# Chapitre 2

5.0

14/06/2023

# Table des matières

# I Ensembles et applications

## 1. Objectifs

Le présent chapitre a pour but de présenter les différents points de terminologie et les notations nécessaires à l'étude des ensembles et des applications :

- Avoir connaissance du vocabulaire lié à la théorie des ensembles.
- Montrer qu'une application est injective / surjective ou bijective.
- Manipulation des applications linéaires, noyau, image.
- Opérations sur les applications linéaires, théorème sur le rang d'une application linéaire.

  .

## 2. Quelques notions de la théorie des ensembles

### *Définition : Ensemble*

Un ensemble est une collection d'objets, où chaque objet est appelé élément. Il y a principalement deux façons de définir un ensemble :

- En extension si on donne la liste de ses éléments.
- En compréhension si on ne donne pas la liste de ses éléments mais juste leur propriété(s).

### *Exemple*

$$E = \{x \in \mathbb{N}; x \text{ divise } 8\} \quad \text{ensemble défini en compréhension}$$

.

$$E = \{1, 2, 4, 8\} \ \text{ensemble défini en extension}$$

.

### *Définition : Ensemble vide*

L'ensemble vide est l'ensemble qui ne contient aucun élément, on le note $\varnothing$ .

### *Définition : Inclusion et égalité*

Soients $A$ et $B$ deux ensembles donnés,

- on dira que $A$ est inclus dans $B$, ou que $A$ est une partie de $B$ ou encore que $A$ est un sous ensemble de $B$, si et seulement si tout élément de $A$ est aussi un élément $B$. On note dans ce cas $A \subset B$.
- On dira que $A$ est égale à $B$, si on a la double inclusion $A \subset B$ et $B \subset A$.

Alors, $(A = B) \Leftrightarrow (A \subset B \text{ et } B \subset A)$

## Définition : Ensemble des parties d'un ensemble

Soit $E$ un ensemble donné on note $\mathcal{P}(E)$ , l'ensemble des parties de $E$.

$\mathcal{P}(E) = \{A,\ A \subset E\}$

## Exemple

$$\begin{aligned} E &= \{1.2\} \\ \mathcal{P}(E) &= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1.2\}\} \end{aligned}$$

## Définition : Cardinal d'un ensemble

On appelle ***cardinal d'un ensemble***, le nombre de ses éléments, et on le note $card$.

Par exemple, si $E = \{a, b, c\}$ alors $card(E) = 3$.

## Définition : Complémentaire d'un ensemble

Soit $E$ un ensemble donné, et soit $A \subset E$, le complémentaire de $A$ dans $E$ est l'ensemble noté défini par $C_E A = \{x \in E;\ x \notin A\}$.

Si l'ensemble $A$ est défini par $A = \{x \in E;\ p(x)\}$, alors $C_E A = \left\{x \in E;\ \overline{p(x)}\right\}$

On a les ***propriétés*** suivantes :

- $C_E(C_E A) = A$.
- $C_E E = \emptyset$.
- $C_E \emptyset = E$.

## Définition : Union d'ensemble

Soit $E$ un ensemble donné, et soient $A$ et $B$ deux ensembles vérifiant $A \subset E$ et $B \subset E$ tels que $A = \{x \in E;\ p(x)\}$ et $B = \{x \in E;\ q(x)\}$.

L'union ou réunion de $A$ et $B$ est l'ensemble noté $A \cup B$ défini par $$\begin{aligned} A \cup B &= \{x \in E;\ p(x) \vee q(x)\} \\ &= \{x \in E;\ x \in A \text{ ou } x \in B\}. \end{aligned}$$

## Définition : L'intersection d'ensemble

Soit $E$ un ensemble donné, et soient $A$ et $B$ deux ensembles vérifiant $A \subset E$ et $B \subset E$ tels que $A = \{x \in E;\ p(x)\}$ et $B = \{x \in E;\ q(x)\}$.

L'intersection de $A$ et $B$, est l'ensemble noté $A \cap B$ défini par

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{x \in E;\ p(x) \wedge q(x)\} \\ &= \{x \in E;\ x \in A \text{ et } x \in B\} \end{aligned}$$

On observera que

$A \subset A \cup B$, et $B \subset A \cup B$

et que

$A \cap B \subset A$, et $A \cap B \subset B$

### *Complément : Propriétés :*

Soient $A, B$ et $C$ trois sous ensembles d'un ensemble $E$ Les propriétés suivantes se déduisent de celles introduites dans la section des connecteurs logiques :

1. $A \cap A = A$.
2. $A \cap B = B \cap A$ ***commutativité de l'intersection***.
3. $A \cup B = B \cup A$ ***commutativité de l'union***.
4. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ ***associativité de l'intersection***.
5. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ ***associativité de l'union.***
7. $C_E (A \cup B) = C_E A \cap C_E B$
8. $C_E A \cap A = \varnothing$
9. $C_E A \cup A = E$.

### *Définition : Différence et différence symétrique*

Soient $A$ et $B$deux sous ensembles d'un ensemble $E$,

1. on note $A \setminus B$ la différence de $A$ et $B$, comme étant l'ensemble des éléments de $A$ n'appartenant pas à $B$.
   $$\begin{aligned} A \setminus B &= \{x \in E;\ x \in A \text{ et } x \notin B\} \\ &= A \cap C_E B \end{aligned}$$ .
2. La différence symétrique de $A$ et $B$ est l'ensemble noté $A \triangle B$ défini par
   $$\begin{aligned} A \triangle B &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\ &= (A \cup B) \setminus (A \cap B) \end{aligned}$$

# 3. Les application

## 3.1. Définitions et propriétés

### *Définition*

On appelle application d'un ensemble $E$ vers un ( ou dans un ) ensemble $F$, toute correspondance $f$ qui associe à tout élément $x \in E$ ***un et un seul*** élément $y = f(x) \in F$. On conservera aussi la même notation

$$f : \begin{array}{l} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto f(x) \end{array}$$

- $E$ est appelé ensemble de départ,
- $F$ est appelé ensemble d'arrivé,
- $y = f(x)$ est appelé image de $x$,
- $x$ est appelé antécédent de $y = f(x)$.

### *Définition : Application identité*

L'application d'un ensemble $E$ vers lui même qui à chaque élément $x$ associe $x$, est appelée application identité notée $I_E$

$$I_E : \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto I_E(x) = x \end{array}$$

## 3.2. Égalité de deux applications

### *Définition*

Soient $f$ et $g$ deux applications de $E$ vers $F$ On définit l'égalité entre $f$ et $g$ comme suit

$$(f = g) \Leftrightarrow (\forall x \in E,\ f(x) = g(x))$$

### *Remarque*

On ne parle jamais d'égalité entre deux applications qui n'ont pas le même ensemble de départ et d'arrivée.

## 3.3. Classification des applications

### *Définition : Application surjective*

On dira que $f$ est une ***application surjective*** si et seulement si tout élément $y$ de $F$ possède « *au moins un antécédent* » $x$ dans $E$.

En d'autres termes

- $f$ est surjective $\Leftrightarrow$ $(\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x))$.
- $f$ est surjective $\Leftrightarrow$ $(\forall y \in F)$ , l'équation $y = f(x)$ possède au moins une solution $x \in E$.

### *Exemple*

Soit

$$f : \begin{array}{c} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) = 3x + 5 \end{array}.$$

Soit $y \in \mathbb{R}$, $\begin{array}{rcl} y & = & f(x) \Rightarrow y = 3x + 5 \\ y & = & f(x) \Rightarrow x = \dfrac{y-5}{3} \end{array}$ , ainsi

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x = \frac{y-5}{3} \in \mathbb{R},\quad y = f(x).$$

En conclusion $f$ est surjective.

## *Définition : Application injective*

On dira que $f$ est une ***application injective*** si et seulement si tout élément $y$ de $F$ possède *« au plus un antécédent »* $x$ dans $E$.

En d'autres termes

- $f$ est injective $\Leftrightarrow$ $(\forall x_1, x_2 \in E,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$.
- $f$ est injective $\Leftrightarrow$
  $(\forall x_1, x_2 \in E,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$.
- $f$ est injective $\Leftrightarrow$ ($\forall y \in F$, l'équation
  $y = f(x)$ possède au plus une solution $x \in E$)

## *Exemple*

Soit

$$f : \begin{array}{c} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) = 3x + 5 \end{array}$$

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcl} f(x_1) & = & f(x_2) \Rightarrow 3x_1 + 5 = 3x_2 + 5 \\ f(x_1) & = & f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \end{array}.$$

En conclusion $f$ est injective.

## *Définition : Application bijective*

On dira que $f$ est une ***application bijective*** si et seulement si elle est *« injective et surjective à la fois »*.

En d'autres termes $f$ est une application bijective ssi tout élément $y$ de $F$ ***possède un et un seul antécédent*** $x$ dans $E$

- $f$ est bijective $\Leftrightarrow$ ($\forall y \in F$, l'équation $y = f(x)$ possède une et une seule solution $x \in E$)
- $f$ est bijective $\Leftrightarrow$ $(\forall y \in F, \exists! x \in E : y = f(x))$.

## *Exemple*

Soit

$$f : \begin{array}{c} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) = 3x + 5 \end{array}.$$

Comme on l'a déjà vu, l'application $f$ est injective et surjective, elle est donc bijective.

### Remarque

Une application bijective d'un ensemble $E$ dans lui même est appelée ***permutation***.

## 4. Application composé

### Définition

Soient $A, B$ et $C$ trois ensembles donnés, et soient $f$ et $g$ deux

applications telles que

$f: \begin{array}{l} A \longrightarrow B \\ x \longmapsto f(x) \end{array}$ et $g: \begin{array}{l} B \longrightarrow C \\ x \longmapsto g(x) \end{array}$.

On définit alors l'application composée de $f$ et $g$ notée$(g \circ f)$

***à lire*** $g$ ***rond*** $f$ par

$$(g \circ f): \begin{array}{l} A \longrightarrow C \\ x \longmapsto (g \circ f)(x) = g(f(x)) \end{array}$$

### Remarque

1. L'application $(g \circ f)$ n'est définie que si l'ensemble d'arrivée de $f$ est égal à l'ensemble de départ de $g$.
2. L'application $(g \circ f)$ peut être définie sans pour autant que l'application$(f \circ g)$ le soit.
3. Même quand les deux applications $(g \circ f)$ et $(f \circ g)$ existent, en général $(g \circ f) \neq (f \circ g)$, en d'autres termes $\circ$ n'est pas commutatif.

### Exemple

Soients

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) = 3x + 5 \end{array}$$

et

$$g: \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto g(x) = -2x + 3 \end{array}$$

alors

$$\begin{array}{rcl} (g \circ f)(x) & = & g(f(x)) \\ & = & -2f(x) + 3 \\ & = & -2(3x + 5) + 3 \\ & = & -6x + -7 \end{array}$$

# 5. Application réciproque

## *Définition : Application réciproque (Inverse)*

Soit

$$f : \begin{array}{l} A \longrightarrow B \\ x \longmapsto y = f(x) \end{array},$$

une application bijective.

On définit l'application réciproque notée $f^{-1}$ par

$$f^{-1} : \begin{array}{l} B \longrightarrow A \\ y \longmapsto x = f^{-1}(y) \end{array}$$

## *Attention*

Il est très important de faire la différence entre $f^{-1}(y)$ et $[f(y)]^{-1} = \dfrac{1}{f(y)}$. Pour éviter cette confusion nous allons privilégier l'appellation réciproque à celle d'inverse, du moins dans un premier temps.

## *Exemple*

Soit l'application

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) = 3x + 5 \end{array},$$

nous avons déjà montré plus haut que $f$ est bijective, elle admet donc

une application réciproque $f^{-1}$ pour trouver l'expression de $f^{-1}(x)$ on procède comme suit

$$y = f(x) = 3x + 5 \Rightarrow x = \frac{y-5}{3}$$

en en déduit donc que $f^{-1}(y) = \dfrac{y-5}{3}$, la varaiable $y$ étant une variable muette on peut donc écrire

$$f^{-1} : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f^{-1}(x) = \dfrac{x-5}{3} \end{array}.$$

Il faut observer que que $\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = x$ et $\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x$.

## *Remarque*

Soit $f : A \longrightarrow B$ une application bijective, alors $f^{-1} : B \longrightarrow A$, et on a $f \circ f^{-1} = I_B$ et $f^{-1} \circ f = I_A$

- ***Proposition :***

  Soit $f : A \longrightarrow B$ une application donnée, et soit $g : B \longrightarrow A$ une deuxième application, si l'on a

$f \circ g = I_B$ et $g \circ f = I_A$ alors $f$ et $g$ sont bijectives, et de plus $g = f^{-1}$ et $g^{-1} = f$.7

- ***Corollaire :***

Soit $f : A \longrightarrow B$ une application bijective, alors $f^{-1} : B \longrightarrow A$, est aussi une application bijective et $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

*Remarque*

Si $f$ et $g$ sont bijectives, alors l'application $(g \circ f)$ est bijective, et de plus $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

# 6. Image directe et image réciproque

*Définition : Image direct*

Soit $\begin{array}{rl} f : & E \longrightarrow F \\ & x \longmapsto f(x) \end{array}$, une application donnée, et soient $A \subset E$ et $B \subset F$.

On définit l'ensemble $f(A)$ par

$f(A) = \{y \in F,\ \exists x \in A \text{ tel que } y = f(x)\}$

$f(A)$ ainsi définie s'appelle ***image directe de l'ensemble*** $A$ ***par*** $f$.

On fera remarquer au lecteur que $f(A) \subset F$.

*Définition : Image réciproque*

On définit l'ensemble $f^{-1}(B)$ par

$f^{-1}(B) = \{x \in E;\ f(x) \in B\}$

$f^{-1}(B)$ ainsi définie s'appelle ***image réciproque de l'ensemble*** $B$ ***par*** $f$.

On fera remarquer au lecteur que $f^{-1}(B) \subset E$. Il est aussi à noter que $f$ n'est pas nécessairement bijective $f^{-1}(B)$ est une simple notation qui désigne un ensemble.