Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2023/2024
Durée : 01 h 30min
1ère Année LMD-M et MI

Examen de remplacement de CC en Mécanique

EXERCICE 01: 05 Pts

La vitesse limite ϑ d'une bille de rayon r de masse m et de masse volumique ρ, tombant dans un milieu visqueux (un fluide) de masse volumique ρ_f et de coefficient de viscosité معامل الميوعة , est donné par :

$$\vartheta = \frac{2r^2(\rho - \rho_f)}{9\eta} g$$

g est l'accélération de pesanteur.

1. En utilisant les équations aux dimensions, déterminer la dimension de η et en déduire son unité dans le système MKSA.
2. Déterminer l'incertitude relative sur η, en fonction de Δr, $\Delta\rho$, $\Delta\rho_f$ et $\Delta\upsilon$.

EXERCICE 2 : 05 Pts

A. Soient les points A (+1,+1,+1), B (+2,+2,+1) et C (+2,+1,0)

Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. Que représente c'est deux produits. Déduire l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{AB}\ et\ \overrightarrow{AC}$.

B. Définir les coordonnées cylindriques et donner les relations de passage entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées cylindriques.

Ecrire le vecteur position et le vecteur vitesse en coordonnées cylindriques.

EXERCICE 03: 05 Pts

A partir du sol, un ballon monte avec une vitesse initiale v_0 constante (suivant y). Le vent donne au ballon une vitesse horizontale $V_x=\gamma.y$ (γ constante)

a- Déterminer les équations du mouvement $x(t)$ et $y(t)$. En déduire l'équation de la trajectoire $y=f(x)$.

b- Calculer les accélérations a, a_N et a_T. en déduire le rayon de courbure.

Bon courage

Corrigé de l'Examen final de Mécanique

Exercice 1 : (5 pts)

1. On a $\vartheta = \frac{2r^2(\rho-\rho_f)}{9\,\eta}g \Rightarrow \eta = \frac{2r^2(\rho-\rho_f)}{9\,\vartheta}g$

$$\text{Avec} \begin{cases} [v] = LT^{-1} \\ [r] = L \\ [\rho] = [\rho_f] = [\rho - \rho_f] = ML^{-3} \text{(01 pts)} \\ [g] = LT^{-2} \\ [2] = [9] = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow [\eta] = \frac{[2][r]^2[(\rho-\rho_f)]}{[9][\vartheta]}[g]$$

$$\Rightarrow [\eta] = \frac{L^2ML^{-3}LT^{-2}}{LT^{-1}} = ML^{-1}T^{-1} \text{ (0,5 pts)}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{[\eta] = ML^{-1}T^{-1}}$$

Son unité est (**kg/ms**) dans le système MKSA. (0,5 pts)

2. Pour déterminer l'incertitude relative, on utilise :

a- La méthode de la différentielle logarithmique :

$$\eta = \frac{2r^2(\rho-\rho_f)}{9\,\vartheta}g$$

$$\Rightarrow log\,\eta = log\left(\frac{2}{9}\right) + 2logr + log(\rho-\rho_f) + logg - logv \text{(01 pts)}$$

$$\Rightarrow \frac{d\eta}{\eta} = 2\frac{dr}{r} + \frac{d\rho}{(\rho-\rho_f)} + \frac{-d\rho_f}{(\rho-\rho_f)} - \frac{d\vartheta}{\vartheta} \text{ (01 pts)}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\frac{\Delta\eta}{\eta} = 2\frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta\rho}{|\rho-\rho_f|} + \frac{\Delta\rho_f}{|\rho-\rho_f|} + \frac{\Delta\vartheta}{\vartheta}} \text{(01 pts)}$$

b- La méthode de la différentielle totale :

On a $\eta = \frac{2r^2(\rho-\rho_f)}{9\vartheta}g$

$$\Longrightarrow d\eta = \left(\frac{\partial\eta}{\partial r}\right) dr + \left(\frac{\partial\eta}{\partial\rho}\right) d\rho + \left(\frac{\partial\eta}{\partial\rho_f}\right) d\rho_f + \left(\frac{\partial\eta}{\partial v}\right) dv$$

$$\Longrightarrow d\eta = \left(\frac{4r(\rho-\rho_f)}{9v}\right) g dr + \frac{2r^2}{9v} g d\rho - \frac{2r^2}{9v} g d\rho_f - \frac{2r^2(\rho-\rho_f)}{9v^2} g dv$$

$$\Longrightarrow d\eta = \frac{2}{r}\eta dr + \frac{d\rho}{(\rho-\rho_f)}\eta - \frac{d\rho_f}{(\rho-\rho_f)}\eta - \frac{dv}{v}\eta$$

$$\Longrightarrow \frac{d\eta}{\eta} = \frac{2}{r} dr + \frac{d\rho}{(\rho-\rho_f)} - \frac{d\rho_f}{(\rho-\rho_f)} - \frac{dv}{v}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{\frac{\Delta\eta}{\eta} = \frac{2}{r}\Delta r + \frac{\Delta\rho}{|\rho-\rho_f|} + \frac{\Delta\rho}{|\rho-\rho_f|} + \frac{\Delta v}{v}}$$

<u>EXERCICE 2 : 05 Pts</u>

A. Soient les points A (+1,+1,+1), B (+2,+2,+1) et C (+2,+1,0)

Le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-1\\2-1\\1-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \text{(0,25 pts)} et \ \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2-2\\1-2\\0-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix} \text{(0,25 pts)}$$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = 1X0 + 1X(-1) + 0X(-1) = -1 = |\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{BC}|cos\theta$ (0,5 pts)

Le produit vectoriel $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}} \wedge \boldsymbol{\overrightarrow{AC}}$ avec $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2-1\\1-1\\0-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ (0,25 pts)

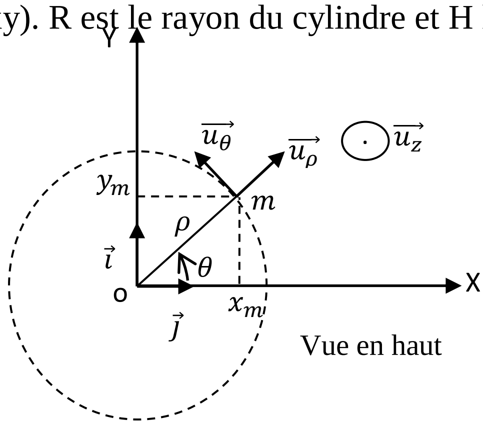
$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\1 & 1 & 0\\1 & 0 & -1\end{vmatrix} = -\vec{\imath} - (-1)\vec{\jmath} - \vec{k} = -\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k} \text{ (0.5 pts)}$$

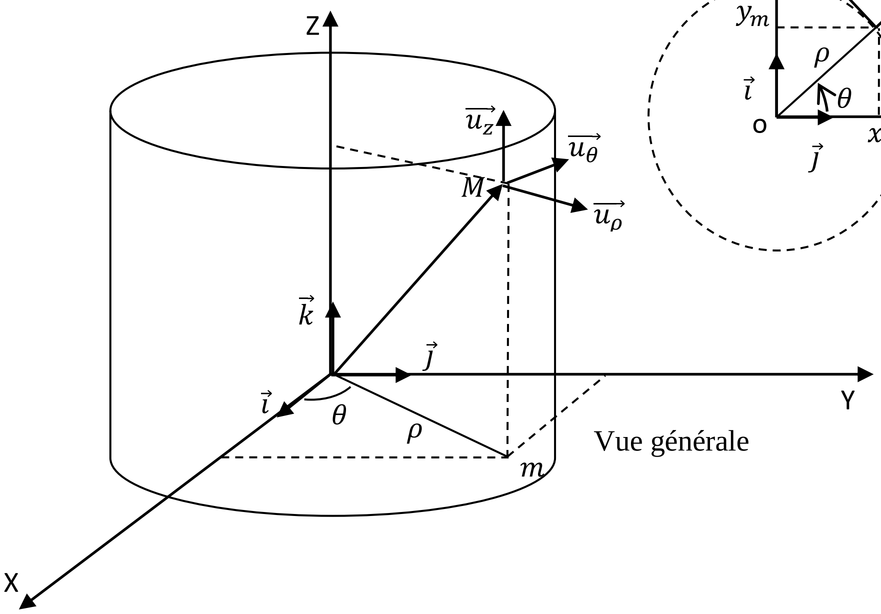
L'angle entre $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ sera ; $cos\theta = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{BC}|} = \frac{-1}{2}$ donc Θ=-π/6 (0,25 pts)

B. Définition des coordonnées cylindriques.

$$\text{Avec}\begin{cases} \rho = \left|\overrightarrow{Om}\right|, \ \ 0 < \ \rho < R \\ \theta = \left((ox), \overrightarrow{Om}\right), 0 < \ \theta < 2\pi \\ z = z_M \ , \ \ 0 < \ z < H \end{cases}$$ **(0.75 Pts)**

Où m est la projection du point M sur le plan (Oxy). R est le rayon du cylindre et H la hauteur du cylindre. **(0.5 Pts)**





Les relations de passage entre les coordonnées cylindriques et les coordonnées cartésiennes (x et y en fonction de ρ et θ et $\vec{u_\rho}$et $\vec{u_\theta}$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$).

$$\begin{cases} x = \rho cos\theta \\ y = \rho sin\theta \\ z = z_M \end{cases}$$ (0.75 pt)

L'expression des vecteurs unitaires $\overrightarrow{U_r}\ et\ \overrightarrow{U_\theta}\ et\ \overrightarrow{U_z}$ en fonction des vecteurs unitaires$\vec{i}\ et\ \vec{j}\ \ et\ \vec{k}$.

$$\boldsymbol{\overrightarrow{OM} = \rho \overrightarrow{U_r} + z\overrightarrow{U_z}}$$ (0,5 pts)

$$\overrightarrow{OM}/cart = x_M\vec{i} + y_M\vec{j} + z\vec{k} = \rho(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}) + \ z\vec{k}$$

Par identification
$$\begin{cases} \overrightarrow{U_r} \ = cos\theta\vec{i} + sin\theta\vec{j} \\ \overrightarrow{U_\theta} = \frac{d\overrightarrow{U_r}}{d\theta} = -sin\theta\vec{i} + cos\theta\vec{j} \\ \overrightarrow{U_z} = \vec{k} \end{cases}$$ (0.75 pt)

Le vecteur vitesse en coordonnées cylindriques :

$$\vec{v} = \frac{\overrightarrow{dr}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{\rho}\overrightarrow{U_r} + \rho\frac{d\overrightarrow{U_r}}{dt} = \dot{\rho}\overrightarrow{U_r} + \rho.\theta'.\overrightarrow{U_\theta}$$ **(0.5 Pts)**

Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

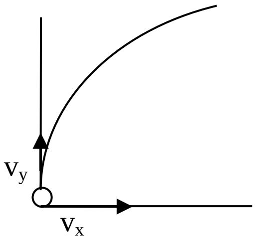
Année Universitaire 2023/2024
Durée : 01 h 30min
1ère Année LMD-M et MI

Exercice 3 :

Un ballon monte avec une vitesse horizontale v_0 ($v_y=v_0$) et le vent lui donne une vitesse horizontale ($v_x=ay$) :

a- Déterminons les équations x(t) et y(t), avec $v_x=a.y$ et $v_y=v_0$

Et on prend à $t=0$; $x=0$ et $y=2$.



Nous avons $v_y=v_0 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = v_0$

$$\Rightarrow dy = v_0 dt \quad donc \quad \int_0^y dy = \int_0^t v_0 dt$$

$\Rightarrow \boldsymbol{y = v_0 t}$ (0,5 pts)

$$v_x = \gamma y = \gamma v_0 t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \gamma v_0 t$$

$$\Rightarrow dx = \gamma v_0 t dt \quad donc \quad \int_0^x dx = \int_0^t \gamma v_0 t dt$$

$\Rightarrow \boldsymbol{x} = \gamma \boldsymbol{v_0} \frac{\boldsymbol{t^2}}{\boldsymbol{2}}$ (0,5 pts)

Donc $y = v_0 t \Rightarrow t = \frac{y}{v_0}$ $donc \quad x = \gamma v_0 \frac{\left(\frac{y}{v_0}\right)^2}{2} = \frac{\gamma}{2v_0} y^2$

L'équation de la trajectoire y=f(x) est de la forme : $\boldsymbol{y} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{2xv_0}}{\gamma}}$ (0,5 pts)

b- Les accélérations normales et tangentielle :

$\vec{v} = v_0 \vec{\imath} + \gamma y \vec{\jmath} = v_0 \vec{\imath} + \gamma v_0 t \vec{\jmath}$ (0,5 pts) Donc l'accélération est de la forme :

$\vec{\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{d\vec{v}}}{\boldsymbol{dt}} = \gamma \boldsymbol{v_0 \vec{\jmath}}$ (0,5 pts)

Et $|\vec{v}| = \sqrt{v_0^2 + \gamma^2 v_0^2 t^2}$ (0,25 pts) et a= γ . v_0 (0,25 pts)

L'accélération tangentielle

$$a_T = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{d\sqrt{v_0^2 + \gamma^2 v_0^2 t^2}}{dt} = \frac{2\gamma^2 v_0^2 t}{2\sqrt{v_0^2 + \gamma^2 v_0^2 t^2}}$$

$\boldsymbol{a_T} = \frac{\gamma^2 \boldsymbol{v_0^2 t}}{\boldsymbol{v}}$ (0,5 pts)

L'accélération normale

$a^2 = a_T^2 + a_N^2 \Rightarrow a_N^2 = a^2 - a_T^2 = \gamma^2 v_0^2 - \frac{\gamma^4 v_0^4 t}{v_0^2 + \gamma^2 v_0^2 t^2}$ (0,5 pts)

$a_N^2 = \frac{\gamma^2 v_0^4}{v^2} \Rightarrow \boldsymbol{a_N} = \frac{\gamma\, \boldsymbol{v_0^2}}{\boldsymbol{v}}$ (0,5 pts)

Le rayon de courbure

$a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{\gamma\, v_0^2}{v} \Rightarrow \boldsymbol{R} = \frac{\boldsymbol{v^3}}{\gamma \boldsymbol{v_0^2}}$ (0,5 pts)