Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Math
1ière Année LMD-MI
Durée : 01 h 30mn

Année Universitaire 2022/2023

Corrigé de l'épreuve finale d'électricité

Question de cours: (5pts)

1- Les caractéristiques d'un conducteur en équilibre électrostatique sont : (1pts)

- Le champ électrique à l'intérieur du conducteur en équilibre électrostatique est nul.
- Le potentiel électrique à l'intérieur du conducteur en équilibre électrostatique est constant.
- La charge à l'intérieur du conducteur en équilibre électrostatique est nulle (la charge est surfacique).
- Le champ au voisinage immédiat du conducteur en équilibre électrostatique est : $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$.

1- La conductivité est donnée par $\boldsymbol{\sigma = \frac{l}{R.S}}$ (0.5pt) (l=la longueur du fil conducteur, S : la section du fil et R : la résistance du fil), la relation entre la résistivité $\boldsymbol{\rho}$ et la conductivité $\boldsymbol{\sigma}$ est : $\boldsymbol{\sigma = \frac{1}{\rho} = \frac{l}{R.S}}$(0.5pt)

2- (3pts) La capacité d'un condensateur sphérique :

$$\mathbf{C = \frac{Q}{(V_1 - V_2)} = \frac{Q}{U}} \text{ (0.5pts)}$$

- Calcul du champ électrique :

Théorème de Gauss : $\emptyset = \oiint \vec{E}.\vec{dS} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$ (0.25pts)

La surface de Gauss dans ce cas est une sphère de centre O et de rayon r. Par raison de symétrie le champ est radial et constant en tout point de la surface de Gauss. (0.25pts)

$\emptyset = \oiint \vec{E}.\vec{dS} = \oiint E.dS = E.S = E4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$ (0.25pts)

$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$ (0.25pts)

- (01 pts) Calcul du potentiel :

$\begin{cases} \vec{E} = -\overrightarrow{grad}V \\ E = E(r) \end{cases}$ (0.25pts) donc $E = -\frac{dV}{dr} \Longrightarrow dV = -Edr$ (0.25pts)

$V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}dr = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$ (0.25pts)

$V_1 - V_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{R_2 - R_1}{R_1R_2}\right)$=U (0.25pts)

- La capacité d'un condensateur sphérique :

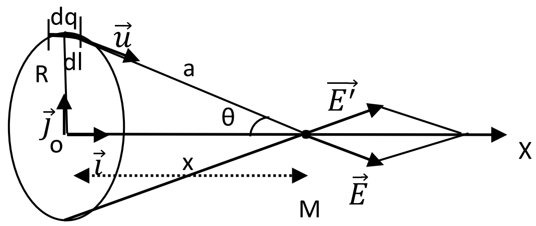
$$C = \frac{Q}{(V_1 - V_2)} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{R_2 - R_1}{R_1R_2}\right)}$$

$$\mathbf{C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1R_2}{R_2 - R_1}} \text{ (0.5pts)}$$

Exercice 1 : (Partie 2 du CC) (10pts)

A- On cherche le champ élémentaire $\overrightarrow{dE}$ créé par l'élément de Charge dq présent dans l'élément de longueur dl. (dq=λdl). (0.5pt)

(0.25pt)



$\overrightarrow{dE} = \frac{kdq}{a^2}\vec{u}$ (0.5pt) $\Rightarrow \overrightarrow{dE} = \frac{k\lambda dl}{R^2+x^2}(\cos\theta\,\vec{\imath} - \sin\theta\,\vec{\jmath})$ (0.5pt)

D'après la relation de Pitagorth $a^2=R^2+x^2$ et $\vec{u} = \cos\theta\,\vec{\imath} - \sin\theta\,\vec{\jmath}$

Nous avons une symétrie par rapport à l'axe (Ox) donc le champ électrique a une seule composante E_x, ($E_y=0$ (0.25pt)) et $\cos\theta = \frac{x}{a} = \frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}$ (0.25pt)

Donc $dE_x = \frac{k\lambda}{R^2+x^2}\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}dl \Rightarrow dE_x = k\lambda\frac{x}{(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}dl$, (0.25pt)

(Il y a une seule variable (l) et x et R sont constantes par rapport à l).

$E_x = k\lambda\frac{x}{(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi R} dl = k\lambda\frac{x}{(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,2\pi R$ (0.5pt) avec $k=1/(4\pi\varepsilon_0)$

Donc $E = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0}\;\frac{x\,R}{(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ (0.5pt)

B-(6.5pts) Pour calculer le champ électrique en tout point de l'espace, on applique le théorème de Gauss.

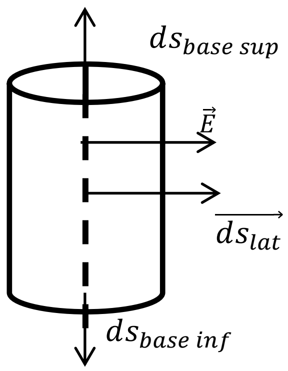
On prend comme surface de Gauss un cylindre de rayon ***r*** et de hauteur *h* (0.25pts)

Le flux à travers la surface de Gauss est : $\emptyset = \iint \vec{E}.\overrightarrow{ds} = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$ (0.5pts)

En raison de la symétrie, le champ est radial et constant en tout point de la surface de Gauss (0.5pts)

$(\iint \vec{E}.\overrightarrow{ds_{base\ sup}} = \iint \vec{E}.\overrightarrow{ds_{base\ inf}} = 0\ car\ \vec{E} \perp \overrightarrow{ds_{base\ sup}} et\ \vec{E} \perp \overrightarrow{ds_{base\ inf}})$ (0.25pts)

$\emptyset = \iint E.ds_{lat}$ (0.25pts) Car ($\vec{E} \parallel \overrightarrow{ds_{lat}}$) (0.25pts)



Le flux à travers la surface de Gauss sera :

$\emptyset = \iint \vec{E}.\overrightarrow{ds} = \iint E.ds_{lat} = E\iint ds_{lat} = E.S = E.2\pi rh = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$ (*) (0.5pts)

1- Calcul du champ :

<u>1^er cas : r < R</u> $Q_{int} = \lambda.h$ (0.5pts) $\Rightarrow \boldsymbol{E_1} = \frac{\boldsymbol{\lambda}}{\boldsymbol{2\pi r\varepsilon_0}}$ (0.5pts)

<u>2^eme cas :</u> $\boldsymbol{R_1 \leq r < R_2}$

$Q_{int} = Q1 + Q2 = \lambda.h + \iint \sigma ds = \lambda.h + \sigma s = \lambda.h + \sigma 2\pi R_1 h$ (0.5pts)

$E_2 2\pi rh = \frac{\lambda.h+\sigma 2\pi R_1 h}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boldsymbol{E_2} = \frac{(\lambda+\sigma 2\pi R_1)}{2\pi\boldsymbol{\varepsilon_0}}.\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{r}}$ (0.5pts)

<u>3^eme cas :</u> $\boldsymbol{r \geq R_2}$ on a $Q_{int} = Q_1 + Q_2 + Q_3$

$Q_1 = \lambda.h, Q_2 = \sigma 2\pi R_1 h$ et $Q_2 = 2\sigma 2\pi R_2 h$ donc $\boldsymbol{Q_{int}} = \lambda.h + \sigma 2\pi h(R_1 + 2R_2)$ (0.5pts)

$E_3 2\pi rh = \frac{\lambda.h+\sigma 2\pi h(R_1+2R_2)}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boldsymbol{E_3} = \frac{(\lambda+\sigma 2\pi(R_1+2R_2))}{2\pi\boldsymbol{\varepsilon_0}}.\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{r}}$ (0.5pts)

2- Le potentiel à l'extérieur : $\boldsymbol{r \geq R_2}$

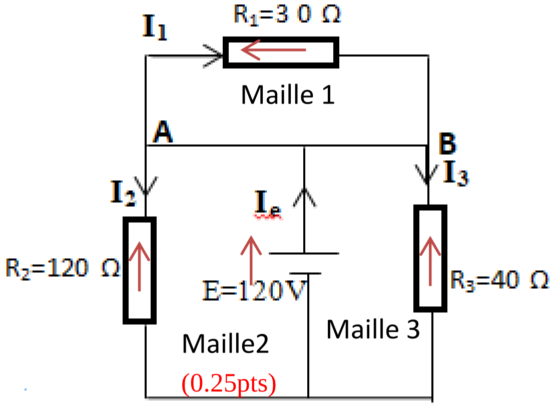
$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V \; avec \; E = E(r) \Longrightarrow E = -\frac{dV}{dr} \; donc \; V = -\int E.dr$ (0.5pts)

On a $\boldsymbol{E_3} = \frac{(\lambda+\sigma 2\pi(R_1+2R_2))}{2\pi\boldsymbol{\varepsilon_0}}.\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{r}}$

$V_3 = -\int E_3.dr = -\frac{(\lambda+\sigma 2\pi(R_1+2R_2))}{2\pi\boldsymbol{\varepsilon_0}}\int \frac{1}{r}.dr = -\frac{(\lambda+\sigma 2\pi(R_1+2R_2))}{2\pi\boldsymbol{\varepsilon_0}}\boldsymbol{lnr} + \boldsymbol{C_3}$ (0.5pts)

<u>Exercice 2</u> : (5pts)

1- Calcul des courants I_2 et I_3 : (figure 3)



Maille 1 : $R_1I_1=0 \Rightarrow I_1=0$ (0.5pts)
Maille 2 : $R_2I_2- E=0 \Rightarrow I_2=1A$ (0.5pts)
Maille 3 : $R_3I_3- E=0 \Rightarrow I_3=3A$ (0.5pts)
Calcul du courant débité par le générateur :
Nœud C on a : $I_2 + I_3 = I_e=4A$ (0.5pts)

2- Calcul des courants I_1, I_2 et I_3 : (figure 4)

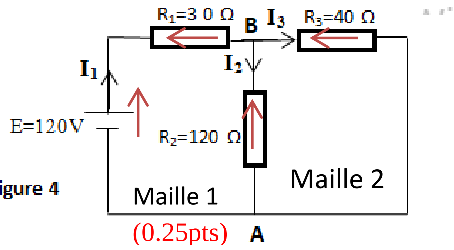


Figure 4

Nœud A: $I_1 = I_2 + I_3$ (0.25pts)
Maille 1: $E- R_1I_1 – R_2I_2=0$ (0.25pts)
Maille 2: $R_2I_2 –R_3I_3=0$ (0.25pts)

$I_1 = \frac{E-R_2I_2}{R_1} = 4(1 - I_2)$

et $I_3 = \frac{R_2I_2}{R_3} = 3I_2$ donc $4(1 - I_2) = I_2 + 3I_2$

$I_2 = 0.5A$ (0.25pt) et $I_1 = 2A$ (0.25pt) donc $I_3 = 3I_2 = 1.5A$ (0.25pt)

3- Retrouver I_1 on utilisant R_{eq} :

$R_{eq}= R_1+(R_2* R_3)/(R_2+ R_3)=60Ω$ (0.5pt)
On a $E=R_{eq}\, I_1$ donc $I_1=E/ R_{eq}=120/60=2A$ (0.5pt)