Chapitre 2

Filtres et analyse fréquentielle

On cherche maintenant à analyser le comportement de circuits en termes de fréquence. On analyse donc les tensions et courants lorsque la fréquence est variable.

Si on fait varier la fréquence d'opération d'un circuit, l'impédance des capacitances et inductances variera aussi. Il est important de bien comprendre le comportement de ces éléments lorsque la fréquence varie. On verra qu'un choix judicieux de ces composantes permettra de créer des circuits où on peut bloquer ou laisser passer des signaux de certaines fréquences voulues. On appelle ce genre de circuit un **filtre**.

En fait, un filtre pratique ne permet pas d'éliminer complètement certaines fréquences : il y a plutôt une **atténuation**. Les signaux des fréquences non voulues sont atténuées de façon assez significative.

On se concentre dans ce chapitre sur une analyse des quatre types de filtres : passe-bas, passe-haut, bande passante, et filtre coupe-bande. On verra aussi une méthode pour tracer la réponse de ces filtres en fonction de la fréquence, soit le diagramme de Bode.

2.1 Caractéristiques de base

On présente ici certaines caractéristiques de base des filtres. Pour accomplir ceci, on se sert de la fonction de transfert du circuit, où on considère l'entrée et la sortie comme étant des tensions. On cherche donc la fonction de transfert $H(s) = V_o(s)/V_i(s)$ du circuit.

Voici quelques termes importants :

1. **Bande passante** : C'est l'étendue des fréquences entre lesquelles un signal à l'entrée passe à la sortie.

2. **Bande atténuée :** C'est l'étendue de fréquences où l'amplitude d'un signal est atténué de sorte qu'il n'apparaît pas à la sortie.

Les filtres sont caractérisés selon leur réponse en fréquence. La variation de l'amplitude en fonction de la fréquence est le critère le plus important. On peut voir les différents types de filtres à la figure 2.1.

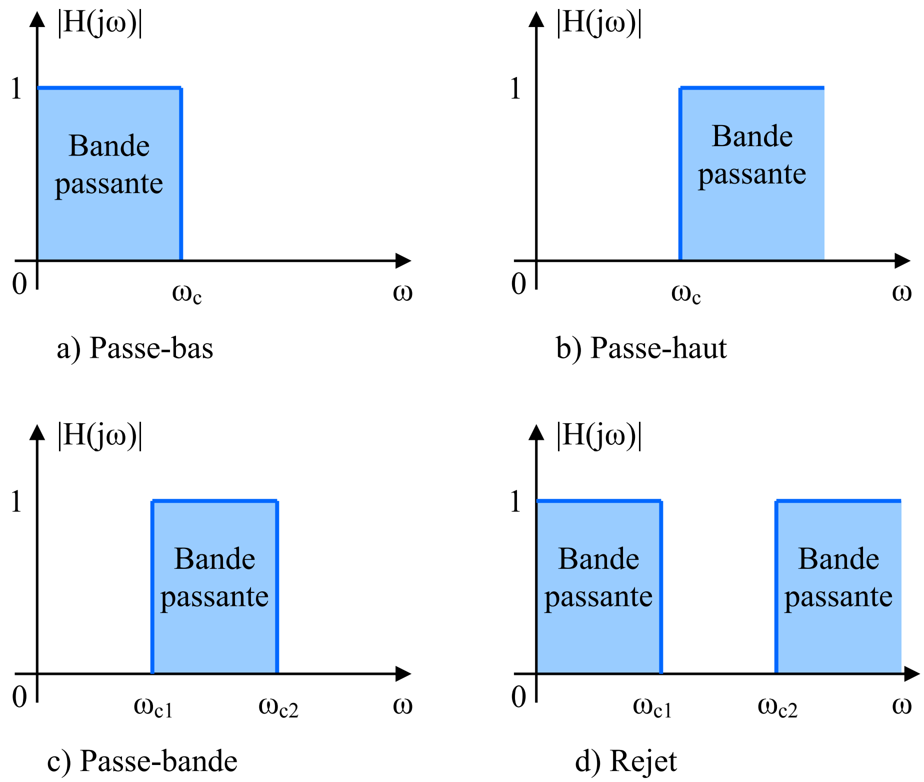


FIG. 2.1 – Classification des filtres

Les courbes idéales de la figure 2.1 montrent les quatre types de filtres principaux. Les deux premiers, le filtre passe-bas et le filtre passe-haut, ont tous deux une bande passante et une bande atténuée. La fréquence qui sépare les deux bandes est appelée la **fréquence de coupure**. Le nom de ces filtres vient de la région dans laquelle les fréquences passent de l'entrée à la sortie : pour un passe-bas, ce sont les fréquences plus faibles que la fréquence de coupure qui passent, tandis que pour le passe-haut, ce sont les fréquences plus élevées qui passent. Les termes *bas* et *haut* sont relatifs ici ; ils ne font référence qu'à la fréquence de coupure.

Les deux autres types de filtres ont deux fréquences de coupure. Le filtre passe-bande permet de passer seulement les fréquences entre les deux fréquences de coupure ; le filtre à rejet (ou filtre coupe-bande) laisse passer tout sauf ce qui est entre les deux fréquences de coupure.

2.2 Filtres passe-bas

On analysera ici trois types de filtres : deux filtres passifs, soit le filtre RL série et RC série, et l'implantation avec ampli-op d'un filtre passe-bas.

2.2.1 Circuit RL série

Le circuit du filtre RL série est montré à la figure 2.2. L'entrée du circuit est une tension sinusoïdale de fréquence variable. La sortie du circuit est la tension aux bornes de la résistance.

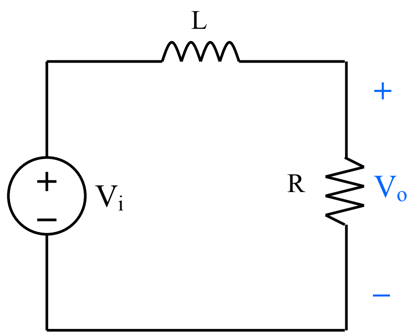


FIG. 2.2 – Filtre passe-bas (RL série)

On peut analyser ce circuit de façon qualitative pour voir s'il fonctionne comme un filtre passe-bas. En effet, à de basses fréquences, l'inductance (dont l'impédance est $j\omega L$), agit comme un court-circuit. La tension de la source se rend donc à la résistance. À hautes fréquences, l'inductance agira comme un circuit ouvert, puisque son impédance sera très élevée. Il n'y a donc pas de signal qui se rend à la résistance. On voit bien que ce circuit est un filtre passe-bas : les signaux de basse fréquence se rendent à la sortie, tandis que ceux de hautes fréquences ne se rendent pas.

Fréquence de coupure

La fréquence de coupure pour des filtres réels est la fréquence à laquelle l'amplitude de sortie est à $1/\sqrt{2}$ de la valeur maximale :

$$|H(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}} H_{max} \tag{2.1}$$

C'est la définition la plus utilisée en génie électrique. Le terme $1/\sqrt{2}$ peut paraître arbitraire, mais à cette tension, la puissance a diminué de moitié.

On peut maintenant analyser le circuit RL série pour déterminer sa fréquence de coupure. On cherche alors la fonction de transfert du filtre :

$$H(s) = \frac{R/L}{s + R/L} \tag{2.2}$$

Pour étudier la réponse en fréquence, on fait la substitution $s = j\omega$:

$$H(j\omega) = \frac{R/L}{j\omega + R/L} \tag{2.3}$$

On sépare cette dernière équation en deux parties : une pour l'amplitude, et l'autre pour la phase.

$$|H(j\omega)| = \frac{R/L}{\sqrt{\omega^2 + (R/L)^2}} \tag{2.4}$$

$$\theta(j\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right) \tag{2.5}$$

À l'aide de l'équation 3.1, on peut calculer la fréquence de coupure de ce filtre :

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}(1) = \frac{R/L}{\sqrt{\omega^2 + (R/L)^2}} \tag{2.6}$$

et on résout pour obtenir

$$\omega_c = \frac{R}{L} \tag{2.7}$$

L'équation2.7 donne un résultat important : on peut choisir la fréquence de coupure qu'on veut en faisant un choix approprié de R et L.

Exemple 1

L'électrocardiographie est l'étude des signaux électriques générés par le coeur. Un électrocardiographe doit être capable de détecter des signaux d'une fréquence d'environ 1Hz (une personne normale aura un battement d'environ 72 battements par minute) et doit être capable d'éliminer le bruit causé par les appareils qui opèrent à 60Hz, la fréquence du réseau électrique.

Faire le design d'un filtre RL série qui permet de détecter les fréquences du coeur et éliminer le bruit dû aux appareils électriques. Calculer l'amplitude à 60Hz pour vérifier la performance du filtre.

Il faudra premièrement choisir une fréquence de coupure pour le filtre. Cette fréquence doit être entre 1Hz et 60Hz, selon les données du problème. Il ne faut pas que la fréquence choisie soit trop près de 1Hz, car le signal risquerait d'être un peu atténué. On choisit 10Hz comme fréquence de coupure. On a donc :

$$\omega_c = 2\pi f = 20\pi \text{ rad/s}$$

Il reste à déterminer la résistance et l'inductance à utiliser, selon l'équation 2.7. Il est plus facile de choisir l'inductance en premier, puisque celles-ci ne sont disponibles qu'à certaines valeurs. Il y a bien plus de choix pour les résistances. On prend une valeur commune d'inductance, soit $L = 100$mH. La résistance nécessaire sera donc :

$$R = \omega_c L = 6.28\ \Omega$$

On peut calculer l'amplitude à la sortie,

$$|V_o(\omega)| = \frac{R/L}{\sqrt{\omega^2 + (R/L)^2}}|V_i| = \frac{20\pi}{\sqrt{\omega^2 + 400\pi^2}}|V_i|$$

À 1Hz, l'amplitude à la sortie est 0.995 de la valeur de l'entrée. À 10Hz, c'est 0.707 (ce qui doit être la valeur à la fréquence de coupure) et à 60Hz c'est 0.164. Le bruit à 60Hz est atténué d'un facteur de 6 environ par le filtre.

2.2.2 Circuit RC série

Un circuit RC série peut aussi servir de filtre passe-bas. Dans ce cas-ci, la sortie est sur la capacitance et non la résistance, contrairement au circuit RL série. Le circuit est montré à la figure2.3.

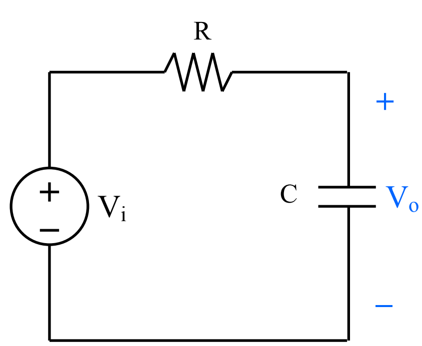


Fig. 2.3 – Filtre passe-bas (RC série)

On peut faire la même sorte d'analyse qualitative que pour le circuit RL série. À basses fréquences, la capacitance se comporte comme un circuit ouvert, et donc la tension aux bornes de la capacitance est la même qu'à la source. À hautes fréquences, la capacitance se comporte comme un court-circuit, et donc la tension est nulle à ses bornes, peut importe l'entrée. On fera une analyse plus détaillé à l'aide d'un exemple.

EXEMPLE 2

Soit le filtre RC série de la figure2.3.

1. Calculer la fonction de transfert de ce filtre.
2. Donner l'équation de la fréquence de coupure.
3. Choisir des valeurs de R et C pour obtenir un filtre passe-bas ayant une fréquence de coupure de 3kHz.

---

1. Pour calculer la fonction de transfert, il suffit d'appliquer un diviseur de tension (l'impédance du condensateur est $1/sC$) :

$$H(s) = \frac{1/RC}{s + 1/RC}$$

On fait la substitution $s = j\omega$ pour obtenir l'amplitude de la fonction de transfert :

$$|H(j\omega)| = \frac{1/RC}{\sqrt{\omega^2 + (1/RC)^2}}$$

2. Pour obtenir l'équation de la fréquence de coupure, il suffit d'isoler ω lorsque $H(j\omega) = 1/\sqrt{2}$.

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}(1) = \frac{1/RC}{\sqrt{\omega_c^2 + (1/RC)^2}}$$

On obtient :

$$\omega_c = \frac{1}{RC}$$

3. Selon l'équation obtenue pour la fréquence de coupure, on voit bien qu'on doit supposer la valeur de R ou C puis calculer l'autre valeur. Puisque les résistances sont beaucoup plus disponibles que des capacitances, on choisit en premier une capacitance à une valeur standard, comme $C = 1\mu$F. On obtient alors pour la résistance :

$$R = \frac{1}{\omega_c C} = \frac{1}{(2\pi)(3 \times 10^3)(1 \times 10^{-6})} = 53.05\Omega$$

Si on compare la fonction de transfert obtenue pour le circuit RL et pour le circuit RC, on obtient la forme générale suivante :

$$H(s) = \frac{\omega_c}{s + \omega_c} \tag{2.8}$$

N'importe quel circuit ayant une fonction de transfert de la même forme que l'équation précédente agira comme un filtre passe-bas.

Une autre relation importante à propos des deux filtres présentés est la relation entre la fréquence de coupure et la constante de temps. En effet, si on compare la constante de temps des circuits RL et RC série et leur fréquence de coupure, on obtient :

$$\tau = \frac{1}{\omega_c} \tag{2.9}$$

2.2.3 Filtre passe-bas actif

On peut aussi réaliser les filtres avec des circuits à ampli-op. L'avantage de ces circuit est qu'ils permettent d'amplifier les signaux voulus. Un filtre passe-bas à base d'ampli-op est présenté à la figure 2.4.

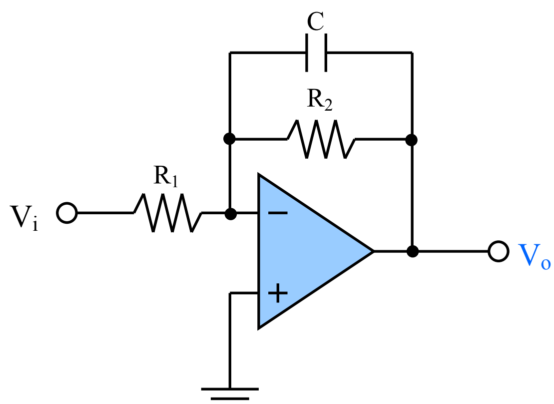


FIG. 2.4 – Filtre passe-bas avec ampli-op

On peut calculer la fonction de transfert de ce circuit :

$$H(s) = -\frac{Z_f}{Z_i} = -\frac{R_2//C}{R_1} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1/R_2C}{s + 1/R_2C} \tag{2.10}$$

ce qui est de la même forme que l'équation2.8, autre que le gain $-R_2/R_1$. La fréquence de coupure de ce filtre est

$$\omega_c = \frac{1}{R_2C} \tag{2.11}$$

Pour faire un design avec ce genre de filtre, il faut choisir les valeurs de R_2 et C en premier pour obtenir la fréquence de coupure voulue, puis choisir la résistance R_1 pour obtenir le gain désiré.

2.3 Filtres passe-haut

On analyse maintenant les filtres passe-haut. Il s'agit des même circuits que ceux vus à la section précédente, mais branchés différemment. On utilise le circuit RC série, RL série et avec ampli-op.

2.3.1 Filtre passe-haut RC série

Le premier filtre passe-haut étudié est le filtre RC série, à la figure 2.5. La configuration est presque la même que le filtre passe-base, sauf qu'on a échangé la résistance et la capacitance. La sortie est sur la résistance.

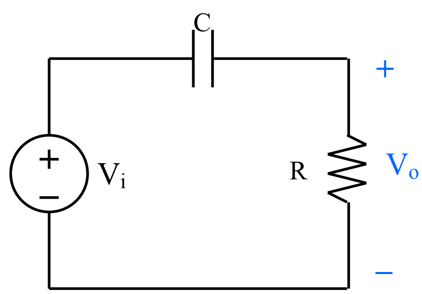


FIG. 2.5 – Filtre passe-haut RC série

On fait la même analyse qualitative de ce circuit : à basses fréquences, la capacitance agit comme un circuit ouvert, et donc aucune tension n'apparaît sur la résistance ; à hautes fréquences, la capacitance agit comme un court-circuit, et donc toute la tension apparaît à la résistance.

La fonction de transfert du circuit de la figure 3.5 est :

$$H(s) = \frac{s}{s + 1/RC} \tag{2.12}$$

ce qui donne, en termes de fréquence,

$$H(j\omega) = \frac{j\omega}{j\omega + 1/RC} \tag{2.13}$$

L'amplitude de la fonction de transfert est :

$$|H(j\omega)| = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + (1/RC)^2}} \tag{2.14}$$

et le déphasage est :

$$\theta(j\omega) = 90^{\circ} - \tan^{-1}\omega RC \tag{2.15}$$

Si on résout l'équation de l'amplitude pour obtenir la fréquence de coupure, on obtient :

$$\omega_c = \frac{1}{RC} \tag{2.16}$$

ce qui est la même fréquence de coupure que dans le cas du filtre passe-bas.

EXEMPLE 3

Analyser l'effet d'ajouter une charge au filtre RL passe-haut de la figure2.6.

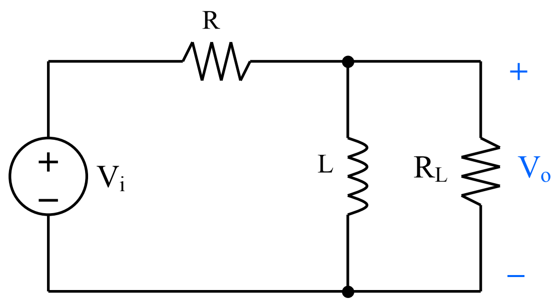


FIG. 2.6 – Filtre passe-haut RL série avec charge

1. Calculer la fonction de transfert sans la charge en premier.
2. Faire le design d'un filtre ayant une fréquence de coupure de 15kHz.
3. Calculer la fonction de transfert avec la charge.
4. Tracer le graphe de l'amplitude de la sortie en fonction de la fréquence pour les deux cas précédents (sans charge et avec charge), si on veut la même fréquence de coupure de 15kHz. Utiliser $R_L = R$. Commenter.

---

1. Sans la charge, la fonction de transfert est :

$$H(s) = \frac{sL}{R + sL} = \frac{s}{s + R/L}$$

L'amplitude est :

$$|H(j\omega)| = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + (R/L)^2}}$$

2. Pour un filtre de 15kHz, il faut premièrement trouver la fréquence de coupure du circuit. Si on isole ω dans l'équation de $H(j\omega) = 1/\sqrt{2}$, on obtient

$$\omega_c = \frac{R}{L}$$

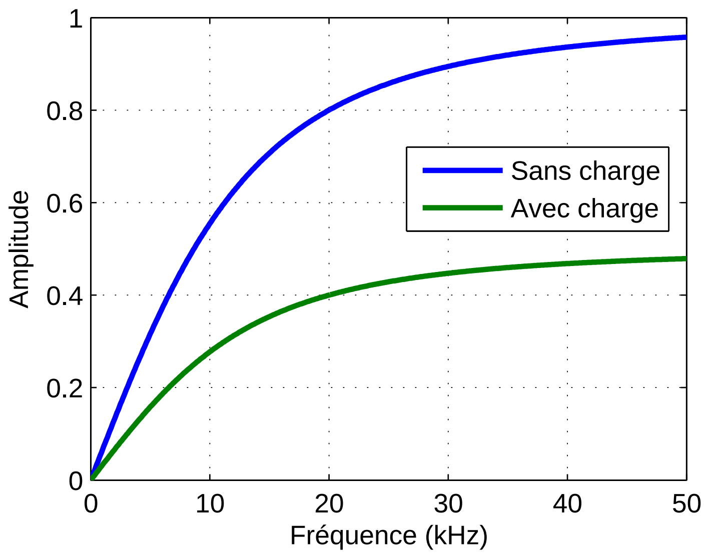
On choisit une valeur d'inductance, comme 5mH dans ce cas-ci. La résistance nécessaire sera alors de

$$R = \omega_c L = 2\pi(15 \times 10^3)(5 \times 10^{-3}) = 471\Omega$$

3. Avec charge, la fonction de transfert est :

$$H(s) = \frac{R_L//L}{R + L//R_L} = \frac{R_L}{R + R_L} \cdot \frac{s}{s + R/L}$$

4. Le graphe fut créé à l'aide de Matlab :



On voit bien que l'amplitude du circuit avec charge est plus faible, et que sa fréquence de coupure est plus faible aussi. Puisque le rapport $R_L/(R + R_L) = 1/2$, l'amplitude maximale du filtre avec charge est la moitié de l'amplitude sans charge, et sa fréquence de coupure est la moitié aussi.

Si on compare la fonction de transfert obtenue pour le circuit RC et pour le circuit RL, on obtient la forme générale suivante :

$$H(s) = \frac{s}{s + \omega_c} \tag{2.17}$$

N'importe quel circuit ayant une fonction de transfert de la même forme que l'équation précédente agira comme un filtre passe-haut.

2.3.2 Filtre actif passe-haut

Tout comme le filtre actif passe-bas, on peut réaliser un filtre actif passe-haut. Un filtre passe-haut à base d'ampli-op est présenté à la figure 2.7.

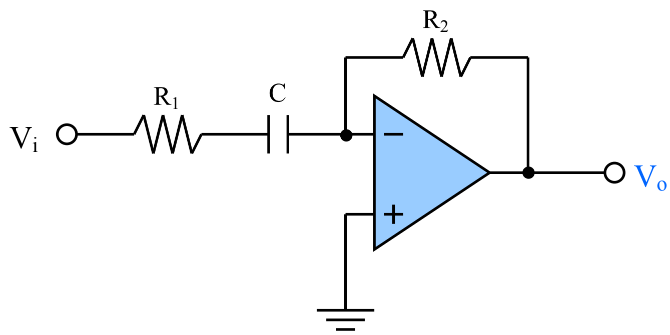


FIG. 2.7 – Filtre passe-haut avec ampli-op

On peut calculer la fonction de transfert de ce circuit :

$$H(s) = -\frac{Z_f}{Z_i} = -\frac{R_2}{R_1 + 1/sC} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{s}{s + 1/R_1C} \tag{2.18}$$

ce qui est de la même forme que l'équation 3.17, autre que le gain $-R_2/R_1$. La fréquence de coupure de ce filtre est

$$\omega_c = \frac{1}{R_1C} \tag{2.19}$$

Pour faire un design avec ce genre de filtre, il faut choisir les valeurs de R_1 et C en premier pour obtenir la fréquence de coupure voulue, puis choisir la résistance R_2 pour obtenir le gain désiré.

2.4 Filtres passe-bande

Le prochain type de filtre analysé sera le filtre passe-bande. Ce type de filtre permet de filtrer les fréquences qui sont en dehors de sa bande passante. Ce genre de filtre est un peu plus complexe que les autres filtres.

2.4.1 Caractéristiques

Les filtres passe-bande ont quelques caractéristiques additionnelles comparativement aux filtres passe-bas et passe-haut. Ces paramètres sont :

1. **Fréquence centrale** ω_o : C'est la fréquence à laquelle la fonction de transfert du filtre est purement réelle. On l'appelle aussi la fréquence de résonance~~. La~~ fréquence centrale est la moyenne géométrique des fréquences de coupure, $\omega_o = \sqrt{\omega_{c1}\omega_{c2}}$. Pour un filtre passe-bande, l'amplitude de la fonction de transfert est maximale à la fréquence centrale.

2. **Largeur de bande** β : C'est la largeur de la bande passante.
3. **Facteur de qualité** Q : C'est le rapport entre la fréquence centrale et la largeur de bande. Le facteur de qualité est une mesure de la largeur de la bande passante, indépendamment de la fréquence centrale.

2.4.2 Circuit RLC série

La figure 3.8 montre un filtre passe-bande RLC série. Comme les autres types de circuits, on peut faire une analyse qualitative en premier pour vérifier le fonctionnement de ce circuit. Noter que la sortie du filtre est au bornes de la résistance.

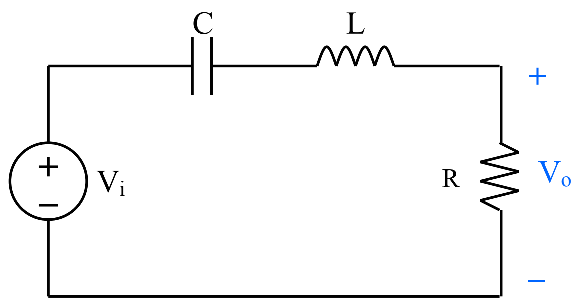


Fig. 2.8 – Filtre passe-bande RLC série

À basses fréquences, la capacitance agit comme un circuit ouvert, et donc aucun courant ne circule dans la résistance. À haute fréquences, l'inductance agit comme un circuit ouvert, empêchant un courant de circuit dans la résistance. Entre les hautes et basses fréquences, la capacitance et l'inductance permettent à l'entrée de se rendre à la sortie puisque leurs impédances ne sont pas trop élevées. À une certaine fréquence, l'impédance de la capacitance (qui est négative) annule l'impédance de l'inductance, l'amplitude de la fonction de transfert est réelle, et la tension à la sortie est la même que celle à l'entrée.

La figure 3.9 montre la réponse typique d'un filtre passe-bande. Les fréquences de coupure sont définies par les points où l'amplitude atteint 0.707 de la valeur maximale.

On peut faire une analyse quantitative du filtre RLC série pour déterminer les paramètres. La fonction de transfert du filtre est :

$$H(s) = \frac{s(R/L)}{s^2 + s(R/L) + 1/LC} \tag{2.20}$$

Comme d'habitude, on remplace $s = j\omega$ pour obtenir l'amplitude en fonction de la fréquence :

$$|H(j\omega)| = \frac{\omega(R/L)}{\sqrt{(1/LC - \omega^2)^2 + (\omega(R/L))^2}} \tag{2.21}$$

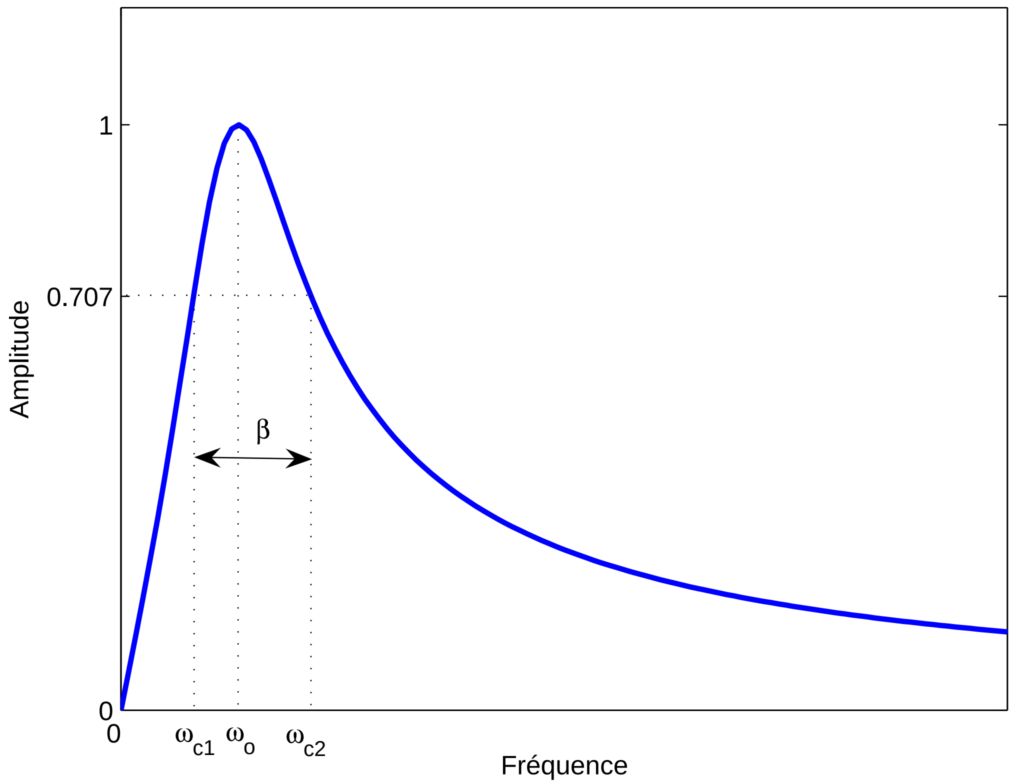


FIG. 2.9 – Réponse en fréquence d'un filtre passe-bande RLC série

et le déphasage est :

$$\theta(j\omega) = 90^{\circ} - \tan^{-1}\left(\frac{\omega(R/L)}{1/LC - \omega^2}\right) \tag{2.22}$$

On peut maintenant calculer les cinq paramètres qui caractérisent le filtre passe-bande. En premier, la fréquence centrale est définie comme étant la fréquence où la fonction de transfert est purement réelle. Ceci se produit au point où l'impédance de la capacitance annule celle de l'impédance, soit

$$j\omega L - \frac{j}{\omega C} = 0 \tag{2.23}$$

On résout pour obtenir

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{2.24}$$

Les fréquences de coupure sont calculées de la même façon que d'habitude, on isole ω pour $H(j\omega) = 1/\sqrt{2}$. Lorsqu'on effectue les calculs, on trouve 4 fréquences, mais seulement deux ont une signification physique. Les deux fréquences de coupure sont :

$$\omega_{c1} = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC}\right)} \tag{2.25}$$

$$\omega_{c2} = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC}\right)} \tag{2.26}$$

La largeur de bande du filtre est la différence entre ω_{c2} et ω_{c1}. On trouve donc

$$\beta = \omega_{c2} - \omega_{c1} = \frac{R}{L} \tag{2.27}$$

Le dernier paramètre à calculer est le facteur de qualité. Par définition,

$$Q = \frac{\omega_o}{\beta} = \sqrt{\frac{L}{R^2C}} \tag{2.28}$$

2.4.3 Filtres passe-bande actifs

Pour réaliser un filtre passe-bande actif, il suffit d'utiliser un filtre passe-bas en cascade avec un filtre passe-haut. La fréquence de coupure du filtre passe-bas doit être plus élevée que la fréquence de coupure du filtre passe-haut. On obtient le circuit de la figure 3.10. Noter qu'on ajoute généralement un amplificateur inversant à la sortie.

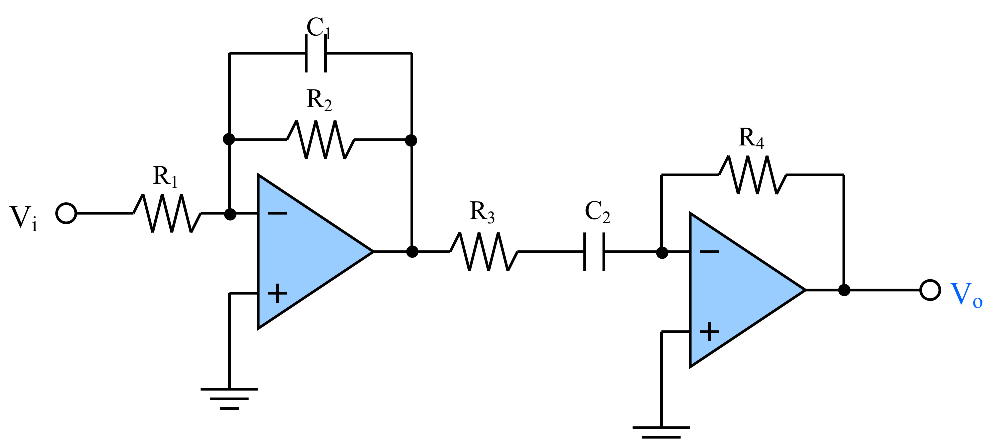


FIG. 2.10 – Filtre passe-bande actif

2.5 Filtres coupe-bande

Le dernier type de filtre étudié est le filtre coupe-bande. Ce genre de filtre permet de tout passer à la sortie sauf certaines fréquences. Un exemple d'application est un filtre qui permet d'éliminer un canal TV d'une transmission.

2.5.1 Filtre coupe-bande RLC série

Le premier circuit étudié est le circuit RLC série, montré à la figure 3.11. Il s'agit du même circuit que le passe-bande, sauf que la sortie est prise aux bornes de l'inductance et la capacitance en série.

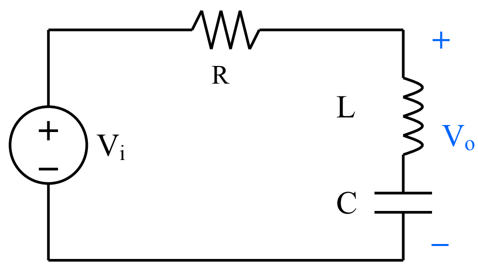


Fig. 2.11 – Filtre à élimination de bande RLC série

On fait en premier une analyse qualitative de ce circuit. À basses fréquences, la capacitance se comporte comme un circuit ouvert, et donc la tension de sortie est la même que celle de l'entrée. À haute fréquences, l'inductance se comporte comme un circuit ouvert, et la sortie est la même que l'entrée. À la fréquence de résonance, l'impédance de l'inductance annule l'impédance de la capacitance, et donc il y a court-circuit, et la sortie est nulle.

La réponse typique d'un filtre coupe-bande est montrée à la figure 2.12.

On peut faire maintenant une analyse quantitative du filtre coupe-bande RLC série. La fonction de transfert de ce circuit est :

$$H(s) = \frac{sL + 1/sC}{R + sL + 1/sC} = \frac{s^2 + 1/LC}{s^2 + s(R/L) + (1/LC)} \tag{2.29}$$

Et on obtient l'amplitude en remplaçant $s = j\omega$:

$$|H(j\omega)| = \frac{|1/LC - \omega^2|}{\sqrt{(1/LC - \omega^2)^2 + (\omega(R/L))^2}} \tag{2.30}$$

et le déphasage,

$$\theta(j\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega(R/L)}{1/LC - \omega^2}\right) \tag{2.31}$$

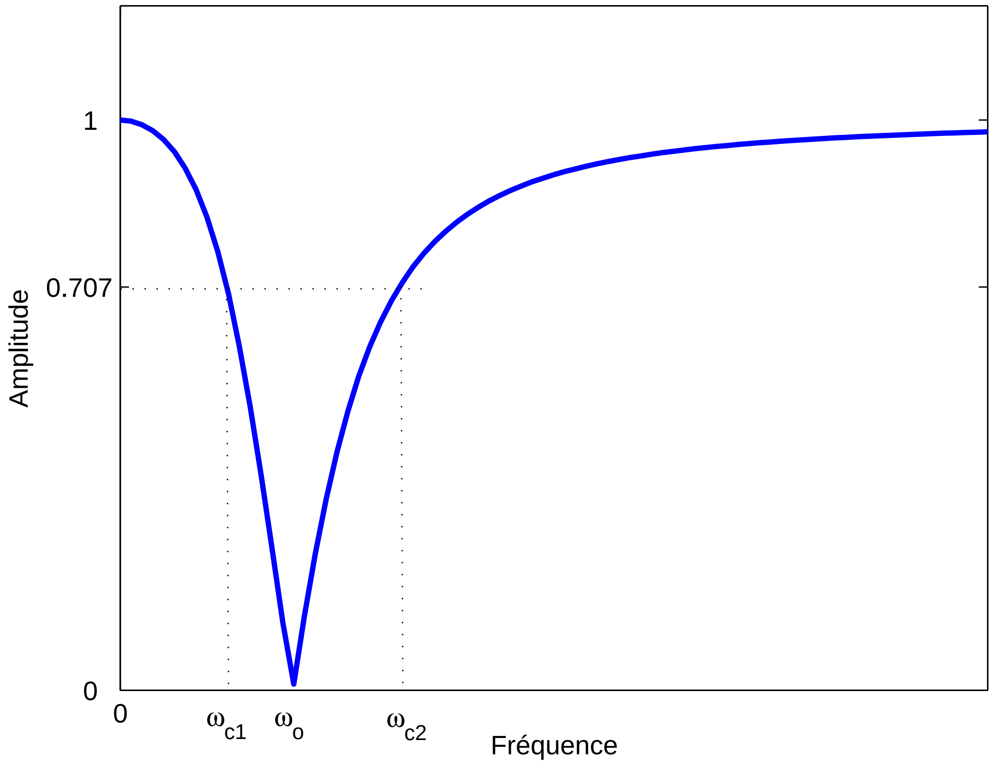


FIG. 2.12 – Réponse typique d'un filtre à élimination de bande RLC série

La fréquence centrale du filtre est la même que celle du filtre passe-bande,

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{2.32}$$

Les fréquences de coupure sont les même que celle du filtre passe-bande. Les deux fréquences de coupure sont :

$$\omega_{c1} = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC}\right)} \tag{2.33}$$

$$\omega_{c2} = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC}\right)} \tag{2.34}$$

La largeur de bande du filtre est la différence entre ω_{c2} et ω_{c1}. On trouve donc

$$\beta = \frac{R}{L} \tag{2.35}$$

Le dernier paramètre à calculer est le facteur de qualité,

$$Q = \sqrt{\frac{L}{R^2C}} \tag{2.36}$$

La forme générale d'un filtre coupe-bande est :

$$H(s) = \frac{s^2 + \omega_o^2}{s^2 + s\beta + \omega_o^2} \tag{2.37}$$

2.5.2 Filtre coupe-bande actif

De la même façon que le filtre passe-bande actif, on peut construire un filtre coupe-bande actif en utilisant un filtre passe-bas et un filtre passe-haut. Ce filtre aura trois caractéristiques importantes :

1. Le gain du filtre passe-bas est unitaire, et sa fréquence de coupure sera la plus petite des deux fréquences de coupure.
2. Le filtre passe-haut aura un gain unitaire aussi, et sa fréquence de coupure est la plus élevée des deux.
3. Le gain de l'amplificateur donne le gain voulu dans la bande passante.

La plus grosse différence est que ces circuits sont en parallèle et non en cascade comme c'est le cas pour le filtre passe-bande. On utilise un amplificateur à sommation à la sortie. Le circuit est montré à la figure 3.13.

2.6 Diagrammes de Bode

Le diagramme de Bode est une méthode pour tracer rapidement la réponse d'un filtre en termes de fréquence. Ils sont nommés ainsi à cause du travail fondamental de H.W. Bode dans les années 40. Le diagramme de Bode a deux composantes : une partie pour l'amplitude, et l'autre partie pour la phase.

Le diagramme de Bode est basé sur le décibel (dB). Le décibel est une unité de mesure logarithmique. On transforme l'amplitude de la fonction de transfert en utilisant l'équation suivante :

$$A_{dB} = 20\log_{10}|H(j\omega)| \tag{2.38}$$

Par exemple, un gain de 1 correspond à 0dB.

Un des avantages du décibel est que les gains plus grands que 1 sont positifs (en dB) tandis que les gains plus petits que 1 (donc une atténuation) sont négatifs. Il est donc facile de savoir si le système atténue ou amplifie certains signaux.

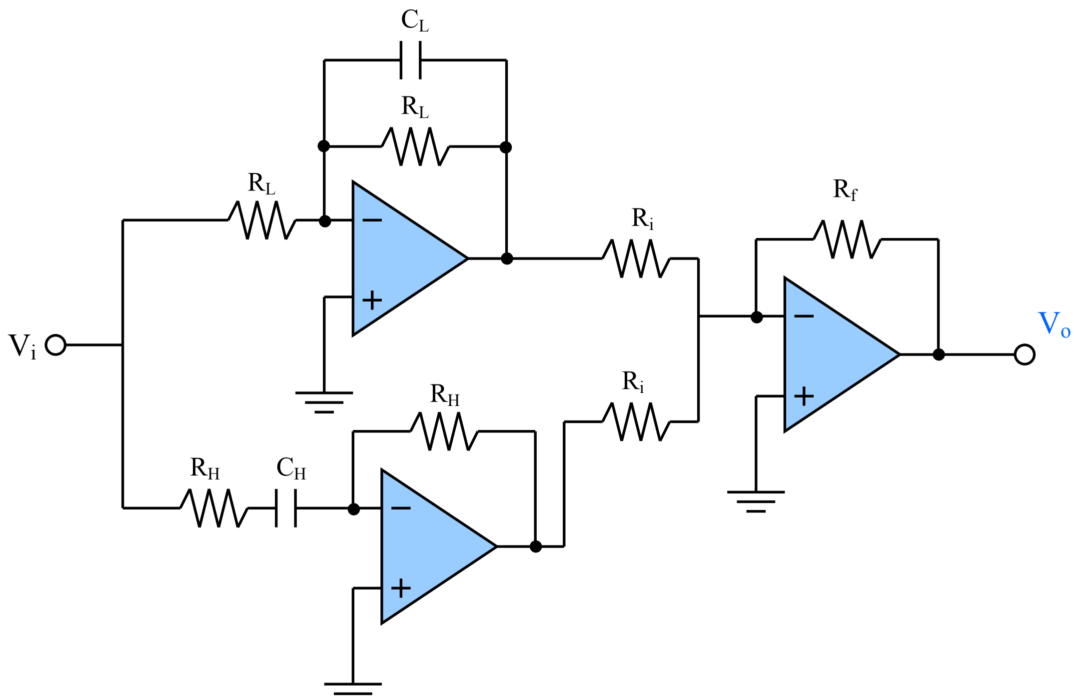


FIG. 2.13 – Filtre à élimination de bande actif

On commence en premier en analysant un système simple, où il n'y a qu'un seul pôle et un seul zéro. Ce type de système aura la forme :

$$H(s) = \frac{K(s + z_1)}{s + p_1} \tag{2.39}$$

Si on transforme l'équation précédente en termes de fréquence, on obtient :

$$H(j\omega) = \frac{Kz_1(1 + j\omega/z_1)}{p_1(1 + j\omega/p_1)} \tag{2.40}$$

Parce qu'on utilise des décibels, si on multiplie des termes dans la fonction de transfert, on les additionne sur le graphique de Bode (puisque c'est des logarithmes). Donc pour notre fonction de transfert, on a :

$$\begin{aligned} A_{dB} &= 20\log_{10}\frac{Kz_1(1 + j\omega/z_1)}{p_1(1 + j\omega/p_1} \\ &= 20\log_{10} K_o + 20\log_{10}|1 + j\omega/z_1| - 20\log_{10}|1 + j\omega/p_1| \end{aligned} \tag{2.41}$$

où $K_o = Kz_1/p_1$.

On prend le premier terme, $20\log_{10} K_o$, qu'on veut tracer sur un graphe. Pour l'amplitude de cette composante, il s'agira d'un ligne droite, puisque l'amplitude ne dépend pas de la fréquence. L'amplitude sera positive pour $K_o > 1$, zéro pour $K_o = 1$, et négative pour $K_o < 1$.

Pour le deuxième terme, $20\log_{10}|1+j\omega/z_1|$, on va le diviser en deux parties. Pour des faibles valeurs de ω, l'amplitude $|1+j\omega/z_1|$ sera environ 1, donc une ligne droite à 0dB. On obtient :

$$20\log_{10}|1+j\omega/z_1| \rightarrow 0 \text{ lorsque } \omega \rightarrow 0 \tag{2.42}$$

Pour des grandes valeurs de ω, l'amplitude $|1+j\omega/z_1|$ sera approximativement ω/z_1. Graphiquement, ceci équivaut à tracer une ligne droite ayant une pente de 20dB/décade (une décade est un facteur de 10 des fréquences).

Le graphe du deuxième terme est donné à la figure 2.14. On fait une approximation linéaire : pour $\omega < z_1$, le graphe est une ligne droite, et pour $\omega > z_1$, c'est une ligne ayant une pente de 20dB/décade.

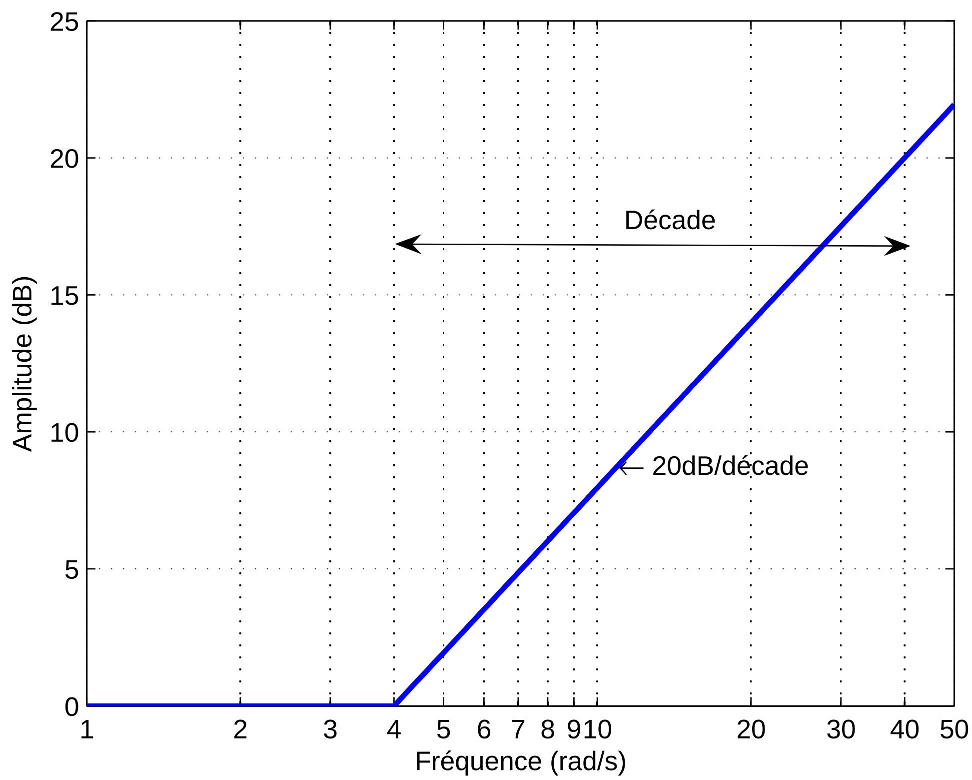


FIG. 2.14 – Exemple de diagramme de Bode pour $z_1 = 4$

L'analyse du troisième terme est presque la même que celle du deuxième terme, sauf que la pente sera négative cette fois. On obtient alors la figure 3.15. On fait ici aussi une approximation linéaire : pour $\omega < p_1$, le graphe est une ligne droite, et pour $\omega > p_1$, c'est une ligne ayant une pente de -20dB/décade.

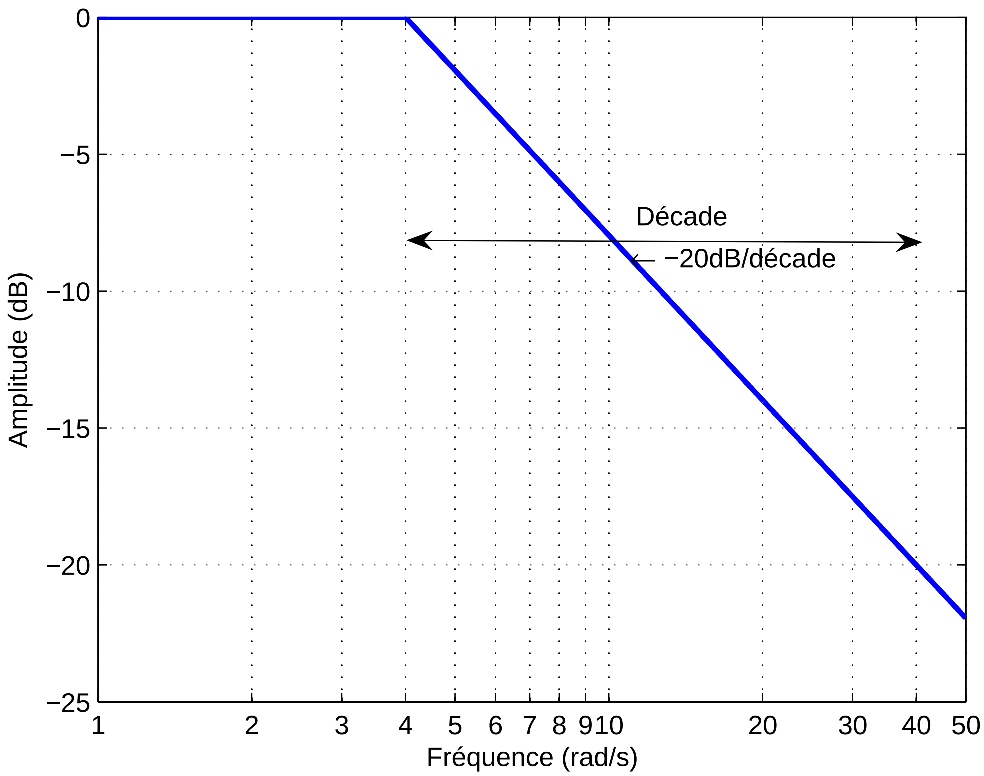


FIG. 2.15 – Exemple de diagramme de Bode pour $p_1 = 4$

Phase

On peut aussi faire des approximations pour les diagrammes de phase. Les diagrammes de phase sont un peu plus simples. Pour une composante constante, comme $20 \log_{10} K_o$, la phase est nulle. S'il s'agit d'un zéro, on construit le graphe comme suit :

1. Pour les fréquences plus faibles qu'un décade de moins que le zéro, la phase est nulle.
2. Pour les fréquences plus élevées qu'un décade de plus que le zéro, la phase est $+90^{\circ}$.
3. Entre les deux, on trace une ligne droite. La phase au zéro est 45°.

Pour un pôle, la procédure est la même, sauf que la phase est -90° à un décade au-dessus du pôle, et la phase est -45° au pôle.

On peut voir un exemple pour un zéro à $z_1 = 4$ à la figure 3.16. Remarquer que la phase est 45° à 4rad/s, tandis qu'elle est nulle en dessous de 0.4 rad/s, et 90° au-dessus de 40 rads/s.

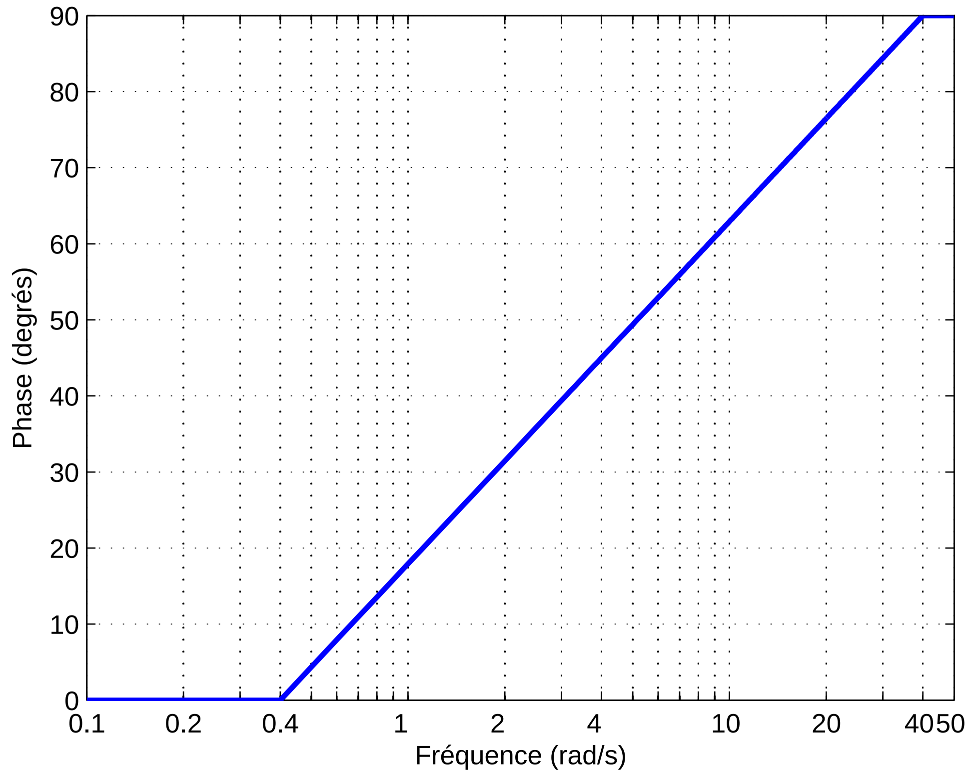


FIG. 2.16 – Exemple de diagramme de Bode (phase) pour $z_1 = 4$

2.6.1 Matlab

Il est très facile d'obtenir des diagrammes de Bode à l'aide de Matlab®. La boîte à outils *Control Systems Toolbox* possède tous les outils nécessaires pour faire le diagramme de Bode.

On fera ici l'exemple d'un système quelconque de premier ordre, dans ce cas-ci

$$H_1(s) = \frac{s+2}{s+12} \tag{2.43}$$

La première étape dans Matlab est de construire la fonction de transfert. Ceci est accompli en utilisant la commande `tf`. La nomenclature est `tf(num,den)` où `num` est un vecteur qui décrit le numérateur et `den` est un vecteur qui décrit le dénominateur.

Dans notre exemple, la commande en Matlab est :

```
>> sys = tf([1 2],[1 12])

Transfer function:
```

```
s + 2
------
s + 12
```

Ensuite, pour tracer le diagramme de Bode, on utilise la commande `bode(sys)` où `sys` est la variable qui décrit le système. En Matlab,

```
>> bode(sys)
```

donne la figure 3.17.

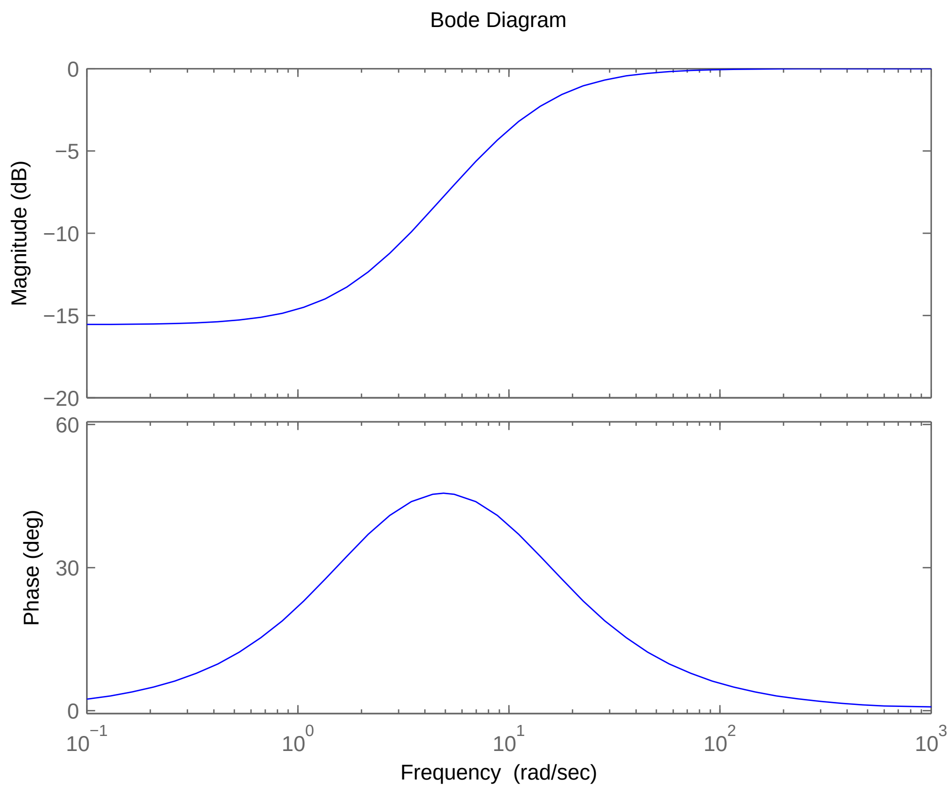


FIG. 2.17 – Exemple de diagramme de Bode (amplitude et phase) avec Matlab