Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
1ière Année LMD-MI
Durée : 01 h 30mn

Année Universitaire 2017/2018
Dimanche 24/06/2018

Examen de Rattrapage en Mécanique

Exercice 1 (6pts)

1- Un mobile dont le mouvement **est circulaire uniforme**, est soumis à une accélération $\vec{a}$:

a- constante　　　　c- dont le module est constant
b- nulle　　　　　　d- dirigé vers le centre de la trajectoire

Donner les réponses correctes.

2- Une particule M se déplace suivant une trajectoire parabolique d'équation :

$\mathbf{y = x^2}$ avec $\mathbf{x(t) = 2t}$

a- Déterminer les composantes de la vitesse et l'accélération, calculer leurs modules.
b- Déterminer les accélérations tangentielle et normale, et déduire le rayon de courbure R.

Exercice 2 (8pts)

Un point M se déplace avec une vitesse V_0 constante sur l'axe (OX) d'un repère (OXYZ) qui tourne avec une vitesse angulaire ω constante autour de (Oz) dans le plan (Oxy) ($\overrightarrow{OO'} = \vec{0}$).

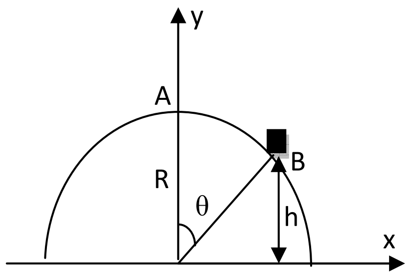
1- Quelle est l'expression de $\overrightarrow{OM}$ dans le repère fixe. Calculer la vitesse absolue et l'accélération absolue.
2- Calculer la vitesse relative et la vitesse d'entrainement, vérifier que $\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$.
3- Calculer l'accélération relative $\vec{a}_r$, l'accélération d'entrainement $\vec{a}_e$ et l'accélération de Coriolis $\vec{a}_c$, vérifier que $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$.

Exercice 3 (6pts)

Un morceau de glace **M** de masse **m** glisse **sans frottement** sur la surface externe d'un igloo qui est une demi sphère de rayon **R** dont la base est horizontale.

A t=0, il est lâché du point A sans vitesse initiale.

1- Trouver l'expression de la vitesse au point B, en fonction de g, R et θ.
2- En utilisant la relation fondamentale de la dynamique, déterminer l'expression de $|\vec{N}|$ la réaction de l'igloo sur M au point B en fonction de la vitesse v_B.
3- A quelle hauteur, M quitte t-il la sphère ?
4- A quelle vitesse M arrive à l'axe (Ox)?



Bon courage

Solution du Rattrapage

Exercice 1 : (6pts)

1-Un mobile dont le mouvement **est circulaire uniforme**, est soumis à une accélération $\vec{a}$ nulle. **(01pts)**

2. a- **les composantes de la vitesse et le module**

Nous avons x(t) =2t et y = x^2 donc y(t)= $4t^2$ **(0.25 pts)**

$$\begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} \\ v_y = \frac{dy}{dt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = 2 \\ v_y = 8t \end{cases} \quad \textbf{(01pts)}$$

Le module de la vitesse : $|\vec{v}| = v = \sqrt{4 + (8t)^2} = \sqrt{4 + 64t^2} = 2\sqrt{1 + 16t^2}$ **(0.25 pts)**

- les composantes de l'accélération et le module

$$\begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = 8 \end{cases} \quad \textbf{(01 pts)}$$

$\vec{a} = 8\vec{j}$ donc $|\vec{a}| = a = 8$ **(0.25 pts)**

b- les accélérations normale et tangentielle

- **L'accélération tangentielle**

$$a_T = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{d\left(2\sqrt{16t^2+1}\right)}{dt} = \frac{32t}{\sqrt{1+16t^2}} \quad \textbf{(0.75 pts)}$$

- **L'accélération normale**

Nous avons $a^2 = a_T^2 + a_N^2$ donc $a_N^2 = a^2 - a_T^2$ **(0.25 pts)**

$$a_N^2 = 64 - \frac{(32t)^2}{1+16t^2} \Rightarrow a_N^2 = \frac{64}{v^2} = \frac{(16)^2}{1+16t^2} \Rightarrow a_N = \frac{8}{\sqrt{1+16t^2}} \quad \textbf{(0.5 pts)}$$

- **Le rayon de courbure**

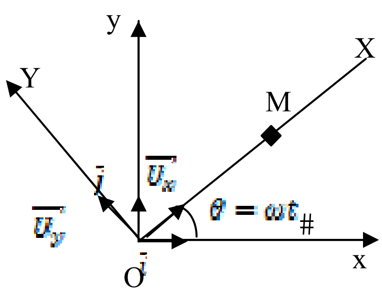
$$a_N = \frac{v^2}{R}\,(\mathbf{0.25\ pts}) \Rightarrow R = \frac{v^2}{a_N} = 4\left(1+16t^2\right)\frac{\sqrt{1+16t^2}}{8} = \frac{1}{2}\left(1+16t^2\right)^{3/2} \quad \textbf{(0.5 pts)}$$

EXERCICE 2 : (08pts)

$\overrightarrow{OM} = v_0 t\, \overrightarrow{U_x}$ Dans le repère (OXY) **(0.25pts)**

avec $\overrightarrow{U_x} = \cos\omega t\,\vec{i} + \sin\omega t\,\vec{j}$ **(0.25pts)**

et $\overrightarrow{U_y} = -\sin\omega t\,\vec{i} + \cos\omega t\,\vec{j}$ **(0.25pts)**



$\overrightarrow{OM}/(R) = v_0 t\,(\cos\omega t\,\vec{i} + \sin\omega t\,\vec{j})$ Dans le repère (Oxy) **(0.25pts)**

La vitesse absolue :

$$\overrightarrow{v_a} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}/(R) = v_0\cos\omega t\,\vec{i} + v_0\sin\omega t\,\vec{j} - v_0\omega t\sin\omega t\,\vec{i} + v_0\omega t\cos\omega t\,\vec{j}$$

$= v_0\,(\cos\omega t\,\vec{i} + v_0\sin\omega t\,\vec{j}) + v_0\omega t\,(-\sin\omega t\,\vec{i} + \cos\omega t\,\vec{j}) = v_0\overrightarrow{U_x} + v_0\omega t\overrightarrow{U_y}$ **(01pts)**

L'accélération absolue

$$\overrightarrow{a_a} = \frac{dv_a'}{dt}/(R) = -v_0\omega\sin\omega t\,\vec{i} + v_0\,\omega\cos\omega t\,\vec{j} - v_0\omega\sin\omega t\,\vec{i} + v_0\,\omega\cos\omega t\,\vec{j} - v_0\omega^2 t\cos\omega t\,\vec{i} + v_0\omega^2 t\sin\omega t\,\vec{j}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{a_a} = \frac{d\overrightarrow{v_a}}{dt}/(R) = 2v_0\,\omega\,(-\sin\omega t\,\vec{i} + \cos\omega t\,\vec{j}) - v_0\omega^2 t\,(\cos\omega t\,\vec{i} + \sin\omega t\,\vec{j})$$

$\Rightarrow \overrightarrow{a_a} = 2v_0\,\omega\overrightarrow{U_y} - v_0\,\omega^2 t\overrightarrow{U_x}$ **(01pts)**

La vitesse relative

$\overrightarrow{v_r} = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}/(OXY)$ avec $\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{OM} = v_0 t\,\overrightarrow{U_x}$ Donc $\overrightarrow{v_r} = v_0\overrightarrow{U_x}$ **(01pts)**

La vitesse d'entrainement :

Le repère fixe et le repère mobile ont le même origine donc O' et o sont confondus.

$\overrightarrow{v_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M}$ avec $\overrightarrow{OO'} = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{v_e} = \vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M}$ **(0.5pts)**

$\vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{U_x} & \overrightarrow{U_y} & \overrightarrow{U_z} \\ 0 & 0 & \omega \\ v_0 t & 0 & 0 \end{vmatrix} = \omega v_0 t\,\overrightarrow{U_y}$ **(0.5pts)** Donc $\overrightarrow{v_e} = \omega\,v_0 t\,\overrightarrow{U_y}$ **(0.5pts)**

Avec $\overrightarrow{U_x} = \cos\omega t\,\vec{i} + \sin\omega t\,\vec{j}$ et $\overrightarrow{U_y} = -\sin\omega t\,\vec{i} + \cos\omega t\,\vec{j}$

Alors $\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_e} = v_0(\cos\omega t\,\vec{i} + \sin\omega t\,\vec{j}) + \omega\,v_0 t\,(-\sin\omega t\,\vec{i} + \cos\omega t\,\vec{j})$

$\Rightarrow \overrightarrow{v_a} = v_0\overrightarrow{U_x} + \omega\,v_0 t\,\overrightarrow{U_y}$ Donc $\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_e}$ est vérifiée **(0.5pts)**

L'accélération relative :

$\overrightarrow{a_r} = \frac{d\overrightarrow{v_r}}{dt}/(OXY)$ avec $\overrightarrow{v_r} = v_0\,\overrightarrow{U_x}$; Alors $\overrightarrow{a_r} = \vec{0}$ **(0.5pts)**

L'accélération d'entrainement

$\overrightarrow{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \vec{\omega}\Lambda(\vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M}) + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\Lambda\overrightarrow{O'M}$; $\frac{d\vec{\omega}}{dt}\Lambda\overrightarrow{O'M} = \vec{0}$ car ω constante et $\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} = \vec{0}$

Et $\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}) = \vec{\omega}\wedge(\omega\, v_0 t\, \overrightarrow{U_y}) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{U_x} & \overrightarrow{U_y} & \overrightarrow{U_z} \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & \omega\, v_0 t & 0 \end{vmatrix} = -\omega^2 v_0 t\, \overrightarrow{U_x}$ **(0.5pts)**

Donc $\overrightarrow{a_e} = -\omega^2 v_0 t \overrightarrow{U_x}$ **(0.5pts)**

L'accélération de Coriolis

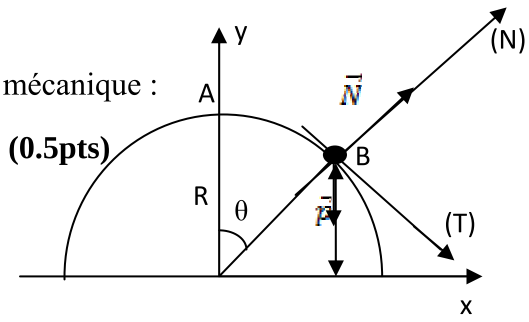
$\overrightarrow{a_c} = 2\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{v_r} = 2\begin{vmatrix} \overrightarrow{U_x} & \overrightarrow{U_y} & \overrightarrow{U_z} \\ 0 & 0 & \omega \\ v_0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2\omega v_0 \overrightarrow{U_y}$ Donc $\overrightarrow{a_c} = 2\omega v_0 \overrightarrow{U_y}$ **(0.5pts)**

L'accélération absolue

$$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_c} + \overrightarrow{a_e} = -\omega^2 v_0 t \overrightarrow{U_x} + 2\omega v_0 \overrightarrow{U_y}$$
$$= -\omega^2 v_0 t(\cos\omega t\,\vec{i} + \sin\omega t\,\vec{j}) + 2\omega v_0(-\sin\omega t\,\vec{i} + \cos\omega t\,\vec{j})$$

donc $\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_c} + \overrightarrow{a_e}$ est vérifiée **(0.5pts)**

<u>EXERCICE 3 :</u> (06pts)



1- D'après le principe de la conservation de l'énergie mécanique :

- entre les deux points A et B **(0.5pts)**

$E_{M_A} = E_{M_B} \Rightarrow E_{C_A} + E_{P_A} = E_{C_B} + E_{P_B}$ **(0. 5pts)**

Alors $E_{P_A} = E_{C_B} + E_{P_B}$

$E_{C_A} = 0$ $(\mathbf{0.25pts})$ $puisque\ v_A = 0$ (**le point matériel est lancée sans vitesse initiale**);

avec $h_B = R\cos\theta$ **(0.25pts)**

Donc (*) $\Rightarrow mgR = \frac{1}{2}mv_B^2$+ mg R cos θ **(0.5pts)**

Alors $gR = \frac{1}{2}v_B^2$+ g R cosθ (*) $\Rightarrow v_B^2 = 2(gR - gR\cos\theta)$

donc $v_B = \sqrt{2(gR - gR\cos\theta)}$ **(0.5pts)**

2- D'après le principe fondamental de la dynamique $\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{N} + \vec{p} = m\vec{a}$ **(0.5pts)**

On choisit un repère composés de l'axe (OT) tangent à la demi sphère et l'axe (ON) suivant le rayon et dans le sens de $\vec{N}$

En faisant la projection sur l'axe ON : N- p cosθ = m a_N $(\mathbf{0.5pts})$

$\Rightarrow N - mg\cos\theta = -m\frac{v_B^2}{R}$

$\Rightarrow N = m(g\cos\theta - \frac{v_p^{2}}{R})$ **(0.5pts)**

3- Quand le point P quitte la sphère alors N=0 **(0.25pts)**

$mg\cos\theta = m\frac{v_p^2}{R} \Rightarrow v_p^2 = Rg$ cos θ

(*)$\Rightarrow$ $R = \frac{1}{2}R\, g$ cosθ + g R cos θ alors $\cos\theta = \frac{2}{3}$ donc $\theta_0 = 48°$ **(0.5pts)**

Le point matériel P quitte la sphère à une hauteur $h_p = \frac{2}{3}R$ **(0.5pts)**

L'angle par rapport à l'horizontale pour lequel le point quitte la demi sphère est :

90-48=52 **(0.25pts)**

4-La vitesse du point matériel en ce point

$v_p^2 = Rg\cos\theta \Rightarrow v_p = \sqrt{\frac{2}{3}Rg}$ **(0.5pts)**