B_1, \dots, B_n\}$ est une partition de l'univers Ω, alors pour tout événement A :
$\{B_1 \cap A, \dots, B_n \cap A\}$; est une partition de A et on a :

$$P(A) = P(B_1 \cap A) + \dots + P(B_n \cap A).$$

On en déduit le théorème suivant :

Théorème X.1.6 Théorème des probabilités totales
Si $\{B_1, \dots, B_n\}$ est une partition de l'univers Ω telle que pour tout $i : P(B_i) \neq 0$;
alors pour tout événement A :

$$P(A) = P(B_1) \times P_{B_1}(A) + \dots + P(B_n) \times P_{B_n}(A).$$



X.1.3.d Exercice résolu

Exercice X.1.6. ***Un sac contient 5 billes blanches et 8 billes noires, indiscernables au touché. On tire successivement et sans remise trois billes.***

1. Décrire l'univers.

2. Déterminer la probabilité de chaque événement élémentaire.

3. Déterminer la probabilité d'obtenir une bille blanche au troisième tirage.

4. Déterminer la probabilité d'obtenir une bille blanche au deuxième tirage.

5. Déterminer la probabilité d'obtenir une bille noire au deuxième tirage et une bille blanche au troisième tirage.

6. Déterminer la probabilité d'avoir obtenu au deuxième tirage une bille noire, sachant que la bille obtenue au troisième tirage était blanche.

Solution 1. *À chaque tirage on peut obtenir soit une bille blanche (B) soit une bille noire (N). L'univers est donc l'ensemble des 3-listes d'éléments* $\{B, N\}$ *où, par exemple,* (B, N, N) *représente l'éventualité : « tirer d'abord une bille blanche puis deux billes noires ».*

2. *Désignons par B_1 l'événement : « obtenir une bille blanche au 1^er^ tirage » et définissons de même B_2, B_3, N_1, N_2 et*

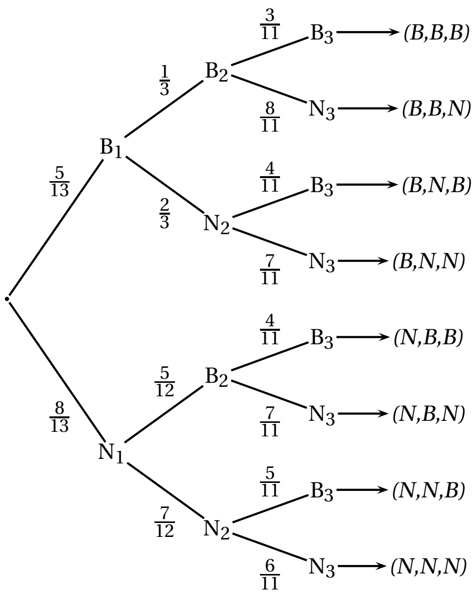
N_3. Les billes sont indiscernables au touché, on a donc équiprobabilité à chaque tirage ; ce qui signifie qu'à chaque tirage la probabilité d'obtenir une couleur est le quotient du nombre de billes de cette couleur par le nombre total de billes dans le sac.

8 billes noires ; donc : $P(B_1) = \frac{5}{13}$ *et* $P(N_1) = \frac{8}{13}$.

Si B_1 est réalisé il reste alors 4 billes blanches et 8 billes noires dans le sac ; d'où : $P_{B_1}(B_2) = \frac{1}{3}$ *et* $P_{B_1}(N_2) = \frac{2}{3}$.

En poursuivant ce raisonnement jusqu'à l'élimination de tous les cas possibles, on obtient l'arbre pondéré ci-contre dont on déduit par exemple que :

$P(B,N,N) = \frac{5}{13} \times \frac{2}{3} \times \frac{7}{11} = \frac{70}{429}$.



En procédant de même pour toutes les éventualités, on obtient l'arbre pondéré ci-contre d'où l'on tire le tableau ci-dessous.

Événement	(B,B,B)	(B,B,N)	(B,N,B)	(B,N,N)
Probabilité	$\frac{15}{429}$	$\frac{40}{429}$	$\frac{40}{429}$	$\frac{70}{429}$
Événement	(N,B,B)	(N,B,N)	(N,N,B)	(N,N,N)
Probabilité	$\frac{40}{429}$	$\frac{70}{429}$	$\frac{70}{429}$	$\frac{84}{429}$

***3.** On a :* $B_3 = \{(B,B,B),(B,N,B),(N,B,B),(N,N,B)\}$ *; donc :*

$$P(B_3) = \frac{15+40+40+70}{429} = \frac{5}{13}.$$

***4.** On a :* $B_2 = \{(B,B,B),(B,B,N),(N,B,B),(N,B,N)\}$ *; donc :*

$$P(B_2) = \frac{15+40+40+70}{429} = \frac{5}{13}.$$

***5.** On a :* $N_2 \cap B_3 = \{(B,N,B),(N,N,B)\}$ *; donc :*

$$P(N_2 \cap B_3) = \frac{40+70}{429} = \frac{10}{39};$$

6.

$$P_{B_3}(N_2) = \frac{P(N_2 \cap B_3)}{P(B_3)} = \frac{10}{39} \times \frac{13}{5} = \frac{2}{3};$$

□

X.2 Variable aléatoire

X.2.1 Introduction

On lance deux dés bien équilibrés (un vert et un rouge) et on s'intéresse à la somme, X, obtenue.

L'univers est l'ensemble des couples d'éléments de $\{1;2;3;4;5;6\}$ donc : $\text{card}(\Omega) = 36$; les dés étant bien équilibrés, chaque événement élémentaire a la même probabilité : $\frac{1}{36}$. L'ensemble des valeurs possible de X est : $\{2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12\}$. On désigne par : $X = 2$; l'événement : « la somme obtenue est 2 ». Afin de mieux connaître la « loi de probabilité de X », on dresse le tableau ci-contre. L'événement : $X = 8$; est réalisé 5 fois, donc : $P(X = 8) = \frac{5}{36}$.

r \ *v*	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

En procédant de même pour tout les valeurs possibles de X, on obtient le tableau ci-dessous.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = n)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

DÉFINITION X.2.1

On appelle *variable aléatoire* X sur un univers Ω toute application de Ω vers $\mathbb{R}$.

Notations et vocabulaire

1. X(Ω) *est appelé* univers image *de* Ω *par X.*
2. *(X = x_i) désigne l'événement « X prend la valeur x_i ».*
3. *(X ⩽ a) désigne l'événement « X prend une valeur inférieure ou égal à a ».*

Définition X.2.2
Soit P une probabilité définie sur un univers Ω.
La *loi de probabilité* d'une variable aléatoire X sur Ω est l'application qui à toute valeur x_i prise par X associe $P(X = x_i)$.

Il est d'usage de représenter une loi de probabilité par un tableau et il recommandé de vérifier que : $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

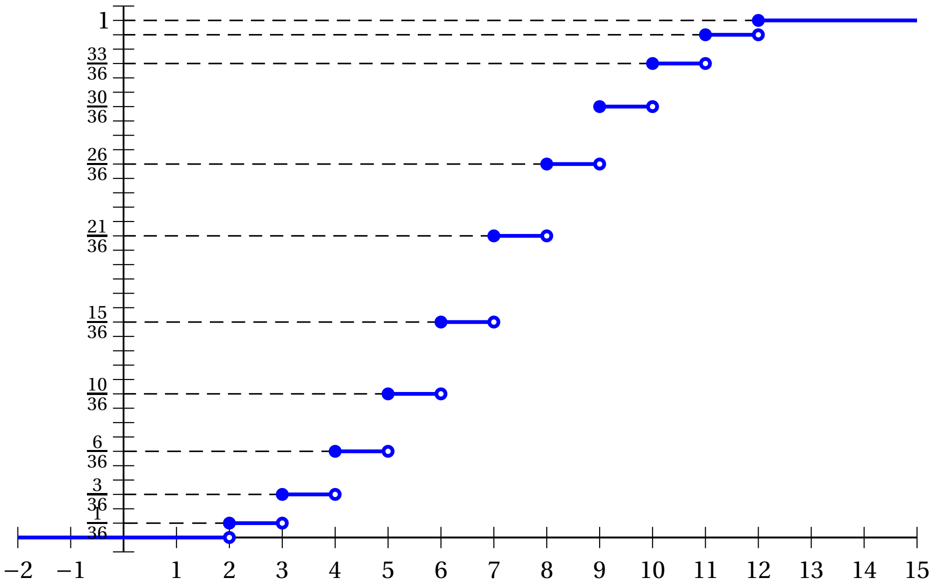
X.2.2 Fonction de répartition d'une variable aléatoire

Définition X.2.3
Soit une variable aléatoire X définie sur un univers Ω muni d'une probabilité P.
La fonction de répartition de X est l'application F de ℝ vers [0,1] définie par :

$$F(x) = P(X \leqslant x).$$

Exemple *Reprenons l'exemple introductif; F est définie par :*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{, si } x < 2\,; \\ \frac{1}{36} & \text{, si } 2 \leqslant x < 3\,; \\ \frac{3}{36} & \text{, si } 3 \leqslant x < 4\,; \\ \frac{6}{36} & \text{, si } 4 \leqslant x < 5\,; \\ \frac{10}{36} & \text{, si } 5 \leqslant x < 6\,; \\ \frac{15}{36} & \text{, si } 6 \leqslant x < 7\,; \\ \frac{21}{36} & \text{, si } 7 \leqslant x < 8\,; \\ \frac{26}{36} & \text{, si } 8 \leqslant x < 9\,; \\ \frac{30}{36} & \text{, si } 9 \leqslant x < 10\,; \\ \frac{33}{36} & \text{, si } 10 \leqslant x < 11\,; \\ \frac{35}{36} & \text{, si } 11 \leqslant x < 12\,; \\ 1 & \text{, si } 12 \leqslant x. \end{cases}$$



Remarques

1. *F est une fonction en escalier, définie et croissante sur ℝ.*
2. *La représentation graphique de F est l'équivalent, en probabilité, de la courbe des fréquences cumulées croissantes en statistique.*

X.2.3 Caractéristiques d'une variable aléatoire

X.2.3.a Espérance mathématique

Un casino propose le jeu suivant : le joueur mise 16 euros, lance un dé bien équilibré et la banque lui rembourse le carré du nombre obtenu. Ce jeu est-il avantageux pour le joueur ?
Désignons par X le gain, en euros, du joueur pour une partie. S'il obtient 6 on lui rembourse 36, il a donc gagné 20 euros.

L'univers est : $\Omega = \{1;2;3;4;5,\ 6\}$;
l'univers image est donc :
$X(\Omega) = \{-15;-12;-7;0;9;20\}$.
Le dé étant bien équilibré, on a équiprobabilité sur l'univers et donc, ici, sur l'univers image ; on en déduit la loi de probabilité de X.

x_i	-15	-12	-7	0	9	20
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Sur un 600 parties un joueur réalisera en moyenne 100 fois chaque événement élémentaire. Le gain moyen par partie sera donc :

$$\frac{1}{600}\big(100\times(-15)+100\times(-12)+100\times(-7)+100\times 0+100\times 9+100\times 20\big) = -\frac{5}{6}$$

On peut donc espérer perdre en moyenne $\frac{5}{6}$ € par partie.

On remarque que : $\frac{5}{6} = -15\times\frac{1}{6} - 12\times\frac{1}{6} - 7\times\frac{1}{6} + 0\times\frac{1}{6} + 9\times\frac{1}{6} + 20\times\frac{1}{6}$.

Plus généralement, on a la définition suivante.

Définition X.2.4

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, \dots, x_n$ avec les probabilités respectives $p_1, \dots, p_n$.
On appelle *espérance mathématique* de X le nombre réel, noté E(X), défini par :

$$E(X) = x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

Remarques

1. *L'espérance mathématique est l'équivalent, en probabilité, de la moyenne en statistique.*

2. *L'espérance est donc une caractéristique de position.*

3. *Pour une variable aléatoire constante $\omega \mapsto \lambda$, ($x_1 = \cdots = x_n = \lambda$) on a :* $E(\lambda) = \lambda$.

4. *Pour calculer l'espérance d'un variable aléatoire, il peut-être commode de reprendre la tableau de la loi de probabilité de la façon suivante.*

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	*Total*
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1
$x_i p_i$	$x_1 p_1$	x_2	$\cdots$	$x_n p_n$	*E(X)*

Exercice X.2.1. ***Calculer l'espérance de la variable aléatoire de l'exemple introductif (§ X.2.1 page 138).***

Solution

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	*Total*
$P(X = n)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1
$nP(X = n)$	$\frac{2}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{20}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{42}{36}$	$\frac{40}{36}$	$\frac{36}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{22}{36}$	$\frac{12}{36}$	$E(X) = 7$

L'espérance mathématique de X est donc : 7. □

X.2.3.b Variance, écart type

La variance et l'écart type sont des nombres réels positifs qui traduisent la façon dont sont dispersées les valeurs d'une variable aléatoire autour de son espérance ; plus la variance et l'écart type seront grands plus les valeurs seront dispersées. Ce sont des caractéristiques de dispersions. Dans une classe un devoir a été donné dans deux matières, on choisit un élève au hasard et on désigne par X sa note dans la première matière et par Y sa note dans la seconde matière. Les lois de probabilités des variables aléatoires X et Y sont données dans les tableaux ci-contre.

n	10
$P(X = n)$	1

n	0	20
$P(Y = n)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Dans les deux cas l'espérance est 10 et pourtant les résultats de la classe dans les deux matières sont, en un certain sens, opposés : dans la première tous les élèves ont 10 et dans la seconde les notes sont réparties aux extrêmes.

Définitions X.2.5

Soit X une variable aléatoire.

(1) On appelle *variance* de X le nombre réel, noté V(X), défini par : $V(X) = E\Big(\big(X - E(X)\big)^2\Big)$.

(2) On appelle *écart type* de X le nombre réel, noté $\sigma(X)$, défini par : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Remarques

1. *La variance est donc la moyenne des carrés des écarts à la moyenne.*

2. *La variance étant une moyenne de carrés, on a introduit sa racine carrée pour mieux rendre compte de la dispersion.*

3. *La définition de la variance n'est pas très pratique pour les calculs.*

X.2.3.c Propriétés de l'espérance et de la variance

Théorème X.2.1
Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers Ω et λ un réel.
(1) $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$;
(2) $E(X+\lambda) = E(X) + \lambda$;
(3) $E(\lambda X) = \lambda E(X)$;
(4) $E(X - E(X)) = 0$;
(5) $V(X+\lambda) = V(X)$;
(6) $V(\lambda X) = \lambda^2 V(X)$.

Démonstration Notons ω_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ les éventualités et p_i les probabilités des événements élémentaires associés.
(1) On a : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} X(\omega_i)p_i$ et $E(Y) = \sum_{i=1}^{n} Y(\omega_i)p_i$.
De même : $E(X+Y) \sum_{i=1}^{n} (X+Y)(\omega_i)p_i = \sum_{i=1}^{n} \left(X(\omega_i)p_i + Y(\omega_i)p_i\right) = \sum_{i=1}^{n} X(\omega_i)p_i + \sum_{i=1}^{n} Y(\omega_i)p_i = E(X) + E(Y)$.
(2) On déduit **(2)** de **(1)** en prenant pour Y la variable aléatoire constante $\omega \longmapsto \lambda$.
(3) $E(\lambda X) = \sum_{i=1}^{n} \lambda X(\omega_i)p_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} X(\omega_i)p_i = \lambda E(X)$.
(4) D'après **(2)** (avec $\lambda = -E(X)$) : $E(X - E(X)) = E(X) - E(X) = 0$.
(5) $V(X+\lambda) = E\left(\left(X+\lambda - E(X+\lambda)\right)^2\right) = E\left(\left(X+\lambda - E(X) - \lambda\right)^2\right) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) = V(X)$.
(6) $V(\lambda X) = E\left(\left(\lambda X - E(\lambda X)\right)^2\right) = E\left(\left(\lambda X - \lambda E(X)\right)^2\right) = E\left(\lambda^2\left(X - E(X)\right)^2\right) = \lambda^2 E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) = \lambda^2 V(X)$. □

Remarques
1. *En pratique toutes ces propriétés sont naturelles, afin de les illustrer prenons pour univers une classe où un devoir a été donné ; la moyenne de la classe est* 5 *et la variance* 3*. On considère l'expérience aléatoire suivante : on choisit au hasard un élève et désigne par X sa note. X est une variable aléatoire et on a :* $E(X) = 5$ *et* $V(X) = 3$.
Si on décide d'ajouter 1 *point à chaque élève, alors la moyenne augmentera de* 1 *point :*
$E(X+1) = E(X) + 1 = 6$.
En revanche le fait d'ajouter 1 point à chaque élève ne changera pas la façon dont les notes sont réparties autour de la moyenne, c'est-à-dire : $V(X+1) = V(X)$.
Si on décide de multiplier par 2 *la note de chaque élève, alors la moyenne sera multipliée par* 2 *elle aussi :* $E(2X) = 2E(X) = 10$.
De plus en multipliant par 2 *les notes, on multiplie également par* 2 *les écarts à la moyenne et donc par 4 leur carré ; par conséquent :* $V(2X) = 4V(X)$.
2. *Pour donner un sens intuitif à la propriété **(1)** gardons l'exemple de la classe. Un devoir constitué d'un exercice sur* 7 *points et d'un problème sur* 13 *points à été donné. Cette fois-ci X désigne la note obtenue à l'exercice et Y la note obtenue au problème. La note obtenue au devoir est alors* $X+Y$*. La moyenne de la classe au devoir est la somme des moyennes de l'exercice et du problème :* $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$.
3. *On déduit des deux dernières propriétés que :* $\sigma(X+\lambda) = \sigma(X)$ *et* $\sigma(\lambda X) = |\lambda|\sigma(X)$.
4. *On déduit des propriétés **(1)** et **(3)** que pour tous réels* α, β *; on a :* $E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y)$.
On dit que l'espérance est linéaire.

D'après le théorème X.2.1 l'espérance de la somme de deux variables aléatoires est la somme des espérances. Il est donc naturelle de se demander s'il n'en est pas de même pour le produit. Prenons un exemple.
On dispose de deux rectangles, les dimensions de l'un sont 2 par 3 et celles de l'autre sont 4 par 5.
On choisit un rectangle au hasard et on désigne par ℓ sa largeur et L son longueur. L'aire est donc la variable aléatoire $L\ell$.
La moyenne des largeurs est : $E(\ell) = 3$.
La moyenne des longueurs est : $E(L) = 4$.
Les aires sont 6 et 20 donc : $E(L\ell) = 13$.
On constate, ici, que : $E(L\ell) \neq E(L) \times E(\ell)$.
Nous avons précédemment remarqué que la définition de la variance ne conduisait pas à un calcul aisé. le théorème suivant remédie à cette carence.

Théorème X.2.2 Formule de König [2]
Soit X une variable aléatoire. On a : $V(X) = E\left(X^2\right) - E^2(X)$.

2. König, Johann Samuel (1712–1757)

Démonstration Par définition :

$$V(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) = E\big(X^2 - \underbrace{2E(X)}_{\alpha} X + \underbrace{E^2(X)}_{\beta}\big).$$

Donc par linéarité et d'après le propriété **(2)** du théorème X.2.1 :

$$V(X) = E\left(X^2\right) - 2E(X)E(X) + E^2(X);$$

d'où l'on tire : $V(X) = E\left(X^2\right) - E^2(X)$. □

Exercice X.2.2. ***Calculer la variance et l'écart type de la variable aléatoire de l'exemple introductif (§ X.2.1 page 138).***

Solution

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	*Total*
$P(X=n)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1
$nP(X=n)$	$\frac{1}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{6}{18}$	$\frac{10}{18}$	$\frac{15}{18}$	$\frac{21}{18}$	$\frac{20}{18}$	$\frac{18}{18}$	$\frac{15}{18}$	$\frac{11}{18}$	$\frac{6}{18}$	$E(X)=7$
$n^2P(X=n)$	$\frac{2}{18}$	$\frac{9}{18}$	$\frac{24}{18}$	$\frac{50}{18}$	$\frac{90}{18}$	$\frac{147}{18}$	$\frac{160}{18}$	$\frac{162}{18}$	$\frac{150}{18}$	$\frac{121}{18}$	$\frac{72}{18}$	$E(X^2)=\frac{329}{6}$

La variance de X est donc : $V(X) = E\left(X^2\right) - E^2(X) = \frac{329}{6} - 49 = \frac{35}{6}$.

On en déduit l'écart type : $\sigma(X) = \sqrt{\frac{35}{6}}$. □

X.2.4 Variables aléatoires indépendantes

X.2.4.a Loi produit

DÉFINITION X.2.6

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers Ω et $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$, $Y(\Omega) = \{y_1, \cdots, y_q\}$ leurs univers images respectifs.
La *loi couple* (X,Y) est l'application de $X \times Y$ vers $[0;1]$ qui à tout couple (x_i, y_j) associe la probabilité de l'événement $(X = x_i)$ et $(Y = y_j)$.

Exercice X.2.3. ***On lance un dé bien équilibré et on considère les variables aléatoires X et Y définies par :***

$$X(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{, si } \omega \text{ est pair;} \\ 1 & \text{, si } \omega \text{ est impair.} \end{cases} \qquad Y(\omega) = \begin{cases} 5 & \text{, si } \omega \text{ est un nombre premier;} \\ 10 & \text{, si } \omega \text{ n'est pas premier.} \end{cases}$$

Déterminer la loi couple (X, Y).

Solution *Les images de l'univers* Ω *par X, Y et (X, Y) sont données dans le tableau X.3. On sait de plus que le dé est bien équilibré, on a donc équiprobabilité sur* Ω*. La loi couple (X, Y) est donc déterminée par le tableau X.4. Pour construire ce dernier, on utilise le tableau X.3 :* $(X = 1 \text{ et } Y = 5) = \{3;5\}$ *; donc :* $P(1;5) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

ω	1	2	3	4	5	6
$X(\omega)$	1	0	1	0	1	0
$Y(\omega)$	10	5	5	10	5	10
$(X,Y)(\omega)$	(1;10)	(0;5)	(1;5)	(0;10)	(1;5)	(0;10)

TABLE *X.3 – Images de* Ω *par X, Y et (X, Y).*

X \ Y	5	10
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

TABLE *X.4 – Loi couple de (X, Y).*

□

Remarques

1. *La loi couple est aussi appelée* loi de probabilité conjointe *ou* loi de probabilité simultanée *ou encore* loi de probabilité produit*; les probabilités contenues dans le tableau X.4 sont alors appelées* probabilités conjointes *ou* probabilités simultanées.

2. *Dans le tableau X.4 si on ajoute une ligne et une colonne « Total », on obtient le tableau X.5 où les lois de probabilités des variables aléatoires X et Y apparaissent dans les marges. Ces lois sont alors appelées* lois marginales

X \ Y	5	10	Total
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$P(X=0)=\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$P(X=0)=\frac{1}{2}$
Total	$P(Y=5)=\frac{1}{2}$	$P(Y=10)=\frac{1}{2}$	1

TABLE X.5 – Lois marginales.

X.2.4.b Variables aléatoires indépendantes

Exemples

1. *Reprenons l'exemple du § X.2.4.a. D'après le tableau X.5 on constate que les événements* $(X=0)$ *et* $(Y=5)$ *sont dépendants; en effet :* $P(X=0 \text{ et } Y=5)=\frac{1}{6}$ *et* $P(X=0)\times P(Y=5)=\frac{1}{4}$.
On dit alors que les variables X et Y sont dépendantes.

2. *On lance un dé bien équilibré et on considère les variables aléatoires X et Y définies par :*

$$X(\omega)=\begin{cases}0 & \text{, si } \omega \text{ est pair;}\\ 1 & \text{, si } \omega \text{ est impair.}\end{cases}$$

ω	1	2	3	4	5	6
X(ω)	1	0	1	0	1	0
Y(ω)	5	5	10	10	10	10
(X, Y)(ω)	(1;5)	(0;5)	(1;10)	(0;10)	(1;10)	(0;10)

TABLE *X.6 – Images de Ω par X, Y et (X, Y)*

$$Y(\omega)=\begin{cases}5 & \text{, si } \omega \leqslant 2;\\ 10 & \text{, si } 2<\omega.\end{cases}$$

X \ *Y*	5	10	*Total*
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$P(X=0)=\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$P(X=1)=\frac{1}{2}$
Total	$P(Y=5)=\frac{1}{3}$	$P(Y=10)=\frac{2}{3}$	1

TABLE *X.7 – Loi couple de (X, Y).*

Les images de l'univers Ω par X, Y et (X, Y) sont données dans le tableau X.6. On sait de plus que le dé est bien équilibré, on a donc équiprobabilité sur Ω. La loi conjointe et les lois marginales sont déterminée par le tableau X.7.
On constate que chaque probabilités conjointe est le produit des probabilités marginales associées; par exemple : $P(X=0 \text{ et } Y=10)=\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=P(X=0)\times P(Y=10)$.
On dit que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

DÉFINITION X.2.7

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers Ω et $X(\Omega)=\{x_1,\cdots,x_n\}$, $Y(\Omega)=\{y_1,\cdots,y_q\}$ leurs univers images respectifs.
Les variables aléatoires X et Y sont dites indépendantes lorsque pour tout $x\in X(\Omega)$ et tout $y\in Y(\Omega)$, les événements $(X=x)$ et $(Y=y)$ sont indépendants.

Remarques

1. *La condition d'indépendance peut s'écrire également, pour tout* $x\in X(\Omega)$ *et tout* $y\in Y(\Omega)$ *:*

$$P\left(X=x \text{ et } Y=y\right)=P(X=x)\times P\left(Y=y\right)$$

ou encore, pour tout $\omega\in\Omega$ *:*

$$P(X=X(\omega) \text{ et } Y=Y(\omega))=P(X=X(\omega))\times P(Y=Y(\omega))$$

2. *Deux variables aléatoires sont indépendantes si et seulement si le tableau de leur loi conjointe est un tableau de proportionnalité.*

THÉORÈME X.2.3

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même univers Ω et $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$, $Y(\Omega) = \{y_1, \cdots, y_q\}$ leurs univers images respectifs.

(1) $E(XY) = E(X) \times E(Y)$.

(2) $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.

Démonstration Le formalisme utilisé dans cette démonstration n'est pas au programme de terminale, c'est démonstration peut donc être omise en première lecture et est de toute façon réservée à des lecteurs motivés.

(1)
$$\begin{aligned}
E(X) \times E(Y) &= \left(\sum_{x \in X(\Omega)} x\,P(X=x)\right) \times E(Y)\\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} \left(x\,P(X=x) \times E(Y)\right)\\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} \left[x\,P(X=x) \times \sum_{y \in Y(\Omega)} y\,P(Y=y)\right]\\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} \left[\sum_{y \in Y(\Omega)} \left(x\,P(X=x) \times y\,P(Y=y)\right)\right]\\
&= \sum_{\substack{x \in X(\Omega)\\ y \in Y(\Omega)}} \left[xy\,P(X=x \text{ et } Y=y)\right]\\
&= E(XY)
\end{aligned}$$

(2) **(2)** se déduit de **(1)** en utilisant la linéarité de l'espérance et la formule de König.

$$\begin{aligned}
V(X+Y) &= E\left((X+Y)^2\right) - \left(E(X+Y)\right)^2 && \text{(formule de König)}\\
&= E\left(X^2+Y^2+2XY\right) - \left(E(X)+E(Y)\right)^2\\
&= E\left(X^2+Y^2+2XY\right) - \left(E^2(X)+E^2(Y)+2E(X)E(Y)\right)^2\\
&= E(X^2)+E(Y^2)+2E(XY) - E^2(X) - E^2(Y) - 2E(X)E(Y) && \text{(linéarité de l'espérance)}\\
&= E(X^2) - E^2(X) + E(Y^2) - E^2(Y) && \text{(d'après 1)}\\
&= V(X)+V(Y) && \text{(formule de König)}
\end{aligned}$$
□

X.3 Lois de probabilités discrètes

X.3.1 Loi binomiale

X.3.1.a Schéma de Bernoulli

DÉFINITION X.3.1

On appelle *épreuve de Bernoulli* une épreuve à deux issues possibles.

Exemple *On lance un dé bien équilibré et on cherche à faire un* 1*. Désignont par S l'événement : « obtenir* 1 *» ; et par* $\overline{S}$ *l'événement contraire. On a ici :* $P(S) = \dfrac{1}{6}$ *et* $P\left(\overline{S}\right) = \dfrac{5}{6}$.

Remarque *Il est d'usage d'appeler succès l'issue recherchée et de la noter S.*

DÉFINITION X.3.2

On appelle *expérience* ou *schéma de Bernoulli* la répétition n fois, de façon indépendante, d'une épreuve de Bernoulli.

X.3.1.b Loi binomiale

DÉFINITION X.3.3

On appelle *loi binomiale* de paramètres n et p la loi de probabilité de la variable aléatoire désignant le nombre de succès dans un schéma de Bernoulli où l'épreuve de Bernoulli a été répétée n fois et où la p désigne la probabilité de succès à une épreuve.

Notations et vocabulaire *Cette loi de probabilité est notée :* $\mathscr{B}(n,p)$.

Exemple *Reprenons le jeu de dés où il faut faire un as. On lance quatre fois le dé et on et on désigne par X le nombre de succès. la loi de probabilité de X est la loi binomiale de paramètres* 4 *et* $\dfrac{1}{6}$*. Déterminons la probabilité de l'événement* $(X=2)$*.*
On a : $(X=2) = \left\{(S,S,\bar{S},\bar{S}),(S,\bar{S},\bar{S},S),(S,\bar{S},S,\bar{S}),(\bar{S},S,S,\bar{S}),(\bar{S},S,\bar{S},S),(\bar{S},\bar{S},S,S)\right\}$.
Considérons les événements S_1, $\bar{S}_1$, …, S_4, $\bar{S}_4$ *où, par exemple,* S_3 *désigne l'événement : « obtenir un succès au troisième lancé ». On a alors :* $\left\{(S,S,\bar{S},\bar{S})\right\} = S_1 \cap S_2 \cap \bar{S}_3 \cap \bar{S}_4$*. Les résultats des différents lancés sont indépendants donc :*

$$\begin{aligned}
P\left(S,S,\bar{S},\bar{S}\right) &= P\left(S_1 \cap S_2 \cap \bar{S}_3 \cap \bar{S}_4\right)\\
&= P(S_1) \times P(S_2) \times P\left(\bar{S}_3\right) \times P\left(\bar{S}_4\right)\\
&= \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^2\\
&= \frac{25}{6^4}
\end{aligned}$$

On démontre de même que les quatre événements élémentaires qui constituent l'événement $(X = 2)$ *ont tous pour probabilité* $\frac{25}{6^4}$ *; on déduit que :* $P(X = 2) = 4 \times \frac{25}{6^4} = \frac{25}{324}$.

plus généralement, dans la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$, la probabilité d'échec à une épreuve est : $q = 1 - p$. Considérons l'événement $(X = k)$ où $0 \leqslant k \leqslant n$. pour réaliser un tel événement, il faut obtenir k succès et $n-k$ échecs. On peut donc choisir les k épreuves parmi n où on aura un succès et pour les $n-k$ épreuves restantes on aura un échec. Il y a donc $\binom{n}{k}$ éventualités qui réalisent l'événement. De plus chaque événement élémentaire inclus dans l'événement $(X = k)$ a pour probabilité : $p^k q^{n-k}$; on en déduit que : $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

Théorème X.3.1

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est la loi binomiale de paramètres n et p.

(1) Pour tout entier k tel que : $0 \leqslant k \leqslant n$; on a :$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

(2) $E(X) = np$.

(3) $V(X) = npq$.

Démonstration **(1)** La propriété **(1)** a été démontrée dans l'étude ci-dessus.

(2) Calculons E(X). Par définition :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}.$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} && \text{, car pour } k = 0 \text{ le terme est nul}\\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k q^{n-k}\\
&= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\left(n-1-(k-1)\right)!} p^{k-1} q^{n-1-(k-1)} && \text{, posons : } i = k-1\\
&= np \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{i!\left((n-1)-i\right)!} p^i q^{(n-1)-i}\\
&= np(p+q)^{n-1} && \text{, d'après la formule du binôme de Newton}\\
&= np
\end{aligned}$$

(3) Calculons V(X). On a :

$$\begin{aligned}
V(X) &= E(X^2) - E^2(X) && \text{, par le formule de König}\\
&= E(X^2 - X) + E(X) - E^2(X) && \text{, par linéarité de l'espérance}\\
&= E\left(X(X-1)\right) + np - n^2p^2 && \text{, d'après } \mathbf{(2)}
\end{aligned}$$

On a de plus :

$$\begin{aligned}
E\left(X(X-1)\right) &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} && \text{, par définition de } \mathscr{B}(n,p)\\
&= \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} && \text{, car les deux premiers termes de la somme sont nuls.}\\
&= \sum_{k=2}^{n} \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!} p^k q^{n-k}\\
&= n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)!\left((n-2)-(k-2)\right)!} p^{k-2} q^{(n-2)-(k-2)} && \text{,posons : } i = k-2\\
&= (n^2-n)p^2 \sum_{i=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{i!\left((n-2)-i\right)!} p^i q^{(n-2)-i}\\
&= (n^2-n)p^2(p+q)^{n-2} && \text{, d'après la formule du binôme de Newton}\\
&= n^2p^2 - np^2
\end{aligned}$$

On en déduit que : $V(X) = n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 = np(1-p) = npq$. □

Remarque *En utilisant la formule du binôme de Newton, on vérifie que la somme des probabilités de la loi binomiale est 1.*

X.3.2 Loi de Poisson[3] (complément)

La loi de Poisson n'est pas au programme ; cette étude est donc réservée à des lecteurs motivés et permet de donner plus de sens à la loi exponentielle.

X.3.2.a Calculs préliminaires

Exercice X.3.1. ***Soit λ un réel.***

1. On se propose de démontrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\lambda^n}{n!}=0$.

a. Soit $n_0\in\mathbb{N}$ tel que : $n_0>|\lambda|$, vérifier que pour tout entier $n>n_0$:

$$\left|\frac{\lambda^n}{n!}\right|\leqslant\left|\frac{\lambda^{n_0}}{n_0!}\right|\left(\frac{|\lambda|}{n_0}\right)^n\left(\frac{|\lambda|}{n_0}\right)^{-n_0}.$$

(On pourra remarquer que : $\displaystyle\frac{\lambda^n}{n!}=\frac{\lambda^{n_0}}{n_0!}\times\frac{\lambda}{n_0+1}\times\frac{\lambda}{n_0+2}\times\cdots\times\frac{\lambda}{n}$***)***

b. Conclure.

2. Désormais λ est strictement positif. Pour tout entier $n\geqslant1$, on considère l'intégrale :

$$\mathrm{I}_n=\frac{1}{n!}\int_0^\lambda(\lambda-t)^n\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

a. Calculer I_1.
(On pourra utiliser une intégration par parties.)

b. Démontrer que pour tout $t\in[0;\lambda]$, on a :

$$\left|(\lambda-t)^n\,\mathrm{e}^t\right|\leqslant(\lambda-t)^n\,\mathrm{e}^\lambda.$$

c. En déduire que :

$$|\mathrm{I}_n|\leqslant\mathrm{e}^\lambda\frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!}.$$

d. Déterminer la limite de la suite (I_n).

3. Démontrer que pour tout entier $n\geqslant1$:

$$\mathrm{I}_n=\mathrm{I}_{n+1}+\frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!}$$

4. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_n=1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2!}+\frac{\lambda^3}{3!}+\cdots+\frac{\lambda^n}{n!}.$$

a. Démontrer que la suite $(u_n+\mathrm{I}_n)$ est constante.

b. Démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k}{k!}\right)=\mathrm{e}^\lambda. \tag{X.1}$$

X.3.2.b Introduction

1re situation

Dans un petit port de pêche, il y a vingt pêcheurs ; chaque pêcheur a un bateau. Une étude statistique a montré que chaque soir entre 17 heure et 20 heure il rentre au port, en moyenne, trois bateaux à l'heure.
Quelle est la probabilité pour qu'entre 18 h 30 et 19 h 30 il rentre quatre bateaux au port ?

Pour modéliser la situation, on utilise un schéma de Bernoulli. On suppose que les heures de retour au port des différents bateaux sont indépendantes. On désigne par p la probabilité pour qu'un bateau donné rentre au port entre 18 h 30 et 19 h 30. On désigne par X le nombre de bateaux qui rentrent port entre 18 h 30 et 19 h 30. La loi de probabilité de X est donc la loi binomiale de paramètres 20 et p. L'espérance de X est alors $20p$ mais on sait que cette espérance est trois. Par conséquent : $p=\dfrac{3}{20}$.

On en déduit que : $\mathrm{P}(\mathrm{X}=4)=\dbinom{20}{4}p^4(1-p)^{16}=0,182\cdots$.

2e situation

Dans un complexe portuaire, une étude statistique a montré que chaque matin entre 8 heure et 12 heure il entre, en moyenne, λ bateaux à l'heure.
Quelle est la probabilité pour qu'entre 9 h 30 et 10 h 30 il entre k bateaux dans le complexe ?

3. Poisson, Siméon-Denis (1781–1840)

Pour modéliser la situation, on utilise un schéma de Bernoulli. On désigne par n le nombre de bateaux à travers le monde qui pourraient un jour entré dans le complexe portuaire ; par p la probabilité pour que l'un donné d'entre eux entre dans le complexe entre 9 h 30 et 10 h 30 et par X le nombre de bateaux qui entrent dans le complexe entre 9 h 30 et 10 h 30. On suppose que les heures d'entrée des n bateaux qui pourraient, un jour, entrer dans le port sont indépendantes. La loi de probabilité de X est donc la loi binomiale de paramètres n et p ; c'est-à-dire : $\mathrm{P}_n(\mathrm{X}=k) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$. L'espérance de X est alors np mais on sait que cette espérance est λ. Par conséquent : $p = \frac{\lambda}{n}$.
On en déduit que : $\mathrm{P}_n(\mathrm{X}=k) = \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$.

Malheureusement, en pratique, on ne connaît pas n. On sait seulement qu'il est grand et que k est petit devant lui ; c'est la raison pour laquelle on décide de définir la nouvelle loi de probabilité, si cela a un sens : $\mathrm{P}(\mathrm{X}=k) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P}_n(\mathrm{X}=k)$.

On a donc :
$$\begin{aligned}\mathrm{P}_n(\mathrm{X}=k) &= \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\\ &= \frac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-k+1)}^{k \text{ facteurs}}}{k!}\cdot\frac{\lambda^k}{n^k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}\\ &= \frac{\lambda^k}{k!}\times\frac{n}{n-1}\times\cdots\times\frac{n}{n+k-1}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}\end{aligned}$$

Pour tous entiers n et j tels que : $0 \leqslant j < n$, on a : $\frac{n}{n-j} = \frac{1}{1-\frac{j}{n}}$; donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{n-j} = 1$.
Par produit de $k-1$ facteurs, on en déduit que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{n-1}\times\cdots\times\frac{n}{n+k-1} = 1$.
Par construction de la fonction exp, on sait que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{-\lambda}$;
de plus : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right) = 1$ et $\lim\limits_{u\to1} u^{-k} = 1$; donc par composition : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = 1$.
Donc par produit des limites :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

On doit maintenant vérifier que la somme des probabilités est égale à 1.
On a : $\sum\limits_{k=0}^{n}\mathrm{P}(\mathrm{X}=k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k}{k!}$.
Or, d'après (X.1) : $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k}{k!} = \mathrm{e}^{\lambda}$; donc par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\mathrm{P}(\mathrm{X}=k) = 1$.

DÉFINITION X.3.4
On dit qu'une loi de probabilité a pour loi de probabilité la *loi de Poisson* lorsque son univers image est $\mathbb{N}$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :
$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Exemples

1. *Dans l'exemple du complexe portuaire, s'il arrive* 53,8 *bateaux à l'heure, la probabilité pour qu'il arrive* 65 *bateaux entre 9 h 30 et 10 h 30 est :* $\mathrm{P}(\mathrm{X}=65) = \mathrm{e}^{-53,8}\frac{53,8^{65}}{65!} = 0,16\cdots$

Remarque *La loi de poisson est généralement utilisée pour modéliser le comptage d'événements rares dans le temps, comme par exemple : le nombre de particules émises par une substance radioactive ou le nombre d'erreurs enregistrées par un central téléphonique ; ou dans l'espace, comme par exemple : le nombre de bactéries dans une préparation microscopique.*

X.3.2.c Espérance et Variance

D'après la construction utilisée il semblerait cohérent que, dans la loi de Poisson, l'espérance soit λ.

Théorème X.3.2
Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est la loi de Poisson de paramètre λ.
(1) $E(X) = \lambda$.
(2) $V(X) = \lambda$.

Démonstration

(1) Par définition l'espérance de X est la limite de : $\sum_{k=0}^{n} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

On a : $\sum_{k=0}^{n} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{n} k \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\lambda^j}{j!}$.

On sait que : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\lambda^j}{j!} = e^{\lambda}$; donc : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda$. Donc : $E(X) = \lambda$.

(2) Par définition la variance de X est la limite de : $\sum_{k=0}^{n} (k-\lambda)^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

De plus : $\sum_{k=0}^{n} (k-\lambda)^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{n} k^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}\right) - 2\lambda \left(\sum_{k=0}^{n} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}\right) + \lambda^2 e^{-\lambda} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!}\right)$.

D'après les calculs précédents, on a par produit et par somme : $\lim_{n\to+\infty} \left[-2\lambda \left(\sum_{k=0}^{n} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}\right) + \lambda^2 e^{-\lambda} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!}\right)\right] = -2\lambda^2 + \lambda^2 = -\lambda^2$.

On a :
$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} &= \sum_{k=0}^{n} (k^2-k) e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=0}^{n} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=0}^{n} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda} \lambda^2 \sum_{k=2}^{n} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \sum_{k=0}^{n} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda} \lambda^2 \sum_{j=0}^{n-2} \frac{\lambda^j}{j!} + \sum_{k=0}^{n} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}
\end{aligned}$$

On sait que : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\lambda^j}{j!} = e^{\lambda}$ et $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda$; donc : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} k^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda^2 + \lambda$. Donc : $V(X) = \lambda$.□

X.4 Lois de probabilités continues

X.4.1 Intégrales généralisées

X.4.1.a Activité

Exercice X.4.1. ***On considère la fonction,*** $f : x \longmapsto \frac{2}{x^2-1}$***, définie sur*** $]1;+\infty[$ ***et la fonction*** $F : x \longmapsto \int_2^x f(t)\,dt$.

1. Quel est l'ensemble de définition de F ? Que représente F pour f ?

2. Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $x > 1$: $f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$.

3. Calculer $F(x)$ ***en fonction de x.***

4. Étudier la limite de F en $+\infty$.

X.4.1.b Définition

Habituellement, lorsqu'on calcul, $\int_a^b f(t)\,dt$, a et b sont des nombres réels et f est une fonction continue sur $[a;b]$. On se propose d'étendre, par passage à la limite, la définition de l'intégrale au cas (lorsque cela est possible) où l'une au moins des bornes est infinie ou la limite en l'une au moins des bornes est infinie. De telles intégrales sont dites impropres.

Définition X.4.1
Soit f une fonction dont l'ensemble de définition contient un intervalle $[a;+\infty[$ (avec $a \in \mathbb{R}$). Si f est continue sur $[a;+\infty[$ (sauf peut-être en nombre finis de réels où elle admet une limite à droite et une limite à gauche) et si la fonction : $x \mapsto \int_a^x f(x)\,dx$; admet une limite finie, ℓ, en $+\infty$; alors on écrit : $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \ell$.

Remarques

1. *Lorsque l'intégrale a une limite finie, elle est dite convergente.*

2. *Lorsque l'intégrale n'a pas de limite ou que sa limite est infinie, elle est dite divergente.*

3. *On définit de même, lorsqu'elle existe,* $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice X.4.2. **Démontrer que** $\int_{-\infty}^{+\infty} |t|\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ **est définie et calculer sa valeur.**

Solution *La fonction* $f : x \longmapsto |t|\,\mathrm{e}^{-t^2}$ *est continue sur* $\mathbb{R}$ *(elle est donc intégrable sur tout intervalle fermé de* $\mathbb{R}$*), paire et positive sur* $\mathbb{R}$*. Considérons la fonction F définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$\mathrm{F}(x) = \int_0^x |t|\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

La fonction f est paire, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ *:*

$$\mathrm{F}(-x) = \int_0^{-x} |t|\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_x^0 |t|\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = -\int_0^x |t|\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = -\mathrm{F}(x).$$

La Fonction F est impaire.
Pour $x > 0$*, les éléments de* $[0;x]$ *sont positif, et on a alors :*

$$\mathrm{F}(x) = \int_0^x |t|\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x t\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int_0^x -2t\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{-t^2}\right]_0^x = \frac{1-\mathrm{e}^{-x^2}}{2}$$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} = \mathrm{e}^{-x^2} = 0$ *; donc :* $\lim\limits_{x\to+\infty} = \mathrm{F}(x) = \frac{1}{2}$.

$$\int_0^{+\infty} |t|\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$

La fonction F est impaire, donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} = \mathrm{F}(x) = -\frac{1}{2}$ *; c'est-à-dire :* $\int_0^{-\infty} |t|\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}$ *; d'où il vient :*

$$\int_{-\infty}^{0} |t|\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$

Par somme :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |t|\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = 1.$$

□

X.4.2 Généralités sur lois de probabilités continues

X.4.2.a Densité de probabilité

DÉFINITION X.4.2
Une *densité de probabilité* sur un intervalle I est une fonction f continue sur I (sauf peut-être en nombre fini d'éléments où elle admet une limite à droite et une limite à gauche), positive sur I et telle que : $\int_{\mathrm{I}} f(t)\mathrm{d}t = 1$.

Exemples

1. *D'après l'étude menée en activité à l'exercice X.4.1., la fonction* $f : x \longmapsto \dfrac{2}{(\ln 3)(x^2-1)}$ *est continue et positive sur* $[2;+\infty[$*, de plus :* $\int_2^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \dfrac{1}{\ln 3}\int_2^{+\infty} \dfrac{2\mathrm{d}t}{t^2-1} = 1$ *; donc f est une densité de probabilité sur* $[2;+\infty[$.

2. *D'après l'étude menée à l'exercice X.4.2., la fonction* $g : x \longmapsto |t|\,\mathrm{e}^{-t^2}$ *est continue et positive sur* $\mathbb{R}$*, de plus :* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1$ *; donc g est une densité de probabilité sur* $\mathbb{R}$.

X.4.2.b Loi de probabilité continue

DÉFINITION X.4.3
Soit f une densité de probabilité sur un intervalle I. La loi de probabilité associée à f est la loi définie pour tout intervalle, J, inclus dans I par : $\mathrm{P}(\mathrm{X} \in \mathrm{J}) = \int_{\mathrm{J}} f(t)\mathrm{d}t$.

Remarque *Si X est une variable aléatoire dont la loi de probabilité est la loi associée à la densité de probabilité f alors l'univers image de X est I.*

Exemple *Considérons la densité de probabilité sur $\mathbb{R}$, $g : t \longmapsto |t|\mathrm{e}^{-t^2}$. Si une variable aléatoire X a pour loi de probabilité la loi associée à g, alors :*

$$\mathrm{P}(1 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 2) = \int_1^2 |t|\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-4}}{2}$$

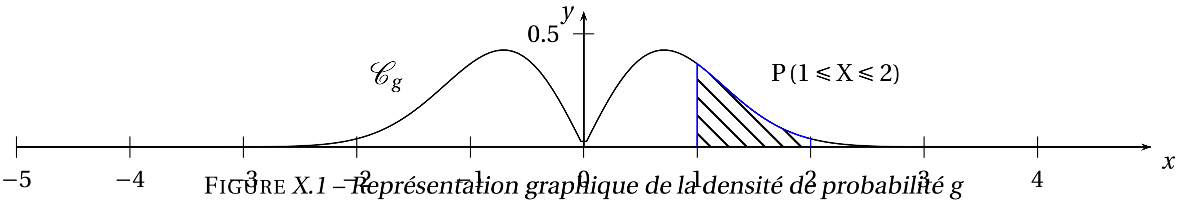


FIGURE *X.1 – Représentation graphique de la densité de probabilité g*

Exercice X.4.3. ***Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est la loi associée à la densité de probabilité $f : x \longmapsto \dfrac{2}{(\ln 3)(x^2-1)}$ sur $[2+\infty[$.***
Calculer la probabilité de l'événement $3 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 4$.

Solution *On a :* $\mathrm{P}(3 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 4) = \displaystyle\int_3^4 \frac{2\,\mathrm{d}t}{(\ln 3)(t^2-1)} = \frac{1}{\ln 3}\left[\ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right)\right]_3^4 = \frac{\ln\frac{3}{5} - \ln\frac{2}{4}}{\ln 3} = 1 + \frac{\ln\frac{2}{5}}{\ln 3}$ □

X.4.2.c Espérance et variance d'une loi de probabilité continue

L'étude menée dans ce paragraphe n'est pas au programme mais peut aider de bons élèves à mieux comprendre les théorèmes…
Dans le cas d'une variable aléatoire discrète dont la loi de probabilité est donnée par le tableau ci-contre.

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$\mathrm{P}(\mathrm{X} = x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

On sait que :

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \qquad \text{et} \qquad \mathrm{V}(\mathrm{X}) = \mathrm{E}\left(\mathrm{X}^2\right) - \mathrm{E}^2(\mathrm{X}).$$

Lorsque cela est possible, on étend au cas d'une variable aléatoire continue de densité de probabilité, f, définie sur un intervalle, I, ces définition par :

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \int_{\mathrm{I}} t f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \mathrm{V}(\mathrm{X}) = \mathrm{E}\left(\mathrm{X}^2\right) - \mathrm{E}^2(\mathrm{X}).$$

Remarques

1. *Si l'intégrale définissant l'espérance est divergente, alors l'espérance n'est pas définie.*
2. *Si l'intégrale définissant la variance est divergente, alors la variance n'est pas définie.*
3. *Si l'espérance de X n'est pas définie, alors la variance de X n'est pas définie non plus.*

Exercice X.4.4. ***Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est la loi associée à la densité de probabilité $f : x \longmapsto \dfrac{2}{(\ln 3)(x^2-1)}$ sur $[2+\infty[$. L'espérance et la variance de X sont-elles définies ?***

Solution *Pour $x > 2$, on a :* $\displaystyle\int_2^x t f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\ln 3}\int_2^x \frac{2t\mathrm{d}t}{t^2-1} = \frac{1}{\ln 3}\left[\ln\left(t^2-1\right)\right]_2^x$.
Donc : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_2^x t f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$.
Ni l'espérance ni la variance de X ne sont définies. □

Exercice X.4.5. ***Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est la loi associée à la densité de probabilité $g : t \longmapsto |t|\mathrm{e}^{-t^2}$.***
Déterminer l'espérance et la variance de X (on pourra utiliser wxMaxima).

Solution *La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$, qui est symétrique par rapport à 0. De plus, pour tout nombre réel t : $g(-t) = |-t|\mathrm{e}^{-(-t)^2}) = |t|\mathrm{e}^{-t^2} = g(t)$. La fonction g est donc paire et la fonction, $t \longmapsto tg(t)$, est impaire comme produit d'une fonction impaire par une fonction paire. On en déduit que l'intégrale, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} tg(t)\,\mathrm{d}t$, est nulle si elle est convergente.*

```
Maxima 5.16.3 http://maxima.sourceforge.net
Using Lisp CLISP 2.44.1 (2008-02-23)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
The function bug_report() provides bug reporting information.
```

```
(%i1)	g(t):=abs(t)*exp(-t^2);
```
(%o1) $$g(t) := |t| \exp\left(-t^2\right)$$
```
(%i2)	assume(x>0);
```
(%o2) $$[x > 0]$$
```
(%i3)	integrate(t*g(t),t,0,x);
```
(%o3) $$\frac{e^{-x^2}\left(\sqrt{\pi}\, e^{x^2} \operatorname{erf}(x) - 2\,x\right)}{4}$$
```
(%i4)	limit(%,x,inf);
```
(%o4) $$\frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

Donc l'intégrale est convergente et l'espérance est nulle.

Si la variance est définie, on a : $\mathrm{V}(\mathrm{X}) = \mathrm{E}\left(\mathrm{X}^2\right) - \mathrm{E}^2(\mathrm{X}) = \mathrm{E}\left(\mathrm{X}^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 g(t)\,\mathrm{d}\,t = 2\int_0^{\infty} t^2 g(t)\,\mathrm{d}\,t$*, par parité.*

```
(%i5)	integrate(t^2*g(t),t,0,x);
```
(%o5) $$\frac{1}{2} - \frac{\left(x^2+1\right) e^{-x^2}}{2}$$
```
(%i6)	limit(%,x,inf);
```
(%o6) $$\frac{1}{2}$$

La variance de X est donc définie et vaut 1. □

X.4.3 Loi uniforme

Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$. La loi uniforme sur $[a\,;b]$ est la loi dont la densité est constante sur $[a\,;b]$ et nulle à l'extérieur de cet intervalle. Désignons par k la valeur de cette constante. On a :

$$1 = \int_{[a\,;b]} k\,\mathrm{d}\,t = k(b-a).$$

On en déduit que : $k = \dfrac{1}{b-a}$.

Définition X.4.4

Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$.

La loi uniforme sur $[a\,;b]$ est la loi dont la densité de probabilité, f, est définie par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a;b] \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus [a;b] \end{cases}$

X.4.4 Loi exponentielle

X.5 Adéquation à la loi équirépartie

On lance un dé usuel 100 fois. On obtient les résultats suivants :

chiffres	1	2	3	4	5	6
effectifs	20	17	12	19	11	21

On aimerait savoir en quel sens on peut considérer ce dé équilibré ou non. Le test à mettre en place ne doit pas être destructeur, il est donc forcément un test statistique. Il ne pourra donc pas être fiable à cent pour cent ; en effet, même avec un dé parfaitement équilibré la probabilité d'obtenir 100 fois le chiffre 1, bien qu'infime, n'est pas nulle. Ainsi rejeter un dé, c'est prendre le risque de rejeter un dé équilibré et accepter un dé, c'est prendre le risque d'accepter un dé déséquilibré. Examinons le tableau des fréquences.

chiffres	1	2	3	4	5	6
fréquences	20%	17%	12%	19%	11%	21%

On constate qu'il y a un écart certain avec le tableau des fréquences idéal.

chiffres	1	2	3	4	5	6
fréquences	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Doit-on imputer cet écart à un déséquilibre du dé ou à une fluctuation d'échantillonage ? Pour ce faire une idée on aimerait calculer une « distance », d, entre la répartition des fréquences obtenues et la répartition des fréquences idéale. Mais en utilisant le théorème de Pythagore, on sait que les carrés de distances sont plus faciles à calculer que les distances elles-mêmes, on décide donc de calculer le nombre, d^2, défini par :

$$d^2 = \sum_{i=1}^{6} \left(f_i - \frac{1}{6}\right)^2$$

où f_i désigne la fréquence observée du chiffre i. Effectuons les premiers calculs avec *wxMaxima*. Désignons par `fo` la liste des fréquences observées.

```
(%i7)  fo:[20,17,12,19,11,21];
(%o7)  [20,17,12,19,11,21]
(%i8)  fo:fo/100;
```

(%o8) $\left[\frac{1}{5}, \frac{17}{100}, \frac{3}{25}, \frac{19}{100}, \frac{11}{100}, \frac{21}{100}\right]$

```
(%i9)  d2:apply("+",(fo-1/6)^2);
```

(%o9) $\frac{67}{7500}$

```
(%i10)  float(d2);
(%o10)  0.0089333333333333
```

Nous avons maintenant une valeur pour d^2, mais cette valeur est pour l'instant inutilisable car nous n'avons aucune valeur de référence.

On fixe donc un seuil d'erreur, par exemple 10%. Ce seuil représente le risque de rejeter à tort l'hypothèse d'équiprobabilité dans 10% des cas les plus rares. L'idéal serait de prendre comme univers l'ensemble de tous les échantillons de 100 lancers de dé possibles, de munir cet univers de la loi équirépartie, de calculer d^2 pour chaque échantillon, de classer tous ces d^2 par ordre croissant et de rejeté les 10% ayant les plus grande valeur. Ont déterminerait donc le 9^e décile, D_9, de la série des d^2 et là deux cas seraient envisageables. Si la valeur de d^2 pour la répartition observé est inférieure à D_9 alors *les données observées sont compatibles avec le modèle théorique au seuil de risque de* 10%. Si la valeur de d^2 pour la répartition observé est supérieure à D_9 alors *on rejette l'hypothèse de la compatibilité des données observées avec un modèle équiréparti au seuil de risque de* 10%.

En pratique, $\omega = [\![1;6]\!]^{100}$, donc, $\text{card}(\Omega) = 6^{100} = 6,5\cdots \times 10^{77}$.

Il n'est pas envisageable d'effectuer les calculs nécessaires en un temps raisonnable avec les ordinateurs dont nous disposons pour déterminer D9.

Pour déterminer D9 nous allons simuler sur un tableur un nombre suffisant de séries aléatoires (suivant la loi équirépartie) de cent lancers de dé, pour chaque série on calculera d^2, puis on calculera le 9^e décile de la série des d^2. Nous obtenons les résultats suivants.

nombre de séries	300	500	1000	2000
Minimum	0,000733	0,000533	0,000533	0,000333
Q1	0,004333	0,004533	0,004533	0,004533
Médiane	0,007133	0,007533	0,007333	0,007133
Q3	0,010533	0,011133	0,010733	0,010533
D9	0,014733	0,014933	0,014733	0,014733
C95	0,017733	0,017733	0,017333	0,017333
Maximum	0,0299333	0,0337333	0,0351333	0,0351333

Nous constatons que D_9 semble se stabiliser dès mille séries de cents lancers sur la valeur : 0,014 733. Nous prendrons donc cette valeur comme référence. On a, $0,00893\cdots < 0,014733$, on peut donc affirmer : « les données observées sont compatibles avec le modèle théorique au seuil de risque de 10% ».

Chapitre XI

Barycentre

XI.1 Barycentre

Les considérations envisagées dans cette partie sont valables dans le plan et dans l'espace. L'ensemble $\mathscr{W}$ désignera, suivant les besoins du lecteur, le plan $\mathscr{P}$ ou l'espace $\mathscr{E}$.

XI.1.1 Introduction

DÉFINITIONS XI.1.1

(1) Un *point pondéré* est un couple (A, α) où A est un point et α un nombre, appelé coefficient ou masse.

(2) Un *système de points pondérés* est une collection de points pondérés dans laquelle un même point pondéré peut apparaître plusieurs fois.

(3) La *masse* d'un système de points pondérés est la somme des coefficients.

Remarque *La différence entre un système et un ensemble est que dans un ensemble, un même objet ne peut pas apparaître plusieurs fois.*

Exemple *Soit A, B, C trois points de* $\mathscr{W}$*,*

$$\{(A, 1), (B, -2), (C, \pi), (B, -2)\}$$

est un système de points pondérés de masse $\pi - 3$.

XI.1.2 Activités

M ou N désignent des points variables et A, B, C ... des points fixes.

Exercice XI.1.1. ***1. Simplifier :*** $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$.

2. On considère le système de points pondérés $\{(A,2),(B,2)\}$***. La fonction vectorielle de Leibniz qui lui est associée est*** $\vec{f} : M \mapsto 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}$.
I désigne le milieu du segment $[AB]$.

a. Simplifier $\vec{f}(M)$.

b. Soit $\vec{g}$ ***la fonction vectorielle de Leibniz associée à*** $\{(I,4)\}$.

Que peut-on dire de $\vec{f}$ ***et*** $\vec{g}$ ***?***

Exercice XI.1.2. ***Deux systèmes de points pondérés sont dits équivalents lorsque leurs fonctions vectorielles de Leibniz sont égales. Soit ABC un triangle et*** $\vec{f}$ ***la fonction vectorielle de Leibniz associée au système*** $\{(A,1),(B,1),(C,1)\}$.

1. Donner l'expression de $\vec{f}(M)$.

2. Démontrer que pour tous points M et N de $\mathscr{W}$ ***:***

$$\vec{f}(M) = \vec{f}(N) + 3\overrightarrow{MN}.$$

3. Résoudre l'équation $\vec{f}(M) = \vec{0}$.

4. Déterminer un système réduit à un seul point pondéré équivalent à $\{(A,1),(B,1),(C,1)\}$.

5. Quel lien existe-t-il entre $\vec{f}$ ***et la fonction vectorielle de Leibniz,*** $\vec{g}$***, associée à*** $\{(A,2),(B,2),(C,2)\}$.

Le point G, centre de gravité de ABC, est aussi appelé isobarycentre des points A, B, C.

Exercice XI.1.3. ***ABCD est parallélogramme de centre I. On considère le système S :*** $\{(A,1),(B,-1),(C,1)\}$ ***; et*** $\vec{f}$ ***sa fonction vectorielle de Leibniz associée.***

Lorsqu'un système a une masse non nulle, l'unique solution de l'équation $\vec{f}(\mathrm{M}) = \vec{0}$ est appelée barycentre du système.

1. Déterminer le barycentre de S.

2. Simplifier $\vec{f}(\mathrm{M})$.

3. Que peut-on dire des systèmes $\{(\mathrm{A},1),(\mathrm{C},1)\}$ et $\{(\mathrm{I},2)\}$

4. Que peut-on dire des systèmes S et S' : $\{(\mathrm{I},2),(\mathrm{B},-1)\}$

5. Justifier que S et S' ont le même barycentre.

6. Plus généralement énoncer un théorème.

Exercice XI.1.4. ***ABCD est un parallélogramme de centre I. On considère les systèmes $\{(\mathrm{A},-2),(\mathrm{B},1)(\mathrm{C},1)\}$ et S' : $\{(\mathrm{A},1),(\mathrm{B},-1),(\mathrm{C},1),(\mathrm{D},-1)\}$; ainsi que leurs fonctions vectorielles de Leibniz respectives $\vec{f}$ et $\vec{f}'$.***

1. Préciser la masse des systèmes S et S'.

2. Démontrer que $\vec{f}$ et $\vec{f}'$ sont des fonctions constantes.

3. Résoudre $\vec{f}(\mathrm{M}) = \vec{0}$ puis $\vec{f}'(\mathrm{M}) = \vec{0}$.

4. Énoncer un théorème sur les systèmes de points pondérés de masse nulle et les fonctions vectorielles de Leibniz constantes.

XI.1.3 Définition et propriétés

DÉFINITION XI.1.2

Soit $\{(\mathrm{A}_i,\alpha_i) \mid i \in [\![1,n]\!]\}$ un système de points pondérés. La fonction vectorielle de LEIBNIZ qui lui est associée est la fonction, $\vec{f}$, qui à tout point M de $\mathscr{W}$ associe le vecteur $\vec{f}(\mathrm{M})$ défini par :

$$\vec{f}(\mathrm{M}) = \alpha_1\overrightarrow{\mathrm{MA}_1} + \alpha_2\overrightarrow{\mathrm{MA}_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{\mathrm{MA}_n} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\overrightarrow{\mathrm{MA}_i}.$$

Exemple *Soit A et B deux points de $\mathscr{W}$, I le milieu du segment [AB] et $\vec{f}$ la fonction vectorielle de* LEIBNIZ *associée au système $\{(\mathrm{A},2),(\mathrm{B},2)\}$. Pour tout point M de $\mathscr{W}$:*

$$\vec{f}(\mathrm{M}) = 2\overrightarrow{\mathrm{MA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{MB}} = 2\overrightarrow{\mathrm{MI}} + 2\overrightarrow{\mathrm{IA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{MI}} + 2\overrightarrow{\mathrm{IB}} = 4\overrightarrow{\mathrm{MI}} \qquad \text{(XI.1)}$$

En particulier : $\vec{f}(\mathrm{I}) = \vec{0}$; $\vec{f}(\mathrm{A}) = 4\overrightarrow{\mathrm{AI}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ *et* $\vec{f}(\mathrm{A}) = 4\overrightarrow{\mathrm{BI}} = -2\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

THÉORÈME XI.1.1

Soit $\{(\mathrm{A}_i,\alpha_i) \mid i \in [\![1,n]\!]\}$ un système de points pondérésde masse m $\left(m = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)$ et $\vec{f}$ la fonction vectorielle de Leibniz qui lui est associée.

(1) Si $m \neq 0$, il existe un unique point G de $\mathscr{W}$ vérifiant : $\vec{f}(\mathrm{G}) = \vec{0}$.
Pour tout point M de $\mathscr{W}$: $\vec{f}(\mathrm{M}) = m\overrightarrow{\mathrm{MG}}$.

(2) Si $m = 0$, alors $\vec{f}$ est une fonction vectorielle constante.

Démonstration Pour tous points M et N de $\mathscr{W}$, on a :

$\vec{f}(\mathrm{M}) - \vec{f}(\mathrm{N}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\overrightarrow{\mathrm{MA}_i} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\overrightarrow{\mathrm{NA}_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}_i} - \overrightarrow{\mathrm{NA}_i}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_i\overrightarrow{\mathrm{NM}}\right) = \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i)\overrightarrow{\mathrm{NM}} = m\overrightarrow{\mathrm{NM}}$;

donc :

$$\vec{f}(\mathrm{M}) = \vec{f}(\mathrm{N}) + m\overrightarrow{\mathrm{MN}} \qquad \text{(XI.2)}$$

Soit A un point fixé. En prenant : N = A, il vient pour tout point M de $\mathscr{W}$:

$$\vec{f}(\mathrm{M}) = \vec{f}(\mathrm{A}) + m\overrightarrow{\mathrm{MA}} \qquad \text{(XI.3)}$$

Si $m \neq 0$

EXISTENCE DE G Introduisons le point G tel que : $\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \frac{1}{m}\vec{f}(\mathrm{A})$.

En utilisant (XI.3) avec : M = G, il vient :

$$\vec{f}(\mathrm{G}) = \vec{f}(\mathrm{A}) + m\overrightarrow{\mathrm{GA}} = \vec{f}(\mathrm{A}) - \vec{f}(\mathrm{A}) = \vec{0}.$$

DÉMONSTRATION DE LA FORMULE Pour tous points M de $\mathscr{W}$, en utilisant (XI.2) avec : N = G, il vient :

$$\vec{f}(\mathrm{M}) = \vec{f}(\mathrm{G}) + m\overrightarrow{\mathrm{MG}} = \vec{0} + m\overrightarrow{\mathrm{MG}} = m\overrightarrow{\mathrm{MG}}.$$

UNICITÉ DE G D'après la formule précédente, puisque $m \neq 0$, pour tout point M du plan :

$$\vec{f}(\mathrm{M}) = \vec{0} \iff m\overrightarrow{\mathrm{MG}} = \vec{0} \iff \overrightarrow{\mathrm{MG}} = \vec{0} \iff \mathrm{M} = \mathrm{G}.$$

Si $m = 0$

Pour tous points M de $\mathscr{W}$, d'après (XI.3) :

$$\vec{f}(\mathrm{M}) = \vec{f}(\mathrm{A}) + 0 \cdot \overrightarrow{\mathrm{AM}} = \vec{f}(\mathrm{A}).$$

Donc $\vec{f}$ est une fonction vectorielle constante. □

Le théorème XI.1.1 justifie la définition suivante.

DÉFINITION XI.1.3

Soit $\left\{(\mathrm{A}_i, \alpha_i) \mid i \in [\![1, n]\!]\right\}$ un système de points pondérésde masse non nulle.
L'unique point, G, vérifiant :

$$\alpha_1\overrightarrow{\mathrm{GA}_1} + \alpha_2\overrightarrow{\mathrm{GA}_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{\mathrm{GA}_n} ;$$

est appelé *barycentre* du système.

Notations et vocabulaire *On peut alors écrire :*

$$\mathrm{G} = \mathrm{bar}\left\{(\mathrm{A}_1, \alpha_1), \cdots, (\mathrm{A}_n, \alpha_n)\right\}$$

*Si de plus tous les coefficients sont égaux, ont dit que G est l'*isobarycentre *des points $A_1, \cdots, A_n$.*

Remarques

1. *Un système dont la somme des coefficients est nulle n'a pas de barycentre.*
2. *Lorsqu'on évoquera le barycentre d'un système, si cela n'est pas explicitement précisé, il sera sous-entendu que la masse, m, du système est non nulle.*
3. *Si $m \neq 0$, le système $\left\{(\mathrm{A}_i, \alpha_i) \mid i \in [\![1, n]\!]\right\}$ est équivalent à $\{(\mathrm{G}, m)\}$.*
On en déduit que deux systèmes de masses non nulles sont équivalents si et seulement si ils ont le même barycentre et la même masse.
4. *Deux systèmes de masses nulles ne sont pas nécessairement équivalents.*

Exemple

Considérons le système composé de deux boules homogènes de même masse, m, reliées par une tige rigide et sans masse de longueur ℓ. Ce système est équivalent à une masse ponctuelle de masse $2m$ placé au centre, I, de la tige.

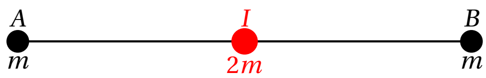


FIGURE XI.1 –

Exercice XI.1.5. ***A, B, C, D sont des points fixés de $\mathscr{W}$ et M est un point variable. Simplifier les écritures.***

a. $\overrightarrow{\mathbf{MA}} + \overrightarrow{\mathbf{MB}} + \overrightarrow{\mathbf{MC}}$.

b. $\overrightarrow{\mathbf{MA}} + \overrightarrow{\mathbf{MB}} - 2\overrightarrow{\mathbf{MC}}$.

c. $3\overrightarrow{\mathbf{MA}} + 5\overrightarrow{\mathbf{MB}} - 4\overrightarrow{\mathbf{MC}} + 6\overrightarrow{\mathbf{MD}}$.

d. $3\overrightarrow{\mathbf{MA}} - 5\overrightarrow{\mathbf{MB}} - 4\overrightarrow{\mathbf{MC}} + 6\overrightarrow{\mathbf{MD}}$.

Solution

a. *Introduisons l'isobarycentre, G, des points A, B et C. Il vient par réduction, pour tout $\mathrm{M} \in \mathscr{W}$:*
$\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}} = 3\overrightarrow{\mathrm{MG}}$.

b. *On reconnaît une fonction vectorielle de Leibniz associée à un système de masse nulle. Cette fonction est donc constante, (en calculcultant l'image de C) pour tout $\mathrm{M} \in \mathscr{W}$:*
$\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} - 2\overrightarrow{\mathrm{MC}} = \overrightarrow{\mathrm{CA}} + \overrightarrow{\mathrm{CB}}$.
En calculant l'image de A on aurait obtenu, tout $\mathrm{M} \in \mathscr{W}$: $\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} - 2\overrightarrow{\mathrm{MC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} - 2\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

c. *On reconnaît la fonction vectorielle de Leibniz associée au système $\left\{(\mathrm{A}, 3), (\mathrm{B}, 5), (\mathrm{C}, -4), (\mathrm{D}, 6),\right\}$ de masse 10. On a : $10 \neq 0$; ce système a donc un barycentre que nous appellerons G_1 ; il vient par réduction, pour tout $\mathrm{M} \in \mathscr{W}$:*
$3\overrightarrow{\mathrm{MA}} + 5\overrightarrow{\mathrm{MB}} - 4\overrightarrow{\mathrm{MC}} + 6\overrightarrow{\mathrm{MD}} = 10\overrightarrow{\mathrm{MG}_1}$.

d. *De même qu'en* ***b.****, pour tout $\mathrm{M} \in \mathscr{W}$:*
$3\overrightarrow{\mathrm{MA}} - 5\overrightarrow{\mathrm{MB}} - 4\overrightarrow{\mathrm{MC}} + 6\overrightarrow{\mathrm{MD}} = -5\overrightarrow{\mathrm{AB}} - 4\overrightarrow{\mathrm{AC}} + 6\overrightarrow{\mathrm{AD}} = 3\overrightarrow{\mathrm{BA}} - 4\overrightarrow{\mathrm{BC}} + 6\overrightarrow{\mathrm{BD}}$. □

Remarque *Les systèmes associés aux questions* ***b.*** *et* ***d.*** *ont une masse nulle, on ne peut donc pas introduire de barycentre.*

XI.1.4 Propriétés

THÉORÈME XI.1.2 HOMOGÉNÉITÉ
On ne change pas le barycentre d'un système en multipliant tous ces coefficients par une même constante non nulle.

Démonstration Soit G le barycentre d'un système $\left\{(A_i, \alpha_i) \mid i \in [\![1, n]\!]\right\}$ de masse non nulle et λ un réel non nul.
On a : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$; donc : $\sum_{i=1}^{n} \left(\lambda \alpha_i \overrightarrow{GA_i}\right) = \lambda \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_i \overrightarrow{GA_i}\right) = \lambda \vec{0} = \vec{0}$. □

THÉORÈME XI.1.3
Soit A, B, C, D quatre points non coplanaires et a, b, c, d quatre nombres réels tels que :
$a + b \neq 0$; $a + b + c \neq 0$; $a + b + c + d \neq 0$.

(1) Le barycentre du système $\{(A, a), (B, b)\}$ est le point d'abscisse $\dfrac{b}{a+b}$ sur la droite (AB) munie du repère (A, B).

(2) Le barycentre du système $\{(A, a), (B, b), (C, c)\}$ est le point de coordonnées $\left(\dfrac{b}{a+b+c} ; \dfrac{c}{a+b+c}\right)$ sur le plan (ABC) muni du repère (A, B, C).

(3) Le barycentre du système $\{(A, a), (B, b), (C, c), (D, d)\}$ est le point de coordonnées $\left(\dfrac{b}{a+b+c+d} ; \dfrac{c}{a+b+c+d} ; \dfrac{d}{a+b+c+d}\right)$ dans $\mathscr{E}$ muni du repère (A, B, C, D).

Démonstration Les trois propriétés se démontrent suivant le même schéma. À titre indicatif nous démontrerons la propriété **(2)**.
Soit G le barycentre du système. Pour tout point M de $\mathscr{W}$, on a par réduction de somme de Leibniz :

$$(a+b+c)\overrightarrow{MG} = a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}.$$

Pour M = A, on en déduit que :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}.$$

D'où l'on tire le résultat désiré. □

Exercice XI.1.6. ***A et B sont deux points tels que AB = 3. Placer le barycentre G du système*** $\{(A, -2), (B, 5)\}$.

Solution *G est le point d'abscisse* $\dfrac{5}{3}$ *sur la droite* (AB) *munie du repère* (A, B).

□

Exercice XI.1.7. ***Le plan est muni du repère*** $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. ***On considère les points*** $A(1 ; -1)$, ***B(5 ;-1) et*** $C(2 ; 2)$.
Placer le point, G, barycentre du système $\{(A, -5), (B, 9), (C, 8)\}$

Solution *La masse du système est* 12*, donc par homogénéité :* $G = \text{bar}\left\{\left(A ; -\dfrac{5}{12}\right), \left(B ; \dfrac{3}{4}\right), \left(C ; \dfrac{2}{3}\right)\right\}$. *Nous en déduisons que G est le point de coordonnées* $\left(\dfrac{3}{4} ; \dfrac{2}{3}\right)$ *dans le repère* (A, B, C). □

THÉORÈME XI.1.4
Soit A, B, C, D quatre points non coplanaires et x, y, z trois nombres réels.

(1) Sur la droite (AB) munie du repère (A, B), le point d'abscisse x est le barycentre du système $\{(A, 1-x), (B, x)\}$.

(2) Dans le plan (ABC) muni du repère (A, B, C) le point de coordonnées $(x ; y)$ est le barycentre du système $\{(A, 1-x-y), (B, x), (C, y)\}$.

(3) Dans $\mathscr{E}$ muni du repère (A, B, C, D)le point de coordonnées $(x ; y ; z)$ est le barycentre du système $\{(A, 1-x-y-z), (B, x), (C, y)(D, z)\}$.

Démonstration Les trois propriétés se démontrent suivant le même schéma. À titre indicatif nous démontrerons la propriété **(2)**.
Soit M$(x ; y)$ dans le repère (A,B,C). On a :

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{AM} + x\overrightarrow{MB} + y\overrightarrow{AM} + y\overrightarrow{MC}.$$

On en déduit que :

$$(1-x-y)\overrightarrow{MA} + x\overrightarrow{MB} + y\overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

D'où l'on tire le résultat désiré. □

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate des théorèmes XI.1.3 et XI.1.4.

COROLLAIRE XI.1.5
Soit A, B, C, D quatre points non coplanaires

(1) L'ensemble des barycentres des points A et B est la droite (AB).

(2) L'ensemble des barycentres des points A, B et C est le plan (ABC).

(3) L'ensemble des barycentres des points A, B, C et D est l'espace $\mathscr{E}$.

Démonstration Démontrons par exemple **(2)**.

D'après le théorème XI.1.3 tout barycentre de A, B, C est un point de (ABC).
D'après le théorème XI.1.4 tout point de (ABC) est un barycentre de A, B, C.
Donc, l'ensemble des barycentres des points A, B et C est le plan (ABC). □

THÉORÈME XI.1.6 ASSOCIATIVITÉ

Dans un système de points pondérés, lorsqu'on remplace un sous-système par un sous-système équivalent, on obtient un système équivalent.

Démonstration Soit un système $\{(A_i,\alpha_i) \mid i \in [\![1,n]\!]\}$, $\vec{f}$ la fonction vectorielle de LEIBNIZ associée et $\{(B_j,\beta_j) \mid j \in [\![1,p]\!]\}$ un système équivalent au système $\{(A_i,\alpha_i) \mid i \in [\![1,q]\!]\}$ (avec $0 < q < n$).
Nous devons démontrer que les systèmes $\{(A_1,\alpha_1),\cdots,(A_q,\alpha_q),(A_{q+1},\alpha_{q+1}),\cdots,(A_n,\alpha_n)\}$ et
$\{(B_1,\beta_1),\cdots,(B_p,\beta_p),(A_{q+1},\alpha_{q+1}),\cdots,(A_n,\alpha_n)\}$ ont la même fonction vectorielle de LEIBNIZ.

Pour tout point M de $\mathscr{W}$, on a : $\sum_{i=1}^{q} \alpha_i\overrightarrow{MA_i} = \sum_{j=1}^{p} \beta_j\overrightarrow{MB_j}$.

Donc, pour tout point M de $\mathscr{W}$: $\vec{f}(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\overrightarrow{MA_i} = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i\overrightarrow{MA_i} + \sum_{i=q+1}^{n} \alpha_i\overrightarrow{MA_i} = \sum_{j=1}^{p} \beta_j\overrightarrow{MB_j} + \sum_{i=q+1}^{n} \alpha_i\overrightarrow{MA_i}$ □

Remarque *Le théorème XI.1.6 signifie, entre autre, qu'on ne change pas le barycentre d'un système en remplaçant un sous-système par un sous-système équivalent.*

Exercice XI.1.8. ***Soit ABC un triangle et a, b, c trois réels tels que : $a+b \neq 0$; $b+c \neq 0$; $c+a \neq 0$ et $a+b+c \neq 0$. On considère les points A', B' et C', barycentres respectifs des systèmes : $\{(B,b),(C,c)\}$; $\{(C,c),(A,a)\}$; $\{(A,a),(B,b)\}$.***
1. Justifier l'existence des points A', B' et C'.
2. Démontrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en un point qu'il conviendra de préciser.

Solution ***1.*** *Les systèmes : $\{(B,b),(C,c)\}$; $\{(C,c),(A,a)\}$; $\{(A,a),(B,b)\}$; sont chacun de masse non nulle, donc leurs barycentres existent.*

2. *Posons :* $G = \text{bar}\{(A,a)(B,b),(C,c)\}$.
Par associativité, on a : $G = \text{bar}\{(A,a)(A',b+c)\} = \text{bar}\{(B,b),(B',a+c)\} = \text{bar}\{(C,c),(C',a+b)\}$.
Donc G appartient à la fois aux trois droites :
G est le point de concours des droites (AA'), (BB') *et* (CC'). □

THÉORÈME XI.1.7

L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.
Pour $i \in]\!]1;n[\![$ on considère des points $A_i(x_i;y_i;z_i)$ et G le barycentre du système $\{(A_i,\alpha_i) \mid i \in [\![1,n]\!]\}$ de masse m non nulle.

Les coordonnées de G sont : $\begin{cases} x_G = \dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \\ y_G = \dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \\ z_G = \dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i z_i \end{cases}$

Démonstration Pour tout point M de $\mathscr{E}$, on a :

$$m\overrightarrow{MG} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\overrightarrow{MA_i}.$$

Pour M = O, on en déduit que :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\overrightarrow{OA_i}.$$

D'où l'on tire le résultat désiré. □

Remarque *Dans le plan on a de même :* $\begin{cases} x_G = \dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \\ y_G = \dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \end{cases}$

DÉFINITION XI.1.4

Soit f une application de $\mathscr{W}$ dans lui-même.
On dira que f conserve les barycentres si pour tout système $\{(A_i,\alpha_i) \mid i \in [\![1,n]\!]\}$ de masse non nulle m et de barycentre G, le système $\{(f(A_i),\alpha_i) \mid i \in [\![1,n]\!]\}$ a pour barycentre $f(G)$.

Les isométries ont été vues en classe de Seconde, les homthéties seront vues à la fin de l'année scolaire et les similitudes seront vues en enseignement de spécialité en classe de Terminale. Nous admettons le théorème suivant.

THÉORÈME XI.1.8

(1) Les isométries (translations, rotations, réflexions ...), les homothéties et plus généralement les similitudes conservent le barycentre.
(2) Les projections conservent le barycentre.

XI.1.5 Exercices

XI.1.a. ABC est un triangle. Démontrer que l'isobarycentre des points A, B, C est le point de concours des médianes du triangle ABC.

Index