Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2023/2024
Durée : 01 h 30min
1ère Année LMD-M et MI

Examen de rattrapage d'électricité

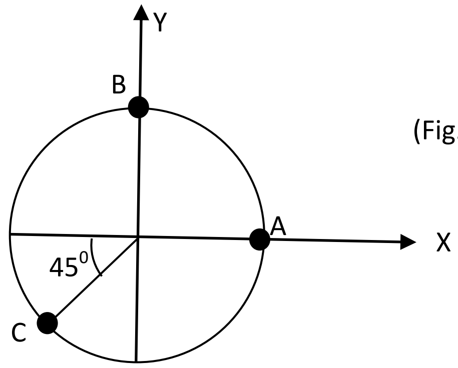
Exercice 01 (5pts)

On considère trois charges ponctuelles placées aux points A, B et C appartenant à un cercle de centre O et de rayon **R.** (Figure 1). $q_A = -q$; $q_B = -2q$; $q_C = +5q$.

1) Calculer le champ électrique crée par les trois charges au point **O** le centre du cercle.

2) Deduire la force électrique exercée sur la charge $q_O = -q$, placée en **O**. (représenter les forces)

3) Calculer le potentiel V_o crée au point **O.**



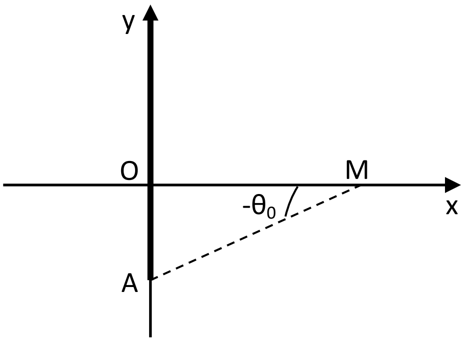
(Fig.1)

Exercice 2 : (07pts)

Soit un fil (**Ay**) portant une distribution de charges linéaire de densité linéique uniforme positive **λ**. (Figure 2)

1- Déterminer le champ électrique $\mathbf{E_M}$ produit en un point M par cette distribution continue.
On donne **OM=x**.

2- Déduire le champ électrique au point M dans le cas d'un fil infini, et écrire l'expression du potentiel dans ce cas en fonction de x.



Exercice 3: (08pts)

Un cylindre de hauteur infinie et de rayon R est chargé en surface avec une densité de charge surfacique **σ** constante. Sur l'axe de ce cylindre on place un fil conducteur de longueur infinie et de densité de charge linéique **λ** constante (figure 3).

1) Ecrire l'expression du flux électrique à travers la surface de Gauss.
2) Calculer, en tout point de l'espace, le champ électrostatique E(r) crée par cette distribution de charges.
3) Déduire le potentiel électrostatique V(r) en tout point de l'espace.

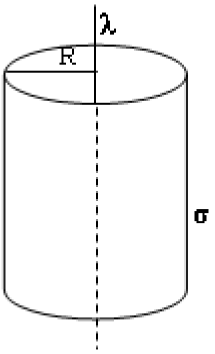
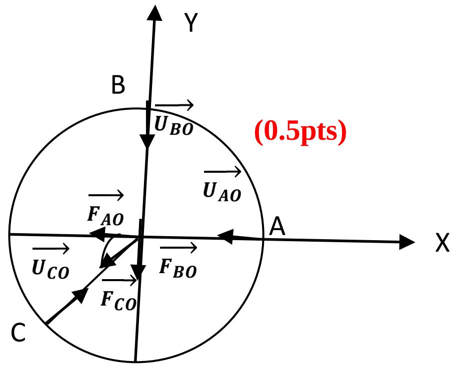


Figure 3

Bon courage

Corrigé

Exercice 01 : (5pts)



(0.5pts)

1) $\overrightarrow{E_O}$ =?

$\overrightarrow{E_0} = \overrightarrow{E_{A/O}} + \overrightarrow{E_{B/O}} + \overrightarrow{E_{C/O}}$ **(0.25pts)**

$\overrightarrow{E_{A/O}} = k\frac{q_A}{OA^2}\overrightarrow{U_{A/O}}$ **(0.25pts)**

$\overrightarrow{E_{B/O}} = k\frac{q_A}{OB^2}\overrightarrow{U_{B/O}}$ **(0.25pts)**

$\overrightarrow{E_{C/O}} = k\frac{q_C}{Oc^2}\overrightarrow{U_{C/O}}$ **(0.25pts)**

$\overrightarrow{U_{A/O}} = -\vec{\imath}$ **(0.25pts)**, $\overrightarrow{U_{B/O}} = -\vec{\jmath}$ **(0.25pts)**; $\overrightarrow{U_{C/O}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\imath} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\jmath}$ **(0.25pts)**

$OA^2 = OB^2 = OC^2 = R^2$ **(0.25pts)**

$\overrightarrow{E_{A/O}} = k\frac{q}{R^2}\vec{\imath}$, $\overrightarrow{E_{B/O}} = 2k\frac{q}{R^2}\vec{\jmath}$; $\overrightarrow{E_{C/O}} = 5k\frac{q}{R^2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\imath} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\jmath}\right)$

$\boldsymbol{\overrightarrow{E_0} = k\frac{q}{R^2}\left[\left(1 + 5\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\vec{\imath} + \left(2 + 5\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\vec{\jmath}\right]}$ **(01pts)**

2) $\overrightarrow{F_O}$ =?

$\overrightarrow{F_O} = q_O\overrightarrow{E_O} = -\boldsymbol{k}\frac{q^2}{R^2}\left[\left(1 + 5\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\vec{\imath} + \left(2 + 5\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\vec{\jmath}\right]$ **(0.5pts)**

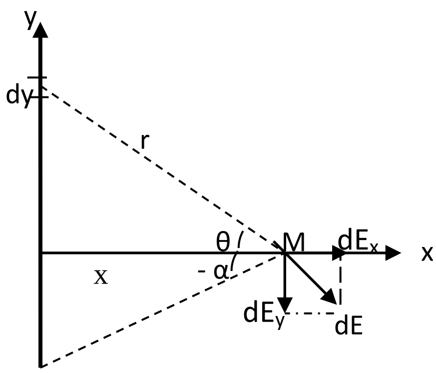
3) $V_O = V_{AO} + V_{BO} + V_{CO}$ **(0.25pts)**

$V_O = K\frac{q_A}{OA} + K\frac{q_B}{OB} + K\frac{q_C}{OC}$ **(0.25pts)**

$V_O = \boldsymbol{k}\frac{q}{R}(-1 - 2 + 5) \Rightarrow V_O = 2\boldsymbol{k}\frac{q}{R}$ **(0.5pts)**

Exercice 2 : 7pts

1-Le champ électrique E en M. (0. 5pts)



$$\begin{cases} \overrightarrow{dE} = k\frac{dq}{r^2}\vec{U} \text{ (0.25pts)} \\ dq = \lambda dy \text{ (0.25pts)} \\ \vec{U} = \cos\theta\,\vec{\imath} - \sin\theta\,\vec{\jmath} \text{ (0.25pts)} \end{cases}$$

$\overrightarrow{dE} = k\frac{dq}{r^2}\vec{U} = k\frac{\lambda dy}{r^2}(\cos\theta\,\vec{\imath} - \sin\theta\,\vec{\jmath})$ (0.25pts)

Ou bien: $dE_x = dE\cos\theta = k\frac{dq}{r^2}\cos\theta = \frac{\lambda dy}{x^2+y^2}\cos\theta$ (0. 5pts)

$dE_y = -dE\sin\theta = -k\frac{dq}{r^2}\sin\theta = -\frac{\lambda dy}{x^2+y^2}\sin\theta$ (0. 5pts)

D`autre part $tg\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow y = xtg\theta \Rightarrow dy = \frac{x}{\cos^2\theta}d\theta$ (0.25pts)

Avec $\cos\theta = \frac{x}{r} \Rightarrow r = \frac{x}{\cos\theta}$ (0.25pts)

Donc $\quad dE_x = \frac{k\lambda}{x} \cos\theta d\theta$ (0.25pts)

$\quad dE_y = \frac{-k\lambda}{x} \sin\theta d\theta$(0.25pts)

$E_x = \int dE_x = \frac{k\lambda}{x} \int_{-\alpha}^{\pi/2} \cos\theta d\theta$

$$E_y = \int dE_y = \frac{-k\lambda}{x} \int_{-\alpha}^{\pi/2} -\sin\theta d\theta$$

$E_x = \frac{k\lambda}{x}(-1 + \sin\alpha)$(0.5pts)

$E_y = \frac{-k\lambda}{x} \cos\alpha$(0.5pts)

$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{k\lambda}{x}\sqrt{1 + 2\sin\alpha}$ (0.5pts)

2-Pour un fil infini: $-\frac{\pi}{2} < \theta < +\frac{\pi}{2}$

$$E_x = \int dE_x = \frac{k\lambda}{x} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta d\theta$$

$dE_y = \int dE_y = \frac{k\lambda}{x} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} -\sin\theta d\theta = 0$ (0.5pts)

Donc $\quad E = E_x = \frac{2k\lambda}{x}$ (0.5pts)

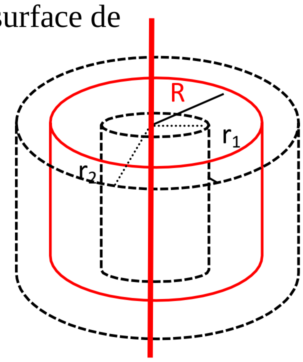
Le potentiel électrostatique :

$\begin{cases} \vec{E} = -\overrightarrow{grad}V \\ E = E(x) \end{cases} \Rightarrow E = -\frac{dV}{dx} \Rightarrow V = -\int E dx = -\int \frac{2k\lambda}{x} dx$ (0.5pts)

$$V = -2k\lambda . \ln x + C \text{ (0.5pts)}$$

__Exercice 2 :__ **(8pts)**

1- On considère comme surface de gauss un cylindre de rayon **r** et de hauteur **h**. (0.5pts)
A cause e la symétrie, le champ est radial et constant en tout point de la surface de Gauss(0.5pts)



D'après le Théorème de Gauss : $\emptyset = \iint \vec{E}.\overrightarrow{ds} = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$ (0.5pts)

$\emptyset = \iint \vec{E}.\overrightarrow{ds} = 2\iint \vec{E}.\overrightarrow{ds}_{base} + \iint \vec{E}.\overrightarrow{ds_{lat}}$

$\overrightarrow{E} \perp \overrightarrow{ds}_{base} \Longrightarrow \iint \vec{E}.\overrightarrow{ds_{lat}} = 0$ (0.25pts)

$\vec{E} \parallel \overrightarrow{ds_{lat}}$ Donc : $\emptyset = \iint \vec{E}.\overrightarrow{ds_{lat}} = \iint E.ds_{lat} = E.\int ds_{lat} = E.S_{lat}$(0.25pts)

$\Rightarrow \emptyset = \boldsymbol{E2\pi rh} = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$ (0.5pts)

2- Le champ électrique 3,5pts on à $\boldsymbol{E} = \frac{\sum \boldsymbol{Q_{int}}}{\boldsymbol{2\pi r h \varepsilon_0}}$

<u>1er cas $\boldsymbol{r < R}$</u> $dq = \lambda dl$(0.5pts) $\Rightarrow Q_{int} = \lambda l$ (0.5pts)

donc $E_1 2\pi r h = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boldsymbol{E_1} = \frac{\boldsymbol{\lambda}}{2\pi r \boldsymbol{\varepsilon_0}}$ (0.5pts)

<u>2eme cas r≥ R</u> $Q_{int} = Q_1 + Q_2$ (0.5pts)

$dq_2 = \sigma ds$ (0.25pts) $\Rightarrow Q_{int} = \sigma S = \sigma 2\pi R h$ (0.5pts) donc $Q_{int} = \lambda h + \sigma 2\pi R h$ (0.25pts)

Donc $E_2 2\pi r h = \frac{\lambda h + \sigma 2\pi R h}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boldsymbol{E_2} = \frac{\boldsymbol{\lambda}}{2\pi r \boldsymbol{\varepsilon_0}} + \frac{\boldsymbol{\sigma R}}{\boldsymbol{\varepsilon_0 r}}$ (0.5pts)

3- Le potentiel électrique v(r) en tout point de l'espace 02pts

$\vec{E} = -\overrightarrow{grad} v$ (0.25pts) $\Rightarrow E = -\frac{dv}{dr}$ donc $v = -\int E dr$ (0.25pts)

<u>1er cas</u> $r < R$

$E_1 = \frac{\lambda}{2\pi r_{\varepsilon_0}} \Rightarrow v_1 = \frac{\lambda}{2\pi \boldsymbol{\varepsilon_0}} \int \frac{dr}{r}$ (0.25pts) donc $v_1 = \frac{\lambda}{2\pi \boldsymbol{\varepsilon_0}} \ln r + C_1$(0.5pts)

<u>2eme cas r≥ R</u>

$E_2 = \frac{\lambda}{2\pi r \varepsilon_0} + \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r} \Rightarrow v_2 = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0} \int \frac{dr}{r} + + \frac{\sigma R}{\varepsilon_0} \int \frac{dr}{r}$ (0.25pts) donc $v_2 = \left(\frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0} + \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\right) \ln r + C_2$(0.5pts)