Chapitre 1

Rappel d'analyse vectoriel

Ce chapitre présente l'essentiel des notions mathématiques portant sur les opérateurs vectoriels et tensoriels et la notation indicielle, qui est largement utilisée dans le cours de Mécanique des Fluides.

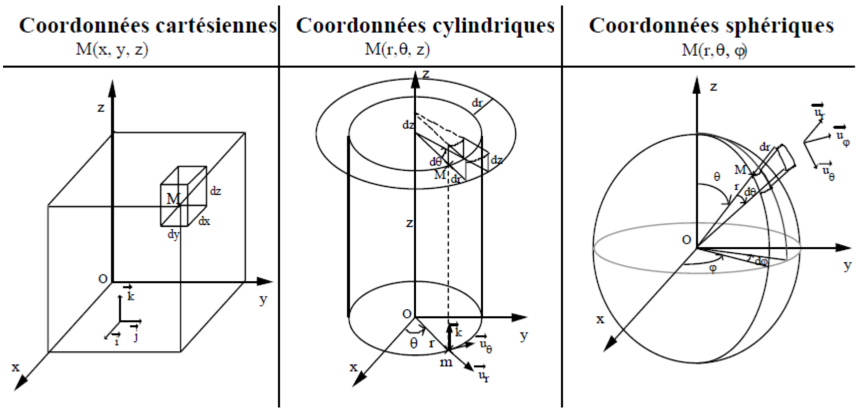
1.1 Les systèmes de coordonnées courants

Pour repérer la position d'un point M dans l'espace à trois dimensions, il est nécessaire d'introduire trois axes non coplanaires. Le repérage peut alors être réalisé par l'introduction de (voir figure ci-dessous) :

- trois distances : coordonnées cartésiennes,

- deux distances et un angle : coordonnées cylindriques,

- une distance et deux angles : coordonnées sphériques.



1.2 Champs scalaire et vectoriel

Un champ est un outil physique qui donne, pour un point de l'espace, une valeur d'une grandeur physique. Autrement dit, le champ établit une correspondance entre une position de l'espace et une valeur prise par la grandeur physique étudiée.

Pour commencer, nous allons définir un champ scalaire ou vectoriel à partir de notions que tout étudiant connait. Soit un trièdre orthonormé ($\overrightarrow{e}_x$, $\overrightarrow{e}_y$, $\overrightarrow{e}_z$) et M un point de l'espace, de coordonnées (x, y, z) ; d'où le vecteur position de M s'écrit : $\overrightarrow{OM} = X\overrightarrow{e}_x + Y\overrightarrow{e}_y + Z\overrightarrow{e}_z$

1.2.1 Champ scalaire :

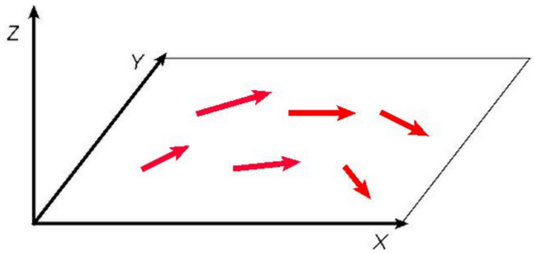
Un champ scalaire donne la valeur d'une grandeur physique scalaire en fonction de la position, pour un temps donné. exemple de : température, densité, pression...etc. La fonction f(M) est dite fonction scalaire de point M ou champ scalaire si :$f(M) = f(x, y, z)$.

On parle de champ scalaire lorsque la grandeur physique est un nombre (réel). La température et la pression d'une zone sont décrits par des champs scalaires. Il existe différentes manières de représenter un champ scalaire selon son application : coloriage de contours, équipotentielles, graphe 3D...

1.2.2 Champ vectoriel :

Pour un moment donné, un champ vectoriel, ou champ de vecteurs, donne la valeur d'une grandeur vectorielle en fonction de la position M. Autrement dit, chaque point de l'espace est mis en correspondance avec un vecteur. Comme pour les champs scalaires, un champ vectoriel peut être étudié dans un espace 2D, ou 3D et dans le temps. Par exemples, le champ de la pesanteur, le champ magnétique, en mécanique des fluides le mouvement de gaz ou de liquides est étudié en utilisant des champs de vitesse.

Le vecteur vitesse $\overrightarrow{V}(M)$ est dit fonction vectorielle de point M ou champ vectoriel si : $\overrightarrow{V}(M) = \overrightarrow{u}(x, y, z)\overrightarrow{e}_x + \overrightarrow{v}(x, y, z)\overrightarrow{e}_y + \overrightarrow{w}(x, y, z)\overrightarrow{e}_z$.



Un champ vectoriel établit un lien entre une position de l'espace est une grandeur physique vectorielle. Les champs de vitesse en sont un exemple. Le champ de pesanteur est un champ vectoriel uniforme localement. Les champs électriques et magnétiques sont d'autres exemples de champ vectoriels.

1.3 Comment utiliser Nabla ?

On l'appelle Nabla ou aussi l'opérateur d'Hamilton chez les mathématiciens, les opérateurs mathématiques (Gradient, Divergence et rôtationnel) peuvent être appliqués mathématiquement et utilisés sur des champs scalaires et vectoriels à travers l'opérateur différentiel Nabla, pour retrouver : le Gradient, la divergence, le rôtationnel, Laplacien scalaire et Laplacien vectoriel.

Pour présenter le concept très utile de l'opérateur Nabla, il faut insister de connaitre le principe du champ scalaire et champ vectoriel (définis précédemment), pour ne plus confondre entre les deux notions intuitives.

— Champ scalaire : soit une fonction φ, en coordonnées cartésiennes son champ scalaire est définie par : $\begin{cases} \varphi : R^3 \longrightarrow R \\ M(x,y,z) \longrightarrow \varphi(x,y,z) = \varphi(M) \end{cases}$

exemples : température, pression ; énergie potentiel...etc.

— Champ vectoriel : soit un vecteur $\overrightarrow{A}(M)$, mathématiquement on défini le champ vectoriel de ce vecteur par : $\begin{cases} \overrightarrow{A} : R^3 \longrightarrow R^3 \\ \overrightarrow{r}(x,y,z) \longrightarrow \overrightarrow{A}(\overrightarrow{r}) = \begin{cases} A_x(x_1,y_1,z_1) \\ A_y(x_2,y_2,z_2) \\ A_z(x_3,y_3,z_3) \end{cases} \end{cases}$

c'est dans le cas d'un état stationnaire ; c'est à dire, qui ne dépend pas de t (temps).

exemples : champ des vitesses, champ des forces, champ magnétique, champ électrique ...etc.

Donc, pour trouver les notions de gradient, divergence et rôtationnel, on va utiliser l'opérateur différentiel Nabla. C'est le symbole triangle tète en bas avec flèche « ∇ », on le note formellement dans le système de coordonnées cartésiennes par :

$$\vec{\nabla} = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{cases}$$

Remarque : Il est alors évident que pour avoir les composantes de cet opérateur dans les différents systèmes de coordonnées, il suffit de reprendre celles du gradient (ci-après) et d'enlever la fonction φ .

1.4 La signification du Gradient

— **Le gradient :** $\overrightarrow{grad}$ est une quantité vectoriel et est appliqué seulement pour un scalaire et non pas sur un vecteur. on dit le gradient d'un champ scalaire.

pour trouver le gradient d'une fonction φ, on écrit : $\overrightarrow{grad}\varphi = \vec{\nabla}\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{pmatrix}$; comme un produit scalaire entre Nabla et la fonction scalaire φ.

Il faut noté ! Le gradient donne donc des informations sur la direction, sur le sens de la variation de la fonction f mais aussi sur l'importance de cette évolution.

1.5 La signification de la divergence

— **La divergence :** $div\vec{A}$ est une quantité scalaire et elle même appliquée à un vecteur $\vec{A}$, on écrit : $div\vec{A} = \vec{\nabla} \bullet \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial A_z}{\partial x}$; comme un produit scalaire entre Nabla et le vecteur $\vec{A}$.

L'expression de la divergence dans les différents systèmes de coordonnées est présentée dans la suite :

Coordonnées cartésiennes : $div\,\overrightarrow{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial A_z}{\partial x}$

Coordonnées cylindriques :$div\,\overrightarrow{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial A_z}{\partial x}$

Coordonnées sphériques :$div\,\overrightarrow{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2A_r\right)}{\partial r} + \frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial(sin\theta A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$

Remarque : en coordonnées cartésiennes, il faut utiliser $\overrightarrow{\nabla}$. Avec les coordonnées sphériques, compte tenu des multiples implications de $\overrightarrow{\nabla}$ sur la base, il sera préférable d'utiliser le théorème d'Ostrogradski-Green (voir section 3.3). Dans le cas des coordonnées cylindriques, les deux possibilités sont à peu près équivalentes.

1.6 La signification du rôtationnel

— **Le rôtationnel :** est une quantité vectoriel et est appliqué sur un vecteur $\overrightarrow{A}$ (très utile en mécanique des fluides et électromagnétisme), on écrit : $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{A} = \overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ -\frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial z} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}$

— Coordonnées cartésiennes :$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}$

— Coordonnées cylindriques :$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r}\left(\frac{\partial A_z}{\partial\theta} - \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial z}\right) \\ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right) \end{pmatrix}$

— Coordonnées sphériques :$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{rsin\theta}\left(\frac{\partial(sin\theta A_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right) \\ \frac{1}{r}\left(\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right) \\ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right) \end{pmatrix}$

Remarque : une remarque fondamentale consiste à dire que le caractère rotationnel n'est pas lié à la courbure des lignes de champ. Il ne suffit pas que ces lignes de champ soient rectilignes pour que l'écoulement soit irrotationnel bien au contraire ! Cet opérateur nous donne donc des informations sur le caractère localement tourbillonnaire du champ vectoriel.

1.7 La signification du Laplacien

— **Le Laplacien :** il faut faire attention ! Il y a le **Laplacien scalaire** et le **Laplacien vectoriel**. il est noté par le symbole triangle tête en haut « $\triangle$ ».

1. **Le Laplacien scalaire :** Le Laplacien d'une fonction scalaire φ est : $\triangle\varphi = div(\overrightarrow{grad}\varphi) = div \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) =$ $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \Longrightarrow \triangle\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \vec{\nabla} \bullet \left(\vec{\nabla}\varphi\right) = \vec{\nabla}^2\varphi = \triangle\varphi$

2. **Le Laplacien vectoriel :** Le Laplacien d'un champ vectoriel (vecteur $\vec{A}$) est : $\vec{\triangle}\vec{A} = \begin{pmatrix} \triangle A_x \\ \triangle A_y \\ \triangle A_z \end{pmatrix}$, à noter que $A_x, A_y et A_z$ ce sont des champs scalaires. il est bien appliqué en mécanique des fluides dans le cas des calculs des équations de Navier-Stokes.

donc, on écrit : $\begin{cases} \triangle A_x = div(\overrightarrow{grad}A_x) = \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \triangle A_y = div(\overrightarrow{grad}A_y) = \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \triangle A_z = div(\overrightarrow{grad}A_z) = \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{cases}$

on obtient à la fin le Laplacien d'un vecteur $\vec{A}$, qui s'écrit sous cette forme de vecteur :

$$\vec{\triangle}\vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

Remarque : la majorité des étudiants se trompent dans l'écriture du Laplacien de vecteur $\vec{A}$, ou il mette :$\vec{\triangle}\vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{pmatrix}$; qui est évidemment faut !

Remarque très importante : il faut bien noter qu'on ne peut pas utiliser un pseudo opérateur Nabla "∇" en coordonnées cylindriques, cylindropolaires ou sphériques. Attention ! Ça ne marche pas et ça ne fonctionne que en coordonnées cartésiennes, car c'est le seule systèmes de coordonnées avec lequel on peut trouver ces opérateurs sus-cités.

1.8 Quelques relations importantes

— $div\left(\overrightarrow{rotA}\right) = 0$: ceci est évident en écrivant cette relation avec l'opérateur nabla : $div\left(\overrightarrow{rotA}\right) = \vec{\nabla} \bullet \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{A}\right)$=0. Cette égalité implique que si la divergence d'un champ vectoriel $\vec{B}$ est égale à 0, nous pourrons mettre $\vec{B}$ sous la forme $\vec{B} = \overrightarrow{rotA}$.

— $\overrightarrow{rot(\overrightarrow{grad}f)} = \vec{0}$: en utilisant l'opérateur nabla, cette égalité est elle aussi évidente : $\overrightarrow{rot(\overrightarrow{grad}f)} = \vec{\nabla}\Lambda\vec{\nabla}f$. En mécanique des fluides, si le rotationnel du champ des vitesses est nul, on parle d'écoulement irrotationnel et l'on introduit la fonction scalaire potentielle des vitesses φ définie par $\vec{V} = \overrightarrow{grad(-\varphi)}$.

1.9 Applications :

<u>**Exercice 1 :**</u> Soit deux points M et P de coordonnées respectives M(x,y,z) et $P(x_P, y_P, z_P)$.

1. Calculer $\vec{r} = \overrightarrow{PM}$ et $r = \left\|\overrightarrow{PM}\right\|$.

2. Calculer $\vec{\nabla}(\frac{1}{r})$ au voisinage de M.

3. Calculer $\vec{\nabla} \times (\frac{\vec{r}}{r^3})$ au voisinage de M.

4. Calculer $\vec{\nabla} \bullet (\frac{\vec{r}}{r^3})$ au voisinage de M.

<u>**Réponses :**</u>

1. Le vecteur position $\overrightarrow{PM}$: $\vec{r} = (x - x_P)\vec{e}_x + (y - y_P)\vec{e}_y + (z - z_P)\vec{e}_z$

et le module du vecteur position $\overrightarrow{PM}$: $\vec{r} = (x - x_P)\vec{e}_x + (y - y_P)\vec{e}_y + (z - z_P)\vec{e}_z$

2. $\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{(x-x_P)\vec{e}_x+(y-y_P)\vec{e}_y+(z-z_P)\vec{e}_z}{[(x-x_P)^2+(y-y_P)^2+(z-z_P)^2]^{3/2}} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$

3. En tenant compte du résultat précédent et sachant que le rotationnel d'un gradient est nul, on obtient le produit vectoriel :

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = \vec{0}$$

4. Le produit scalaire est :

$$\vec{\nabla} \bullet \left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = 0$$

Exercice 2 :

Soit :$f(x, y) = x^2 + y^3$

1. Calculer la divergence de f : (∇f)
2. Calculer Laplacien de f : $(\triangle f)$