Support de Cours : Mathématiques-2

Présenté par
Dr S. Benzerdjeb

Table Des Matières

Préface

Ce manuscrit est destiné aux étudiants de la première année tronc commun préparant une licence en sciences commerciales, économiques et gestion. Il est composé de trois chapitres couvrant l'ensemble du programme du module de Mathématique 2.

Le premier chapitre traite la résolution des équations différentielle du 1 er ordre et du 2^{nd} ordre.

Le second chapitre explique les concepts fondamentaux et avancés liés aux matrices, il vise aussi à fournir aux lecteurs une compréhension approfondie des opérations sur les matrices, des propriétés des matrices. Il présente également des notions essentielles telles que : le calcul du déterminant et l'inverse d'une matrice carrée.

Enfin, dans le dernier chapitre on décrit les systèmes d'équations linéaires de cramer et on présente les différentes méthodes de résolutions. De plus, les systèmes qui ne sont pas de cramer seront traités aussi dans cette partie.

Étant conscient que notre travail peut toujours être amélioré, nous encourageons vivement les lecteurs à nous faire part de leurs remarques ou suggestions pour enrichir notre document.

Chapitre 01 :

Equations Différentielles

I. Equations Différentielles du 1^er Ordre -1-

Définition 01: une Equation Différentielle Ordinaire (E.D.O) , d'ordre n est une équation dont l'inconnu est une fonction$y(t)$. Elle est de la forme
$F\left(t, y, y', y'', \ldots \quad , y^{(n)}\right) = 0$, Avec :

- F: Est une fonction continue.
- y : est la fonction inconnue de la variable t (à chercher).
- t : est la variable réelle (en physique, représente le temps)
- n : est l'ordre le plus élevé de la dérivée de y qui est aussi l'ordre de l'EDO.

Définition 02 :une équation différentielle, d'ordre 1 est de la forme :

$$y' = F(t, y) \qquad \ldots . (1)$$

Remarque :Pour trouver la solution d'une EDO, il faut cherche rune fonction $y(t)$qui vérifie cette EDO et ceci selon chaque type .et c'est l'intégration qui permet de le faire.

1. Equation à Variables Séparables :

Définition 03 :L'EDO (1) est dite à variables séparées sielle est de la forme :

$$f(y)dy = g(t)dt$$

Oùf et $g$sont deux fonctions (continues) réelles de la variable réelle.

Méthode de résolution : Pour trouver la solution depuis la forme (1), il faut suivre les étapes suivantes :

1. **Utiliser la relation$y' = \frac{dy}{dt}$.**
2. **Séparer les y de la variable t** : mettre les y dans un coté et ce qui dépend de t dans l'autre coté
3. **Intégrer les deux membres de l'équation.** (Par rapport a t et a y).

Exemple : Résoudre l'EDO suivante :

$$\boldsymbol{y^2 - (1 + 3t)y' = 0} \qquad \ldots \ldots (\boldsymbol{E})$$

- **D'après la relation$y' = \frac{dy}{dt}$.** , on trouve :

$$y^2 - (1 + 3t)y' = 0 \;\Leftrightarrow\; y^2 - (1 + 3t)\frac{dy}{dt} = 0$$

- **Pour commencer on sépare les variables, on a**

$$y^2 - (1+3t)y' = 0 \quad \Leftrightarrow y^2 = (1+3t)\frac{d\boldsymbol{y}}{dt}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{(1+3t)} = \frac{1}{y^2}y'$$
$$\Leftrightarrow \frac{1.dt}{(1+3t)} = \frac{1}{y^2}dy$$

- **Passage à l'intégrale ;**

$$\int \frac{1.dt}{(1+3t)} = \int \frac{1}{y^2}dy \quad \Leftrightarrow \frac{1}{3}\,ln|1+3t| + c = -\frac{1}{y}$$

Ce qui donne

$$\boldsymbol{y} = -\frac{\mathbf{1}}{\frac{1}{3}ln|1+3t| + c}$$

2. *Equation Différentielle Homogène :*

<u>Définition 04 :</u> une équation différentielle homogène est de la forme : $y' = f\left(\frac{y}{t}\right) \ldots..(2)$

<u>Méthode de résolution :</u>

1. Considérer l'équation différentielle $y' = f\left(\frac{y}{t}\right)$,
2. Poser le changement de variable $\boldsymbol{u(t)} = \frac{\boldsymbol{y(t)}}{\boldsymbol{t}} \quad \Rightarrow \quad y(t) = t.u(t)$

   La dérivée est$\boldsymbol{y' = t.u'(t) + u(t)}$
3. Remplacer la valeur de u et de y'dans l'équation (2).
4. Utiliser la méthode a variables séparables pour résoudre l'équation obtenue.
5. Trouver la solution finale $y(t)$.

<u>Exemple</u> : Résoudre l'EDO suivante :

$$ty' + y = t$$

Solution :on a :

$$ty' + y = t$$

1. **Pour écrire $(\boldsymbol{E})$ sous la forme$\boldsymbol{y' = f\left(\frac{y}{t}\right)}$**, on doit diviser tout par t

$$ty' + y = t \quad \Leftrightarrow \quad \frac{t.y'}{t} + \frac{y}{t} = \frac{t}{t}$$
$$\Rightarrow \quad y' = 1 - \frac{y}{t} \ldots \ (\boldsymbol{E})$$

2. Posons le changement de variable

$$u(t) = \frac{y(t)}{t} \quad \Rightarrow \quad y(t) = t.u(t)$$

La dérivée est $y' = t.u'(t) + u(t)$

3. On remplace u et de y' dans (E) : $y' = 1 - \frac{y}{t}$

On trouve

$$t.u'(t) + u(t) = 1 - u$$

$$\Rightarrow \quad t.u'(t) = 1 - 2u$$

4. Par la méthode a variables séparables , on résout l'équation: $t.u'(t) = \frac{1}{2} - 2u$

- On remarque que $u'(t) = \frac{du}{dt}$, donc ,

$$t.u'(t) = 1 - 2u \qquad \Leftrightarrow \ t.\frac{du}{dt}. = \ 1 - 2u$$

$$\Leftrightarrow \frac{du}{1-2u}. = \frac{dt}{t}$$

- Par intégration, on obtient :

$$\int \frac{du}{1-2u}. = \int \frac{dt}{t}$$

$$\frac{-1}{2} ln|1-2u| = ln|t| + c_1$$

Donc,

$$ln|1-2u| = -2ln|t| + c \qquad \Leftrightarrow \qquad e^{ln|1-2u|} = e^{-2ln|t|+c}$$

$$\Leftrightarrow \quad |1-2u| = e^{-ln|t|^2}.e^c$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - 2u = \pm e^{ln\frac{1}{t^2}}.e^c$$

$$\Leftrightarrow u = \frac{-1}{2}\left(\pm\frac{1}{t^2}.e^c - 1\right)$$

Alors la solution est

$$u(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{k}{t^2} + 1\right) \qquad avec\ k = \mp e^c$$

5. Pour trouver $y(t)$, il suffit juste de remplacer la valeur de u dans la solution, tel que ,

$$u(t) = \frac{y(t)}{t} = \frac{1}{2}\left(\frac{k}{t^2} + 1\right)$$

La solution finale est :

$$y(t) = \frac{t}{2}\left(\frac{k}{t^2} + 1\right) = \frac{k}{2t} + \frac{t}{2}, \qquad k \in \mathbb{R}$$

II. Equations Différentielles du 2er Ordre

Définition : Une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

$$a.y'' + by' + c.y = f(t) \qquad \text{(E)}$$

Où: $a, b\ et\ c$ sont des constantes réelles avec $a \neq 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$.

Et $f(t)$ est le second membre

- Si $f(t) = 0$, alors (E) devient une équation sans second membre (ESSM) appelée ***équation homogène :*** $a.y'' + by' + c.y = 0 \qquad (\mathrm{E}_h)$

Méthode de résolution :

La solution générale y de (E) est la somme de la solution homogène y_h de (E_h) et d'une solution particulière (y_p) de (E): telle que $\boldsymbol{y = y_h + y_p}$

1. Chercher les solutions y_h de l'équation homogène :

$$a.y'' + by' + c.y = 0$$

a) Ecrire l'équation caractéristique : $a.r^2 + b.r + c = 0.$

b) Trouver r selon le signe de $\Delta = b^2 - 4ac$: $ici\ a = 1$

signe de Δ	**Les racines r**	**La solution y_h**
$\Delta > 0$	2 racines réelles $r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	$\boldsymbol{y_h} = C_1 e^{r_1.t} + C_2 e^{r_2.t}$
$\Delta = 0$	$r_0 = \frac{-b}{2a}$	$\boldsymbol{y_h} = (C_1 t + C_2) e^{r_0.t}$

2. Chercher la solution particulière y_p de (E) :

On détermine la solution particulière y_p de (E1). suivant la forme du second membre $f(t)$,et en utilisant une méthode d'identification des coefficients , Le tableau suivant montre comment choisir la forme de

Forme du second membre f(t) est	Solution particulière y_p est
$\boldsymbol{f(t) = P(t)e^{\alpha t}}$ $avec$ $P(t)$ est ici un polynôme de degré n, α est un réel. E**t m n'est pas une racine**	$\boldsymbol{y_p = Q(t)e^{\alpha t}}$ $Q(t)$ est un polynôme $deg(Q) = n$
$\boldsymbol{f(t) = P(t)e^{\alpha t}}$ $avec$ $P(t)$ est ici un polynôme de degré 2, α est un réel et **m est une racine simple**	$\boldsymbol{y_p = Q(t).t.e^{\alpha t}}$
$\boldsymbol{f(t) = P(t)e^{\alpha t}}$ $avec$ $P(t)$ est ici un polynôme de degré 2, α est un réel et **m est une racine double**	$\boldsymbol{y_p = Q(t).t^2.e^{\alpha t}}$
$\boldsymbol{f(t) = \left(P_1(t).cos(\gamma t) + P_2(t).sin(\delta t)\right).e^{mt}}$ **Si $\alpha + i\beta$ n'est pas solution de l'équation caractéristique**	$\boldsymbol{y_p = \left(Q_1(t).cos(\gamma t) + Q_2(t).sin(\gamma t)\right)e^{\alpha t}}$ $\deg(Q_1) = \deg(Q_2) = \max(n_1, n_2)$.

3. Donne la solution finale $y(t) = y_h + y_p$.

Exemple : Résoudre $y'' + 2y' = 2e^{-2x}$

Solution :

Solution générale de l'ESSM

(E_0) $y'' + 2y' = 0$

E.C. : $r^2 + 2r = r(r+2) = 0$ $\Delta = 4$

racines : $r_1 = 0$ et $r_2 = -2$

Solution : $y_H = K_1 + K_2e^{-2x}$ avec K_1 et $K_2 \in \mathbb{R}^2$

Solution particulière de l'EASM

(E) $y'' + 2y' = 2e^{-2x}$

Puisque $\alpha = -2$ *est une des racines de E.C.*, cherchons y_p sous la forme :
$y_p = kxe^{-2x}$ $(k \in \mathbb{R})$

d'où $y_p' = ke^{-2x} - 2kxe^{-2x}$ et $y_p'' = -4ke^{-2x} + 4kxe^{-2x}$

Portons ces expressions dans (E)

$y_p" + 2y'_p = -4ke^{-2x} + 4kxe^{-2x} + 2ke^{-2x} - 4kxe^{-2x} = -2ke^{-2x} = 2e^{-2x}$

Par identification : $-2k = 2 \Rightarrow k = -1$

Ainsi, $y_p = -xe^{-2x}$

Solution générale

La solution générale y de l'équation (E) sera :

$$\begin{aligned} y &= y_H + y_p \\ &= K_1 + K_2e^{-2x} - xe^{-2x} \end{aligned} \; K_1 \text{ et } K_2 \in \mathbb{R}^2$$

Chapitre 02 :

Les Matrices

Les matrices jouent un rôle fondamental en économie, en fait elles servent à représenter les liens entre différentes variables économiques comme la production ou la consommation, elle sont utilisées dans plusieurs domaines comme l'analyse des échanges entre secteurs, la gestion des stocks ou pour résoudre des équations économiques. Les matrices aident à comprendre et analyser les systèmes économiques de manière efficace.

I. Définitions :

Une **matrice** est un tableau de n lignes et p colonnes. Il représente des données qui sont des nombres réels (appelés coefficients ou termes).

On note très souvent les matrices par des majuscules : A, B, C, M, …., Et leurs coefficients par des minuscules.

On désigne par a_{ij} le coefficient de la matrice A, situé à la i-ième ligne et à la j-ième colonne. La matrice A s'écrira :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

On parle très souvent de la dimension d'une matrice, (la taille, l'ordre ou bien le format) elle est notée par

$$\dim(.) = (nombre\ de\ lignes, \quad nombre\ de\ colonnes\ )$$

$$= nombre\ de\ lignes\ \times\ nombre\ de\ colonnes$$

Exemples :

- La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ $est\ de\ dimension\ 2 \times 3$
- Le format de la matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $est \quad \dim(B) = (3{,}3)$

- $la\ taille\ de\ la\ matrice\ C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\ est\ \dim(C) = 3 \times 2$

***Définition** 02 :*

- Une **matrice nulle** est une matrice dont tous ses coefficients sont des zéros.
- Une **matrice carrée** est une matrice dont le nombre de lignes est égal au nombre de colonnes.
- Une **matrice ligne** est une matrice dont le nombre de lignes est égal à 1. Elle est aussi appelée « vecteur ligne »
- Une **matrice colonne** est une matrice dont le nombre de colonnes est égal à 1.

Exemples :

- $A = (4 \quad -2 \quad 0)\ est\ une\ matrice\ ligne.$
- $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\ est\ une\ matrice\ carrée$ de dimension 3×3,

  pour simplifier, on peut dire matrice carrée, d' ordre 3.
- $C = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\ est\ une\ matrice\ colonne.$

***Définition** 03 :*

On appelle **diagonale principale d'une matrice**, la diagonale qui relie le coin qui se trouve en haut à gauche au coin situé en bas à droite. Autrement dit, les éléments diagonaux ont le même numéro de ligne et colonne c-à-d : a_{11} , a_{22}, a_{33}, ...

Exemple :

Pour la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & -5 \\ 7 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 8 & 2 & 0 \\ -1 & 6 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

Les éléments de la diagonale principale de A sont : $a_{11} = 1$, $a_{22} = 3$, $a_{33} = 2$, $a_{44} = -8$.

Définition 03 :

Une **matrice diagonale** est une matrice carrée où tous les coefficients non diagonaux (qui ne se trouvent pas sur la diagonale) sont nuls.

Exemple :

Les matrices suivantes $A, B\ et\ M$ sont diagonales, cependant la matrice C n'est pas diagonale

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad et \qquad M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Définition 04 :

Une **matrice triangulaire supérieure** est une matrice carrée où tous les coefficients sous la diagonale sont nuls.

Exemple :

Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 9 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

On remarque que A est une matrice triangulaire supérieure cependant B ne l'est pas, car il existe un coefficient au-dessous de la diagonale qui n'est pas nul, il s'agit de $a_{31} = 9 \neq 0$

Définition 05 :

Une **matrice triangulaire inferieure** est une matrice carrée où tous les coefficients au-dessus la diagonale sont nuls.

Exemple :

Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 7 & 6 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 4 \\ 9 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

On remarque que A est une matrice triangulaire inférieure en revanche C ne l'est pas, car il existe un coefficient au-dessus de la diagonale qui n'est pas nul, il s'agit de $a_{23} = 4 \neq 0$.

Définition 06 :

Une **matrice identité** est une matrice diagonale où tous les éléments diagonaux sont tous nuls. Notée par I_n, avec n est l'ordre de la matrice

Exemple :

Soient les matrices

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

On remarque que :

I_3 est une matrice identité d'ordre 3 (dans $\mathbb{R}^3$).

I_2 est une matrice identité d'ordre 2 (dans $\mathbb{R}^2$).

II. Opérations Sur Les Matrices

On considère les entiers naturels non nuls n_1, n_2, p_1 *et* p_2.

Soient A une matrice de dimension : $n_1 \times p_1$ et B une autre matrice de dimension : $n_2 \times p_2$.

1) L'égalité : (= المساواة)

On dit que deux matrices sont égales si ces deux conditions sont vérifiées :

- Elles ont la même dimension
- Chaque terme $a_{ij} = b_{ij}$ pour tout i, j.

Exercice :

Soient :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad et \;\; B = \begin{pmatrix} a+2 & -2 & 0 \\ 1+d & 4-c & 2 \end{pmatrix}$$

Déterminer les réels a, b et c pour que A et B soient égales.

Solution :

Pour que $A \; et \; B$ soient égales il faut que :

- $dim(A) = (2,3) = dim(B)$
- Les termes vérifient

$$a + 2 = 1 \quad \Rightarrow a = -1$$
$$4 - c = -1 \quad \Rightarrow c = 5$$
$$1 + d = 3 \quad \Rightarrow d = 2$$

2) La transposée

On appelle la transposée de A, la matrice notée par ${}^{t}A$ $(ou\ bien\ A^T)$, obtenue en écrivant les ligne de A comme des colonnes.

Exemple :

La matrice $A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{0} \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ $sa\ matrice\ transposée\ est\ {}^{t}A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 3 \\ \mathbf{4} & -1 \\ \mathbf{0} & 2 \end{pmatrix}$

3) La somme / la difference (+, -) :

Pour pouvoir calculer la somme $A + B$ il faut que la condition suivante soit vérifiée :

$$dim(A) = (2,3) = dim(B).$$

De plus, $A + B$ se calcule en ajoutant les termes de A aux éléments de B situés à la même position.

Exercice :

Soient les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \quad et \quad M = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3 & \frac{1}{2} \\ 2 & 2 \end{pmatrix},$$

Calculer $A + B$ et , $A + M$

Solution :

Puisque $dim(A) = (2,3) = dim(B)$, alors on peut calculer $A + B$, en effet :

$$A + B = \begin{pmatrix} 1-3 & -2+1 & 0+4 \\ 3-2 & -1+1 & 2-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Pour $A + M$, on ne peut pas calculer cette somme car

$$dim(A) = (2,3) \neq dim(B) = (3,2).$$

Par suite la somme $\boldsymbol{A + M}$ n'existe pas.

Remarque :

Dans le cas où on cherche à faire la différence des deux matrice , $A\ et\ B$, on suit le même procédé mais il faut utiliser la soustraction terme à terme.

4) Le Produit (×) الجداء :

Définition 07 (multiplication par un scalaire) :

Soit k un nombre réel (une constante),

Le produit $k.A$ est la matrice calculée en multipliant chaque élément de la matrice A par k.

Exemple : Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

Le produit 3A est donné par :

$$3.A = \begin{pmatrix} 1\times 3 & -2\times 3 & 0\times 3 \\ 3\times 3 & -1\times 3 & 2\times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 9 & -3 & 6 \end{pmatrix},$$

Définition 08 : (produit de deux matrice) :

On considère $m, n\ et\ p$ des entiers.

Soient la matrices A de taille (m, n) et la matrice B de taille (n, p),

Le produit matriciel $A \times B$ est une matrice de dimension (m, p) obtenue en calculant le produit des de A par les colonnes de B .

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m1} & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mj} & & c_{mp} \end{pmatrix} = C\ (dimension\ m \times p)$$

Avec

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{n1}b_{nj}$$

$$= \sum^{n} a_{ik}b_{kj}\ (i = 1,2, \dots, m; j = 1,2, \dots, p)$$

Exemple :

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad et \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$$

On remarque que :

- Puisque car $le\ nombre\ de\ colonne\ de\ A = 3 = au\ nombre\ de\ lignes\ de\ B$, alors on peut calculer le produit matriciel AB

  De plus la taille de la matrice obtenue $AB\ est\ 2 \times 2$ et le calcul donne :

$$AB = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 0 & 14 \end{pmatrix}$$

- On ne peut pas calculer le produit matriciel AC car $le\ nombre\ de\ colonne\ de\ A = 3\ \ parcontre\ le\ nombre\ de\ lignes\ de\ B = 2, donc$:

$$le\ nombre\ de\ colonne\ de\ A \neq\ le\ nombre\ de\ lignes\ de\ B$$

  De ce fait AC n'existe pas.

Remarques :

- Le produit matriciel n'est pas commutatif. Autrement dit, $AB \neq BA$.
- Il n'y a pas de méthode précise pour le calcul de la puissance de la matrice A^n, elle se calcule à partir du produit matriciel tel que

$$A^n = \underbrace{A.A.A \ldots .A}_{n\ fois}$$

  Et ceci ne pourra être réalisé que si la matrice A est carrée.

Propriétés :

- ${}^t(A.B) = {}^tB.\,{}^tA$
- $A.I_n = A$
- $k.A = A.k \qquad avec \qquad k \in \mathbb{R}$.

III. Déterminant d'une matrice carrée :

On considère A une matrice carrée d'ordre n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Définition :

Le déterminant d'une matrice carrée A est un chiffre (une valeur) noté par $det\ (A)$ $ou\ bien\ \ |A|$.

Pour apprendre la méthode du calcul de déterminant, commençons par le cas le plus simple, il s'agit des matrices de taille 2×2 .

1) Déterminant d'une matrice d'ordre 2

Lorsque $n = 2$, la matrice A prends la forme suivante

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Dans ce cas, le déterminant de A est un produit croisé tel que :

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$$

Exemple :

Soient

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \quad et \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$$

Alors, on a

- $det(A) = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = (-3).4 - (-1).2 = -10$
- $det(B) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{vmatrix} = (2).(-6) - (-4).(3) = 0.$

Maintenant, nous allons voir comment calculer le déterminant d'une matrice de dimension supérieure à 2.

2) Déterminant d'une matrice d'ordre n, $(n \geq 3)$

Définition ***: (Mineur d'une matrice) :***

On appelle M_{ij} un mineur de A le déterminant de la matrice obtenue en enlevant la i-ème ligne et la j-ème colonne de A. Il est appelé aussi : $(i,j) - \grave{e}me\ \ mineur\ de\ A$.

Exemple :

Soit la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

- Le mineur M_{12} est le déterminant obtenu en éliminant la 1ère ligne et la 2ème colonne de la matrice A, en effet :

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 8$$

- Le mineur M_{22} est le déterminant obtenu en éliminant la 2ème ligne et la 2ème colonne de la matrice A, c-à-d :

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

- Le mineur M_{13} est le déterminant obtenu en éliminant la 1ère ligne et la 3ème colonne de la matrice A, ce qui veut dire :

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -4.$$

Remarque :

Une matrice possède plusieurs déterminants mineurs, ce qui est constaté dans le suivant exemple.

Définition :

On appelle C_{ij} cofacteur de l'élément a_{ij} la quantité :

$$\boldsymbol{C_{ij} = (-1)^{i+j} . M_{ij}}$$

Le déterminant de A (à la i-ème ligne) est défini à partir de la formule du cofacteur par

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} . C_{ij}$$

Exemple

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

On développe par rapport à la 1ère ligne :

$$\det(A) = 4M_{11} - M_{12} + 2M_{13}$$

Avec

$$M_{11} = 8 \qquad M_{12} = 8 \quad et \quad M_{13} = -4$$

Par suite

$$\det(A) = 4 \times 8 - 8 + 2 \times (-4) = 16$$

Propriétés :

Soient A et B deux matrices d'ordre n, vérifiant :

- $\det(A.B) = \det(A).\det(B)$
- $\det(A^T) = \det(A)$
- $\det(k.A) = k.\det(A)$
- Le déterminant d'une matrice triangulaire ou diagonale est égal au produit des éléments diagonaux.
- Le déterminant d'une matrice contenant une ligne (ou bien une colonne) nulle vaut 0.

IV. L'inverse d'une matrice carrée :

Définition :

Soit A une matrice carrée d'ordre n.

Une matrice A est dite inversible si elle peut être associée à une matrice carrée B d'ordre n de telle sorte que :

$$A \times B = I_n$$

Et

$$B \times A = I_n$$

Avec I_n la matrice identité d'ordre n.
De plus, l'inverse de A est noté par A^{-1} et

$$A^{-1} = B.$$

Remarque :
La notion de matrices inverses ne concerne que les matrices carrées. Et cela signifie que :

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_n$$

Exemple : Soit A une matrice carrée d'ordre 3 qui vérifie :

$$A^3 = 3A - 2I_3$$

Montrons que A est inversible. En effet :

$$A^3 = 3A - 2I_3 \Leftrightarrow A^3 - 3A = -2I_3$$
$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}(A^3 - 3A) = I_3$$

$$\Leftrightarrow A\left[-\frac{1}{2}(A^2-3I_3)\right]=I_3$$

Ainsi on a :

$$\left[-\frac{1}{2}(A^2-3I_3)\right]A=I_3$$

D'où, A est inversible et son inverse est

$$A^{-1}=-\frac{1}{2}(A^2-3I_3)$$

Exemple 02 :

Soient les deux matrices A et B telles que :

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\quad et \quad B=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Puisque,

$$AB=BA=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Alors, A est inversible et

$$A^{-1}=B.$$

Comment Calculer l'inverse d'une matrice d'ordre n ?

On rappelle que le cofacteur de l'élément a_{ij}est noté par C_{ij} tel que :

$$\boldsymbol{C_{ij}=(-1)^{i+j}.M_{ij}}$$

Avec $\boldsymbol{M_{ij}}$ est le déterminant mineur de la matrice A .

Définition :(comatrice) :

On appelle **comatrice** (ou **matrice adjointe**) de A, la matrice carrée d'ordre n, notée et définie par :

$$com(A)=\begin{pmatrix}C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n}\\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn}\end{pmatrix}$$

Remarque :

La comatrice est parfois appelée matrice des cofacteurs de A , et notée $cof(A)$

Proposition : Si le $det\ (A)\neq 0, Alors\ A\ est\ inversible$.

Définition :

L'inverse d'une matrice d'ordre *n* ou de dimension *(n x n)* est donné par la relation :

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}.\ com(A)^t$$

Propriétés

Soient $A, B\ et\ C$ trois matrices d'ordre n inversibles,

- Si la matrice A est inversible, alors la matrice A^{-1} est unique.
- $det(A^{-1})=\frac{1}{\det(A)}$

- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

Application : Soit la matrice A d'ordre 3,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que A est inversible et calculer son inverse A^{-1}.

Chapitre 03 :

Systèmes d'Equations Linéaires

Un système d'équations linéaires est formé par plusieurs équations linéaires qui contiennent impliquant les mêmes variables appelée inconnues

On appelle système de n équations linéaires à p inconnues : $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, le système écrit sous la forme suivante :

$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}.x_2 + a_{13} + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}.x_2 + a_{23} + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{31}x_1 + a_{32}.x_2 + a_{33} + \cdots + a_{1p}x_p = b_n \end{cases}$$

Avec :

- Les a_{ij} sont des nombres (réels) donnés, appelés les coefficients du système.
  (pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$)
- Les b_i sont aussi des réels qui représentent le second membre du système (S) $(pour\ 1 \leq i \leq n)$.
- Les x_j sont les inconnues du système, pour $1 \leq j \leq p$

Résoudre le système (S) revient à trouver les valeurs des x_j vérifiant toutes les équations de ce système

Le système (S) peut être réécrit sous la forme matricielle :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{B}$$

$$A \qquad \times \qquad X \qquad = \qquad B$$

Autrement dit, (S) est équivalent à

$$A\,.X = B$$

Avec $X = (x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_p) est\ l'inconnuà\ determiner$

Remarque :

Si tous les $b_i = 0$, $(pour\ 1 \leq i \leq n), alors$ Le système est dit **homogène**, dans le cas contraire (c-à-d) , il est appelé **non homogène .**

I. Système de Cramer :

Définition :

On dit que (S) est un système de Cramer, s'il vérifie à la fois ces trois conditions :

- **A est une matrice carrée :** c'est-à-dire (s) contient autant d'equation que d'inconnu Autrement dit, le nombre d'inconnu est égale au nombre d'équations.

- **A est inversible :** c-à-d $det(A) \neq 0$

II. Méthodes de résolution

La résolution des systèmes linéaires de cramer se fait par l'une des méthodes suivantes :

- Méthode de la matrice inverse (ou bien Inversion matricielle)
- Méthode de Cramer.
- Méthode de Gausse (Méthode des pivots).

Pour cela, considérons le système suivant qui est non homogène et de Cramer écrit sous sa forme matricielle

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{B}$$

$$A \qquad \times \qquad X \qquad = \qquad B$$

1) Méthode de la matrice inverse.

Elle est appelée aussi méthode **Inversion matricielle.** Il est évident que dans les système de Cramer la matrice A^{-1} existe (car $det(A) \neq 0$), donc pour déterminer le vecteur X , il suffit juste de multiplier les 2 membres du système par la matrice inverse $A^{-1}. En\ effet$:

$$A.\boldsymbol{X} = B \quad \Leftrightarrow \quad A^{-1}.A.\boldsymbol{X} = A^{-1}.B$$

$$\Leftrightarrow \quad I_n.\boldsymbol{X} = A^{-1}.B \qquad\qquad (car \quad A^{-1}.A = I_n \ )$$

$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{X} = A^{-1}.B \qquad\qquad (car \quad I_n.X = X \ )$$

Cela signifie que les valeurs du vecteur inconnu X sont calculées à partir du produit matriciel $A^{-1}.B$.

Exemple :

Soit le système (S_1) :

$$(s_1) \quad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_3 = -1 \end{cases}$$

Pour résoudre (S_1) , il faut d'abord écrire (S_1) sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Il est donc de la forme :

$$A.X = B$$

Avec

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad , \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad et \qquad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Et par suite, la solution $X\ de\ (S_1)$ est donnée par :

$$X = A^{-1}.B.$$

Maintenant, calculons A^{-1} l'inverse de A par la formule :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} .\ com(A)^t$$

On a :

$$det(A) = -1$$

De plus, après calcul, la matrice des cofacteurs de A est donnée par

$$Com(A) = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 4 & -7 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Il en résulte que :

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 3 & -7 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit facilement que

$$X = A^{-1}.B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 \\ -3 & 7 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad X = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2) Méthode de Cramer :

Elle est appelée aussi méthode des déterminants. En effet,

Soit (S), le système matriciel à résoudre

$$A.X = B$$

Et on note par Δ le déterminant de la matrice A, tel que :

$$\Delta = \det(A)$$

Ainsi, Δ_i est le déterminant de la matrice obtenu en remplaçant la ième colonne de la matrice A par le vecteur B (colonne des constantes) .

Donc, l'inconnu $\boldsymbol{x_i}$ est obtenu en calculant le rapport suivant :

$$\boldsymbol{x_i} = \frac{\Delta_i}{\Delta} \qquad pour\ 1 \leq i \leq n$$

Exemple (Application) :

Soit à résoudre le système :

$$A.X = B$$

Avec

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \ , \ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad et \qquad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

le déterminant de ce système est :

$$\Delta = |A| = -1$$

- Calculons la valeur de x, en effet:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} \mathbf{4} & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -5$$

D'où

$$\boldsymbol{x} = \frac{\Delta_x}{\Delta}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{x} = \frac{-5}{\mathbf{-1}}$$

$$\Longrightarrow \quad \boldsymbol{x} = \mathbf{5}$$

- Calculons la valeur de y :

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 7$$

D'où

$$\boldsymbol{y} = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{-1}}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{y = -7}$$

- De même, pour trouver z , on a

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

D'où

$$\boldsymbol{z} = \frac{\Delta_z}{\Delta} = -\frac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{-1}}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{y = 3}$$

Alors, la solution de $(S_1) est$:

$$X = (x, y, z,) = (5, -7, 3).$$

3) Méthode de Gauss :

Etant donné le système matriciel suivant :

$$A.X = B \qquad\qquad (S)$$

La résolution de (S) via la méthode de Gauss consiste à transformer la matrice du système (S) à une matrice triangulaire supérieure toute en utilisant des opérations élémentaires sur les lignes, et résoudre après le nouveau système obtenu par la méthode de la remontée.

Pour y arriver à réussir cette transformation nous avons d'abord besoin de définir le tableau de Gauss, écrit comme suit

$$[A \quad | \quad B]$$

Définition : Opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice :

On appelle opération élémentaire (sur les lignes d'un système linéaire) les opérations suivantes :

- Intervertir deux équations, cela veut dire permuter deux lignes entre eux.
- Multiplication d'une rangé (une ligne) par une constante.
- Remplacer une équation par une combinaison linéaire de deux lignes (ou 2 équations)

Définition : (pivot)
Un pivot est une valeur par laquelle on doit diviser pour résoudre le système linéaire. Et ce sont les éléments diagonaux de la matrice carrée (c'est les éléments $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$). Il est nécessaire que ces pivots doivent être non nuls pour pouvoir déterminer la solution du système .

Remarque : Cette méthode est aussi appelée : méthode des éliminations de Gauss, ou bien méthode des pivot de Gauss.

Exemple (Application) :

Soit à résoudrepar la méthode de Gauss , le système :

$$A.X = B$$

Avec

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad et \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Le tableau de gauss est défini par

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

On note par $L_1, L_2\ et\ L_3$ les lignes définies dans le tableau de gauss.

On note aussi par $L'_1, L_2{}'\ et\ L'_3$ les nouvelles lignes calculées a partir de $L_1, L_2\ et\ L_3$.

Pour transformer le système en un système de triangulaire superieur, il faut d'abord fixer la première ligne L_1 appliquer ces opérations :

$$L'_2 = L_1 + (-3)L_2$$

Et

$$L'_3 = L_1 + (-3)L_3$$

On obtient le nouveau tableau :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -5 & 7 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_1 \\ L'_2 \\ L'_3 \end{array}$$

Pour avoir la matrice triangulaire dans la 1 ere partie du tableau, il se fait d'utiliser cette opération , tout en fixant la ligne L'_2

$$L''_2 = (2)L'_2 + L'_3$$

Ce qui donne :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -9 - & 9 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_1 \\ L'_2 \\ L'_3 \end{array}$$

Le nouveau système obtenu, est

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Le système est réécrit en équations linéaires, en commençant par la dernière ligne et en remontant jusqu'à la première. En effet,

$$\begin{cases} -3z = 9 \\ -y - 4z = 1 \\ 3x + 2y - z = 4 \end{cases}$$

Par substitution, on trouve

$$\begin{cases} z = -3 \\ y = 11 \\ x = -7 \end{cases}$$

I. Systèmes non Cramerien :

On considère (S) un système linéaire à n équations et p inconnus

Le système (S) n'est pas de cramer, si :

1) $\boldsymbol{n > p}$, et dans ce cas le nombre d'équations est supérieur au nombre d'inconnus. Ce type de système est appelé « système debout ou bien surdéterminé »

2) $\boldsymbol{n < p}$, ici nous nous trouvons dans une situation où le nombre d'équations est inférieur au nombre d'inconnues. c -à -d il y a moins d'équations que d'inconnu. Dans ce cas , on dit que le système est sous-déterminé ou parfois allongé

3) Si $\boldsymbol{n = p}$ et $\boldsymbol{det\,(A) = 0}$, cette fois-ci le système est carré mais non inversible.

La résolution des systèmes surdéterminés $(\boldsymbol{n > p})$:

Il suffit juste de suivre ces étapes :

a) Extraire un sous-système à p équations et p inconnus de sorte que le déterminant associé au sous-système soit non nul
b) Résoudre le sous système
c) Vérifier la solution obtenue pour les $n - p$ équations, il se présente 2 cas :
    - Si la solution vérifie toutes les équations, on conclut que le système global admet une unique solution.
    - Si la solution ne vérifie pas toutes les equations, alors il est clair que le système global n' admet aucune solution.

Exemple :

Soit le système

$$(s)\quad \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x - y = 2 \\ 5x - 4y = -2 \end{cases}$$

(s) Contient 3 équations à 2 inconnus, (ici $n = 3\ et\ p = 2$) Pour résoudre (S), on choisit le sous-système (S') à 2 équations :

$$(s')\quad \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$$

La résolution de (S') est très simple et donne $x = \frac{5}{7}\ \ et\ y = \frac{1}{7}$

Pour conclure, il reste à vérifier si cette solution : $x = \frac{5}{7}\ \ et\ y = \frac{1}{7}$ satisfait la dernière équation :(celle qui n'a pas était choisie) ,

$$5x - 4y = -2$$

On a

$$5x - y = 5\left(\frac{5}{7}\right) - 4\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{21}{7} = 3\ \neq -2.$$

On en déduire que la solution obtenue apartir du sous système (S') ne vérifie pas toutes les équations, par suite le système (S) n'a pas de solutions.

La résolution des systèmes sous-déterminés $(n < p)$:

Pour déterminer la solution de ce genre de système, il faut :

Considérer un sous-système qui contient n équations à n inconnus et supposer le reste des inconnus $n - p$ comme des constant .

La solution obtenue montre bien que les systèmes sous-déterminés possèdent une infinité de solutions.

Exemple :

Soit le système

$$(S)\quad \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 3x - y + z = 2 \end{cases}$$

(S) Contient 2 équations à 3 inconnus : $x, y\ et\ z$, (ici $n = 2\ et\ p = 3$) Pour résoudre (S), on choisit le sous-système (S') à 2 équations et 2 inconnus tout en supposant le troisième inconnu comme constant :

Posons

$$z = \alpha \qquad avec\ \alpha \in \mathbb{R}$$

Le sous système de (S) est

$$\begin{cases} x + 2y - \alpha = 1 \\ 3x - y + \alpha = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x + 2y = 1 + \alpha \\ 3x - y = 2 - \alpha \end{cases}$$

Cherchons la valeur de x et y en fonction de α, ce qui donne :

$$x = \frac{5-\alpha}{7} \qquad et \quad y = \frac{4\alpha+1}{7} \qquad avec\ \alpha \in \mathbb{R}$$

D'où, (S) admet une infinité de solutions de la forme :

$$X = (x; y; z) = \left(\frac{5-\alpha}{7}\ ; \quad \frac{4\alpha+1}{7};\ \alpha\right) \qquad avec\ \alpha \in \mathbb{R}$$

Bibliographie

1) K. Sydsæter, P.Hammond (2020), Mathématiques pour l'économie, ed : Pearson.

2) Guy-Patrick Mafouta-Bantsimba (2005), Mathématiques pour l'économie, Méthodes et exercices corrigés, Ed : De Boeck Supérieur.

3) F. Bories-Longuet (2000),Algèbres linéaire- cours et exercices corrigés, Ed : Ellipse.

4) M. Kibler (2022), Éléments d'Analyse et de Calcul Matriciel , Ed : Ellipse.