Maths 1

5.0

14/06/2023

Table des matières

I Logique et raisonnement

1. Objectifs

Le but de ce chapitre est de faire découvrir aux étudiants la notion de logique mathématique, leur permettant de maîtriser tous les modes de raisonnement, ils seront capable de :

- Connaître les opérateurs et quantificateurs universels principaux et leurs caractéristiques
- Maîtriser les concepts d'implication et d'équivalence.
- Modéliser un texte ou un énoncé pour en vérifier sa validité .
- Comprendre les principes du raisonnement mathématique et développer des compétences en matière de raisonnement logique.
- Identifier la (les) méthode(s) adéquate(s) pour résoudre une question ou une situation donnée

2. Langage logique

2.1. Proposition logique

Définition

On appelle ***proposition*** toute phrase, expression, assertion ou énoncé (mathématique) dont on sait affirmer si elle est vraie ou fausse.

On note en générale une proposition par : ***P***, ***Q***, ***R***...

On associe à chaque proposition le chiffre ***1*** si elle est ***vraie***, et le chiffre ***0*** si elle est ***fausse***.

Logiques mathématiques

Exemple

- « 2023 < 2022 » est une proposition car on peut dire qu'elle est fausse.
- « L'Algérie est le plus grand pays d'Afrique » est une proposition car on peut dire qu'elle est vraie.

Galerie

Définition : Table de vérité

Etant données plusieurs propositions, on résume toutes les possibilités dans un tableau qu'on appelle ***table de vérité***.

Pour une proposition il y' a donc deux possibilités comme suit :

P
1
0

pour ***2 propositions*** il y' a ***4 possibilités***, soit les deux sont vraies, soit la première est vraie et la seconde est fausse, soit la première est fausse et la seconde est vraie ou encore les deux sont fausses.

P	Q
1	1
1	0
0	1
0	0

Pour n propositions il y' a 2^n possibilités.

Définition : Négation d'une proposition

Si ***P*** est une ***proposition***, on note la négation de ***P*** par ***non P*** ou $\overline{P}$, qui est vraie si ***P*** est fausse et fausse si ***P*** est vraie. Voici la table de vérité qui résume ce qui dit

P	$\overline{P}$
1	0
0	1

2.2. Connecteurs logique

Définition : Conjonction "et"

On appelle ***conjonction*** de deux propositions ***P*** et ***Q***, la proposition notée « $P \wedge Q$ » qui est vraie, si P et Q sont vraies et fausse dans les autres cas.

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Remarque

Deux propositions sont ***incompatibles*** si leur conjonction est fausse.

Définition : Disjonction "ou"

On appelle disjonction la proposition ***P ou Q*** et on la note « $P \vee Q$ ». Elle est vraie si l'une des deux propositions est vraie.

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Définition : Implication

Soient ***P*** et ***Q*** deux propositions données, on définit la

proposition (***P*** implique ***Q***) notée ($P \Rightarrow Q$) par $(\overline{p} \vee q)$.

L'implication est fausse dans le seul cas où ***P*** est vraie et ***Q*** est fausse.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Définition : Équivalence

Soient P et Q deux propositions données, on définit la proposition ($P \Leftrightarrow Q$) dite aussi (P est équivalente à Q) par ($(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$).

En traçant la table de vérité on remarque que l'équivalence est vraie si et seulement si ***P*** et ***Q*** sont vraies en même temps ou fausses en même temps.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Remarque

- Deux propositions sont ***équivalentes*** si elles ont une même table de vérité.
- ***Une tautologie*** est une proposition qui est toujours vraie.
- ***Une contradiction*** est une proposition qui est toujours fausse.

Fondamental : Proposition :

Soient P, Q et R trois propositions données, nous avons alors les propriétés suivantes

1. $\overline{\overline{P}} \Leftrightarrow P$.
2. $(P \ \wedge \ P) \ \Leftrightarrow P$.
3. $(P \ \vee \ P) \ \Leftrightarrow P$.
4. $(P \ \wedge \ Q) \ \Leftrightarrow \ (Q \ \wedge \ P)$ commutativité du connecteur $\wedge$.
5. $(P \ \vee \ Q) \ \Leftrightarrow \ (Q \ \vee \ P)$ commutativité du connecteur $\vee$.
6. $[(P \wedge Q) \wedge R] \Leftrightarrow [P \wedge (Q \wedge R)]$ associativité du connecteur $\wedge$.
7. $[(P \vee Q) \vee R] \Leftrightarrow [P \vee (Q \vee R)]$ associativité du connecteur $\vee$.
8. $\overline{(P \wedge Q)} \Leftrightarrow \left(\overline{P} \vee \overline{Q}\right)$ ***loi de Morgan.***
9. $\overline{(P \vee Q)} \Leftrightarrow \left(\overline{P} \wedge \overline{Q}\right)$ ***loi de Morgan.***
10. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$.

Pour démontrer ces propriétés, il suffit de tracer une table de vérité, à titre d'exemple nous allons démontrer ***la première loi de Morgan***

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$P \wedge Q$	$\overline{(P \wedge Q)}$	$\left(\overline{P} \vee \overline{Q}\right)$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1

2.3. Les quantificateurs logiques

Définition : Quantificateur existentiel

Le quantificateur existentiel noté $\exists$ qui signifie "il existe au moins". Par exemple « il existe x, x satisfait la propriété $P(x)$ » s'écrira « $\exists\, x, P(x)$ ».

Définition : Quantificateur universel

le quantificateur universel est noté par $\forall$, qui signifie « pour tout » ou « quel que soit ». Par exemple « pour tout x, x satisfait la propriété $P(x)$ » s'écrira « $\forall x, P(x)$ ».

Les deux quantificateurs sont liés par le fait que la négation de l'un donne l'autre,

$$\begin{aligned} \overline{[\forall x,\ P(x)]} &\Leftrightarrow \left[\exists x,\ \overline{P(x)}\right] \\ \overline{[\exists x, P(x)]} &\Leftrightarrow \left[\forall x,\ \overline{P(x)}\right] \end{aligned}$$

Remarque

L'ordre des quantificateurs est très important.

Par exemple, l'affirmation suivante signifie que tout nombre réel a un opposé : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x + y = 0.$

Cette affirmation est bien vraie dans $\mathbb{R}^*$ (il suffit que $y = -x$, ces y diffèrent donc suivant x).

Par contre l'affirmation $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} : x + y = 0$ est fausse.

Elle signifie en effet qu'il existerait un nombre réel y qui serait un absorbant pour l'addition : ajouté à n'importe quel nombre réel x, il donnerait toujours une somme égale à zéro.

Un tel nombre réel y n'existe pas.

3. Différents types de mode de raisonnement

3.1. Raisonnement directe

Définition

Le raisonnement mathématique le plus courant est l'implication "directe", aussi appelé «raisonnement déductif ». On suppose qu'une propriété P est vraie et on en déduit qu'une propriété Q est vraie, ce qu'on note souvent $P \Rightarrow Q$.

3.2. Raisonnement par contraposée

Définition

Au lieu de démontrer que $(p \Rightarrow q)$ est vraie, il est parfois plus commode de démontrer que sa contraposée $(\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$ est vraie.

Exemple

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Montrer que $\left[\left(n^2 pair\right) \Rightarrow (n\ pair)\right]$.

Pour démontrer cela nous allons procéder par contraposée, donc au lieu de montrer que $\left(n^2 pair\right) \Rightarrow (n pair)$, nous allons montrer que $(n\ impair) \Rightarrow \left(n^2\ impair\right)$, en effet

- n impair $\Rightarrow n = 2k + 1$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$
- $\Rightarrow n^2 = (2k + 1)^2$
- $\Rightarrow n^2 = 4k^2 + 4k + 1$
- $\Rightarrow n^2 = 2\left(2k^2 + 2k\right) + 1$
- $\Rightarrow n^2 = 2k' + 1$
- $\Rightarrow n^2$ impair

3.3. Raisonnement par l'absurde

Définition

Au lieu de montrer qu'une proposition est vraie, la démonstration par l'absurde consiste à démontrer que sa négation est fausse.

En particulier au lieu de montrer que $(P \Rightarrow Q)$ est vraie, nous allons montrer que $\overline{(P \Rightarrow Q)}$ est fausse.

Exemple

Pour $x \in \mathbb{R}$, par l'absurde montrer que $\left[(x \neq -2) \Rightarrow \left(\frac{x+1}{x+2} \neq 1\right)\right]$.

Par l'absurde on suppose que $\left[(x \neq -2)\ et\ \left(\frac{x+1}{x+2} = 1\right)\right]$, or

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x+2} &= 1 \Rightarrow x + 1 = x + 2 \\ &\Rightarrow 1 = 2 \text{ ce qui est absurde.} \end{aligned}$$

3.4. Raisonnement par contre exemple

Définition

Pour montrer que $\forall x, P(x)$ est fausse, il faut trouver un x qui ne vérifie pas la propriété .

Exemple

La proposition $\forall x \in \mathbb{R} : x^3 + 1 \geq 0$ est fausse car pour $x = -2$, la propriété n'est pas vraie.

3.5. Raisonnement par récurrence

Définition

Pour montrer qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n, la démonstration par récurrence consiste à

- vérifier que $P(0)$ est vraie,
- supposer que la propriété est vraie à un rang n quelconque (c'est ***l'hypothèse de récurrence***),
- démontrer qu'elle reste vraie au rang $n + 1$.
  On conclut alors que la propriété $P(n)$ est vraie quelque soit l'entier naturel n.

Remarque

La démonstration par récurrence reste valable si 0 est remplacé par $1,\ 2,\ 3$ ou n_0 la conclusion sera que $P(n)$ est vraie quelque soit l'entier naturel $n \geq n_0$.

Exemple

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :

$0 + 1 + 2 + 3 + \dots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

- On commence par vérifier que pour $n = 0$ on a bien que $0 = \dfrac{0(0+1)}{2}$.
- On suppose que pour un certain rang n, on a $0 + 1 + 2 + 3 + \dots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ (HR*).
- Il faut montrer que $0 + 1 + 2 + 3 + \dots + (n+1) = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$, en effet
  - $0 + 1 + 2 + 3 + \dots + (n+1) = [0 + 1 + 2 + 3 + \dots + n] + (n+1)$
  - $= \dfrac{n(n+1)}{2} + (n+1)$ par l'hypothèse de récurrence.
  - $= \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Alors, $0 + 1 + 2 + 3 + \dots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ est vraie quelque soit l'entier naturel $n \geq 0$.

Glossaire

R

Ensemble des nombres réels

Abréviations

HR : hypothèse de Récurrence