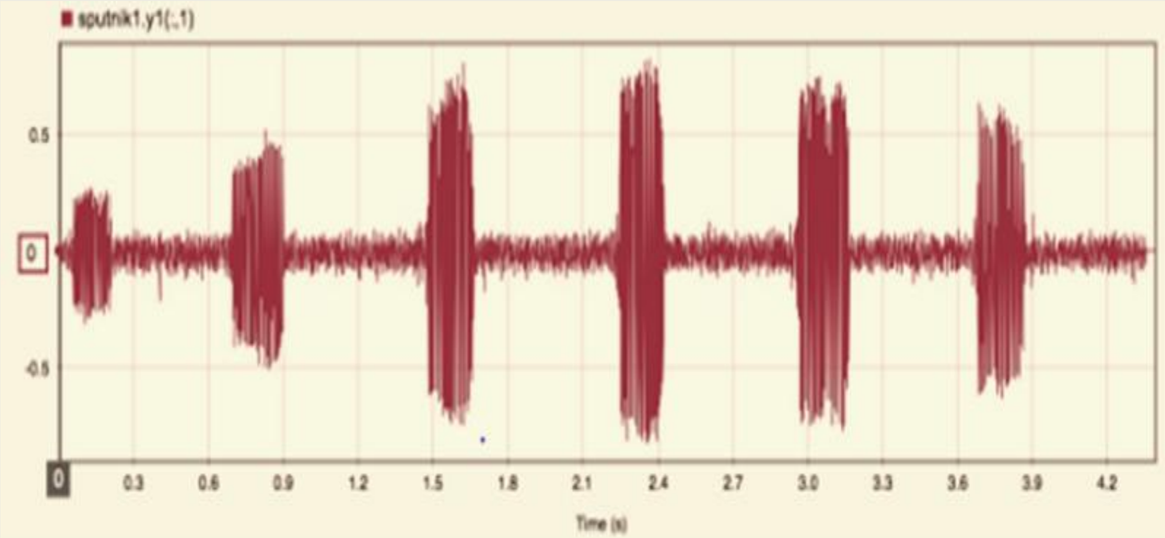
COURS DE TRAITEMENT DU SIGNAL

(SIGNAL PROCESSING)

CHAPITRE III

CLASSIFICATION DES SIGNAUX

(Rappels de cours et exercices corrigé)



Premier signal extra-terrestre créé par l'homme (Bip-Bip émis par Spoutnik 1)

By
Djeddi Mabrouk

INTRODUCTION

Les signaux peuvent être classés suivant diverses approches (selon différents modes), ce qui induit des recouvrements entre les différents modes de classification . Dans ce qui suit, nous intéresserons exclusivement aux signaux déterministes à une dimension généralement le temps ***t*.**

I (CLASSIFICATION PHENOMENOLOGIQUE

La Classification phénoménologique est basée sur l'évolution du signal en fonction du temps. Elle met en évidence le type d'évolution du signal, son caractère prédéterminé ou son comportement non prévisible. Dans cette classification l'ensemble des signaux peut être décomposé en deux grandes familles :

– Les signaux déterministes (ou certains).
– Les signaux aléatoires (non déterministes).

Les signaux certains

Le qualificatif de déterministe est destiné pour définir les signaux dont on peut expliquer l'allure temporelle. Cela suppose que leur évolution en fonction du temps peut être parfaitement décrite à l'aide d'un modèle mathématique. Cela présume aussi que les signaux déterministes résultent de phénomènes pour lesquels on connait les lois physiques correspondantes et les conditions initiales, permettant de la sorte de prédire l'aboutissement c'est –à - dire que l'on peut connaitre leurs valeurs à tout moment. Exemple, le cas d'un signal électrique fourni par un générateur qu'on aurait régler à une certaine amplitude et fréquence.

Les signaux déterministes peuvent être classés en signaux : (tableau 1)

– Périodiques
– Non périodiques et non permanents

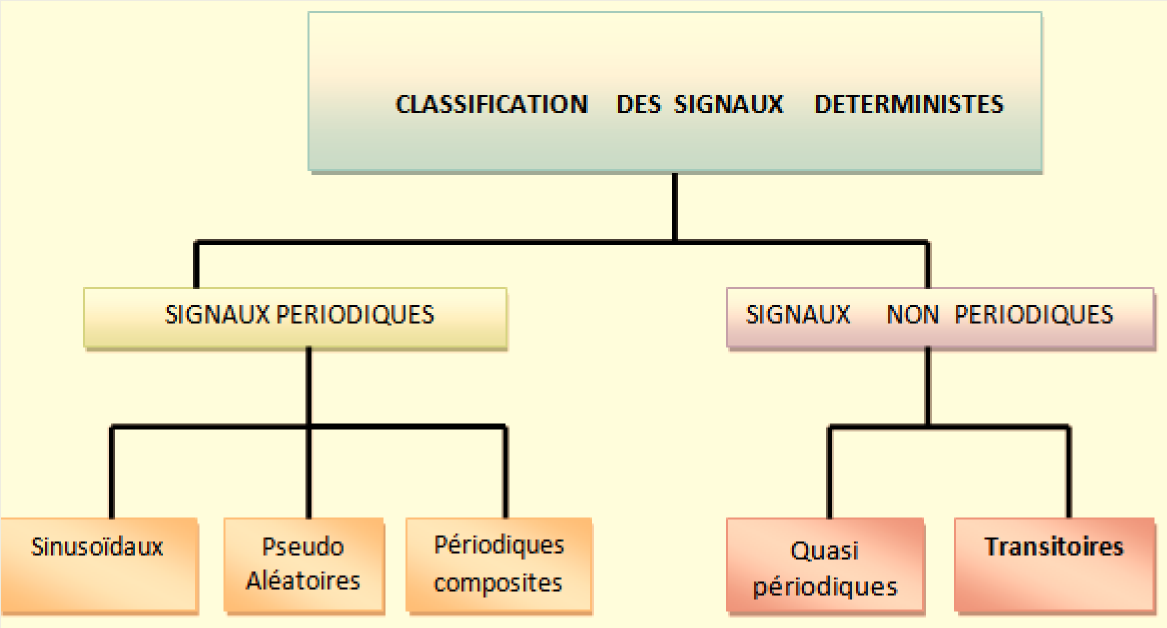


Tableau 1 : classification des signaux selon leur caractère deterministe

Les signaux périodiques

Les signaux périodiques sont des signaux dont la forme se répète à des intervalles de temps régulier. Ils obéissent à la condition suivante :
$\boldsymbol{S(t) = S(t + nT)}$, ou $\boldsymbol{T}$ est la période de répétition fig.1.
Les signaux périodiques regroupent en signaux :

- Sinusoïdaux,
- périodiques - composites
- Pseudo –aléatoires

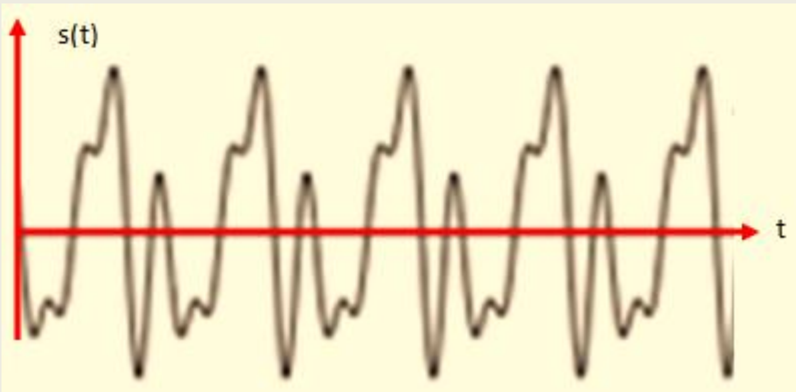


Fig.1 Exemple d'un signal périodique quelconque

Les signaux sinusoïdaux

Le signal sinusoïdal est le plus typique des signaux périodiques. Il a une grande importance en physique et plus particulièrement en :

- **Analyse du signal** : les signaux périodiques peuvent être décomposés en une somme de signaux sinusoïdaux (théorie de Fourier).

- **Transmission du signal** : les porteuses utilisées pour transporter l'information sont de caractère sinusoïdal (téléphone portable, TV, FM etc.)

- **Électrotechnique** : l'énergie électrique (dans la plupart des cas) est produite et répartie sous forme de signaux alternatifs sinusoïdaux.

Analyse des signaux sinusoïdaux

Soit un signal sinusoïdal ayant pour expression :

$$\boldsymbol{S(t) = ASin(\omega t + \varphi) = A\,Sin(2\pi f t + \varphi) = A\,Sin\,(\frac{2\pi}{T}t + \varphi)}$$

$\boldsymbol{A}$: Amplitude de la sinusoïde
$\boldsymbol{\omega = 2\pi f = 2\pi/T}$: Pulsation propre du signal en rad/s
$\boldsymbol{\varphi}$: Phase de la sinusoïde en radian.

Déphasage entre deux signaux sinusoïdaux

Pour deux signaux Sinusoïdaux de même fréquence :

$$\boldsymbol{S_1(t) = A_1 cos\,(2\pi f t + \varphi_1)}$$

$$\boldsymbol{S_2(t) = A_2 cos\,(2\pi f t + \varphi_2)}$$

Le déphasage entre ces deux signaux est :

$$\Delta\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi_2 - \varphi_1}$$

Le déphasage $\Delta\boldsymbol{\varphi}$ entre deux signaux de même fréquence correspond à leur décalage temporel $\Delta\boldsymbol{t}$

$$\Delta\boldsymbol{\varphi} = \frac{\mathbf{360\,.\,\Delta t}}{\boldsymbol{T}} \text{ (En degrés)} \quad , \quad \frac{\Delta\boldsymbol{\varphi}}{\mathbf{360}} = \frac{\Delta\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{T}}$$

$$\Delta\boldsymbol{\varphi} = \frac{\boldsymbol{2\pi.\Delta t}}{\boldsymbol{T}} \text{ (En radians)} \quad , \quad \frac{\Delta\boldsymbol{\varphi}}{\boldsymbol{2\pi}} = \frac{\Delta\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{T}}$$

Addition des Signaux sinusoïdaux

Calcul de la periode globale

Pour determiner la periode du signal resultant de la somme de deux signaux sinusoidaux de periode $\boldsymbol{T_1}$ et $\boldsymbol{T_2}$, il suffit de trouver le plus petit commun multiple (**PPCM**) de $\boldsymbol{T_1}$ et $\boldsymbol{T_2}$.

Calcul de l'amplitude du signal résultant

Considérons $S_1(t)$ et $S_2(t)$ deux signaux de même periode , de différentes amplitudes a_1, a_2 et de differentes phases initiales α_1 *et* α_2:

$$S_1(t) = a_1 \cos(\omega t + \alpha_1) \quad \text{et} \quad S_2(t) = a_2 \cos(\omega t + \alpha_2)$$

L'amplitude du signal résultant $S(t)$ est :

$$S(t) = S_1(t) + S_2(t) = a_1 \cos(\omega t + \alpha_1) + a_2 \cos(\omega t + \alpha_2) =$$

$$a_1 \cos(\alpha_1) \cos(\omega t) - a_1 \sin(\alpha_1) \sin(\omega t) + a_2 \cos(\alpha_2) \cos(\omega t)$$

$$- a_2 \sin(\alpha_2) \sin(\omega t)$$

$$= [a_1 \cos(\alpha_1) + a_2 \cos(\alpha_2)] \cos(\omega t) - [a_1 \sin(\alpha_1) + a_2 \sin(\alpha_2)] \sin(\omega t)$$

comme $\cos(\alpha_1 + \alpha_2) = \cos(\alpha_1) \cos(\alpha_2) - \sin(\alpha_1) \sin(\alpha_2)$

L'amplitude de $S(t)$ est alors **:**

$$a^2 = [a_1 \cos(\alpha_1) + a_2 \cos(\alpha_2)]^2 + [a_1 \sin(\alpha_1) + a_2 \sin(\alpha_2)]^2 =$$

$$a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)$$

Ainsi , il s'en suit que le signal résultant de la somme de deux sinusoides de même fréquence a pour amplitude donnée par la formule des interférences.

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)}$$

l'analyse de cette formule permet de 3 distinguer **3** cas :

1 – lorsque $\cos(\alpha_1 - \alpha_2) = \cos\Delta\alpha = 1$ (avec $\Delta\alpha = 2\pi.n$ (n entier), l'amplitude résultante des deux signaux sinusoidaux de même fréquence est maximale d'une part et de ils sont en phase d'autre part . On a donc :

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2} = \sqrt{(a_1 + a_2)^2} = a_1 + a_2$$

2 – lorsque $\cos(\alpha_1 - \alpha_2) = \cos\Delta\alpha = -1$ (avec $\Delta\alpha = \pi + 2\pi.n$, (n entier), l'amplitude résultante des deux signaux sinusoidaux de même fréquence est minimale d'une part et de ils sont en opposition de phase d'autre part .

On a donc :

$$a_{min} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2} = \sqrt{(a_1 - a_2)^2} = |a_1 - a_2|$$

3 – lorsque les deux sinusoides ont des amplitudes égales soit $a_1 = a_2$,on a :

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_1^2 + 2a_1\, a_1 \cos\Delta\alpha} = \sqrt{2a_1^2 +. 2a_1^2 \cos\Delta\alpha} = a_1\sqrt{2 + 2\cos\Delta\alpha}$$

$$= a_1\sqrt{2(1 + \cos\Delta\alpha)} = a_1\sqrt{4\cos^2\frac{\Delta\alpha}{2})} = 2a_1\left|\cos\frac{\Delta\alpha}{2}\right|$$

En utilisant la formule : $1 + \cos\Delta\alpha = 2\cos^2(\frac{\Delta\alpha}{2})$

ce qui conduit à : $a_{max} = 2\, a_1$ et $a_{min} = 0$

Les Signaux périodiques composites

Un signal périodique composite est un signal qui résulte de la somme de signaux périodiques dont le rapport de leur période est rationnel.
La figure 2 représente l'exemple d'un signal périodique composite dont les motifs se répètent à l'infini.

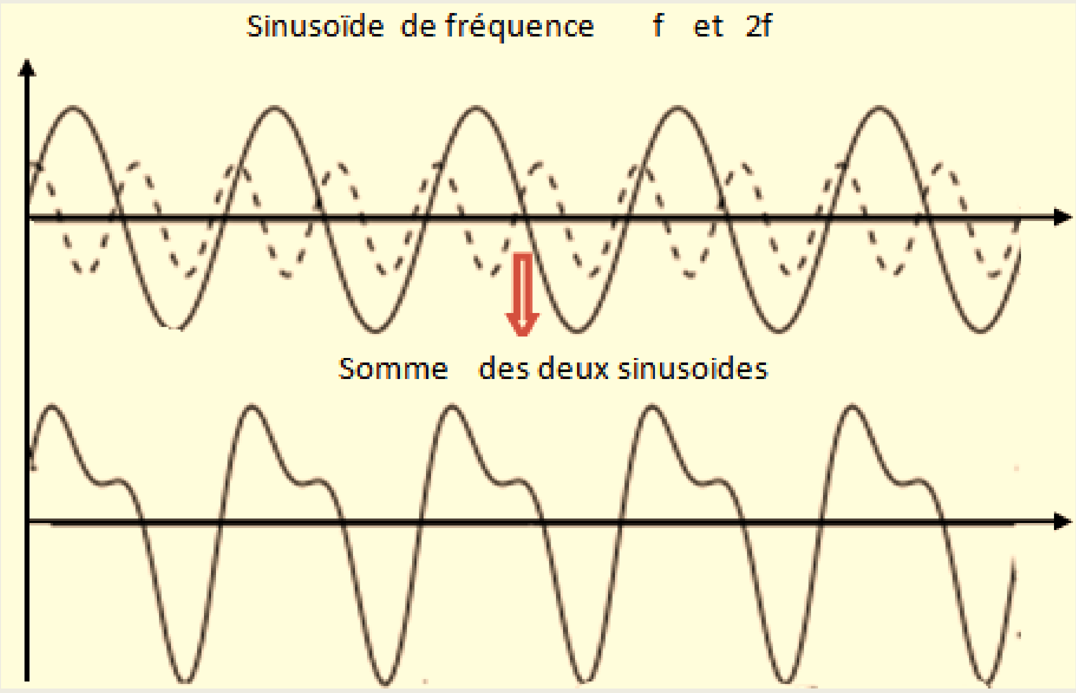


Fig.2 : Exemple de la somme de deux sinusoïdes de fréquences **f** et **2f** dans le domaine temporel (signal composite)

La somme de deux signaux périodiques de même période T est un signal périodique de même période T.

Signaux pseudo –aléatoires

Cette catégorie de signaux représente un signal aléatoire qui se répète. Le signal est constitué de signaux périodiques mais dans chaque période, il ya des phénomènes aléatoires.fig.3

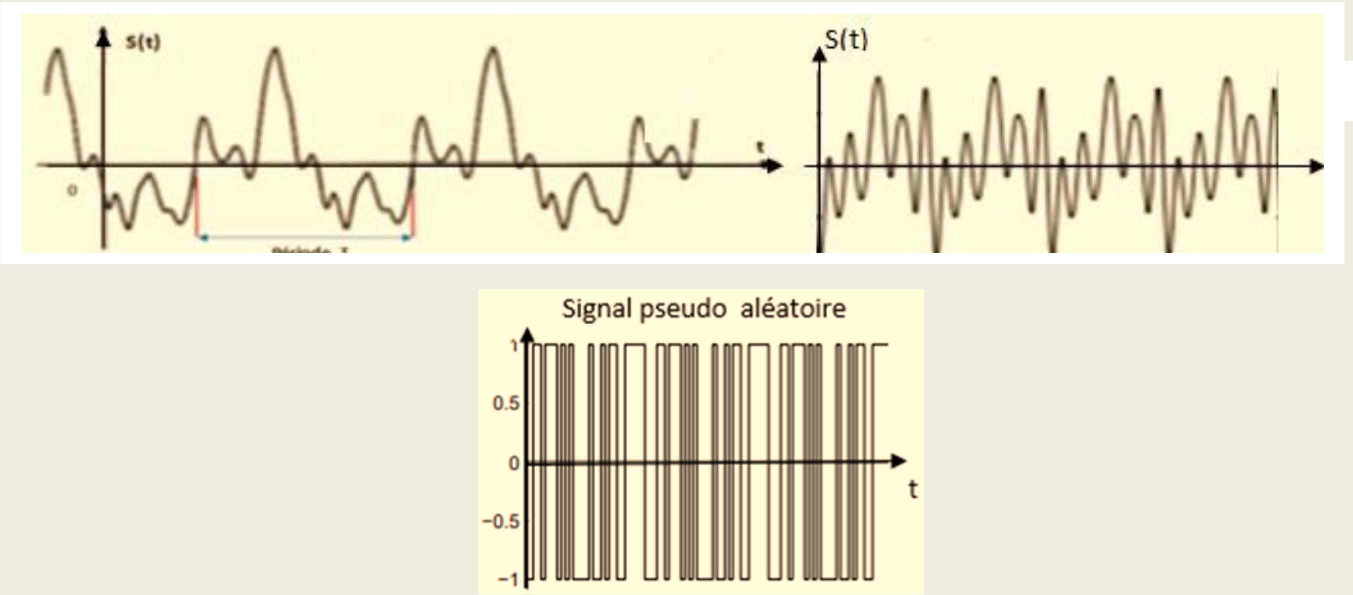


Fig.3. Exemple de 3 signaux pseudo –aléatoires

Signaux quasi-périodiques

Ils résultent d'une somme ou d'un produit de deux signaux sinusoïdaux de périodes différentes dont le rapport n'est pas rationnel .Ainsi, le signal suivant est un signal quasi-périodique. fig.4

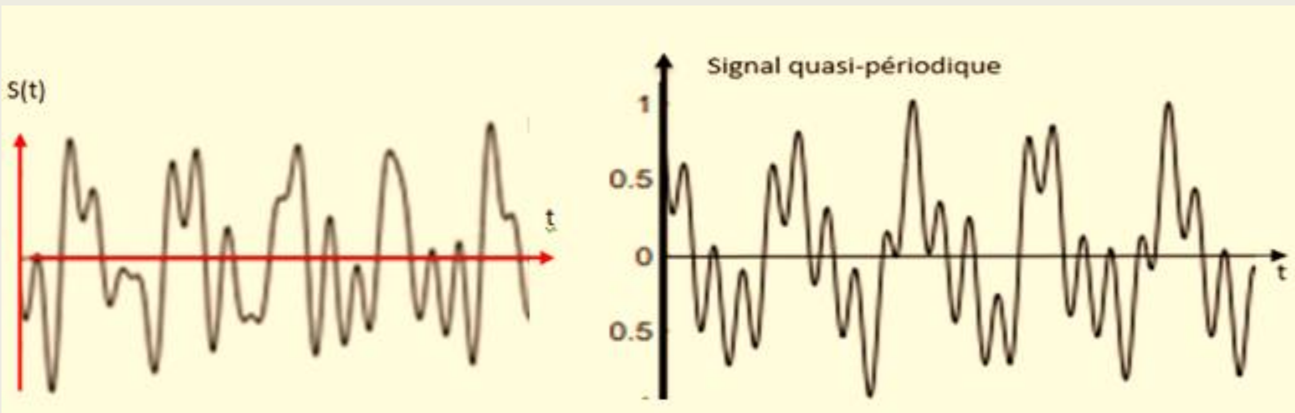
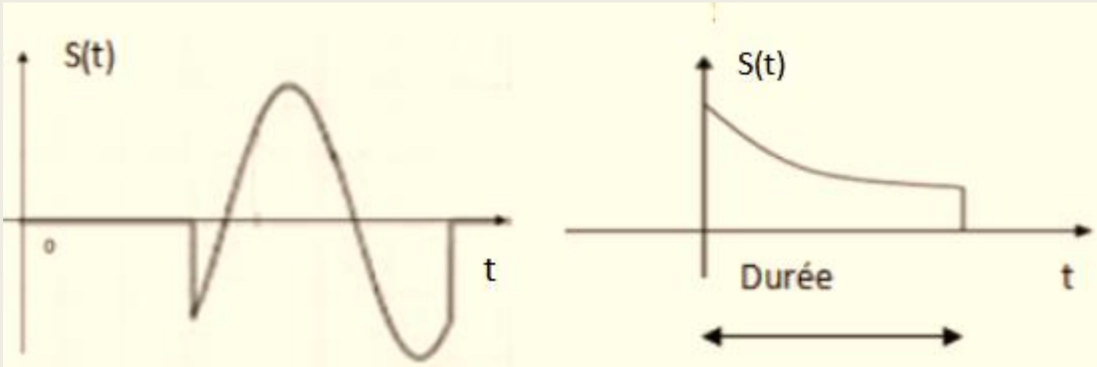


Fig.4. exemple de 2 Signaux quasi –périodiques

Signaux non périodiques

Un signal $\boldsymbol{S(t)}$ pour lequel il n'existe aucune valeur de $\boldsymbol{T}$ satisfaisant la condition de périodicité est dit signal apériodique ou encore un signal non périodique. C'est une catégorie de signaux représentée essentiellement par des signaux transitoires dont l'existence est éphémère c'est à dire que leur l'existence est limitée dans le temps (amplitude nulle en dehors d'un certain intervalle de temps) .La figure 5 représente deux signaux transitoires (cas des décharges de capacité dans un condensateur par exemple).



$\not\subset$

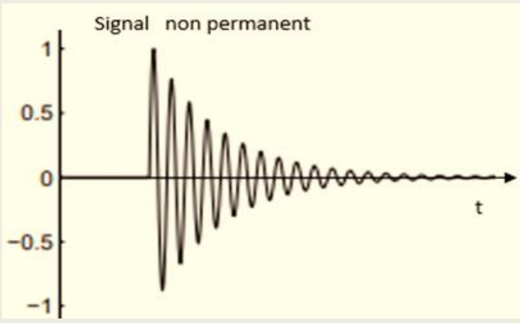


fig.5 : Exemple de signaux transitoires

Signaux à support borné

On dit qu'un signal $\boldsymbol{S(t)}$ est à support borné ou de durée finie (limitée) si ses amplitudes s'annulent en dehors de l'intervalle (t_1 , t_2) fig.6 , soit $S(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{0}$ pour $\boldsymbol{t} \notin [\boldsymbol{t_1} , \boldsymbol{t_2}]$.Dans la pratique tous les signaux physiques observés sont à support fini ou à support borné.

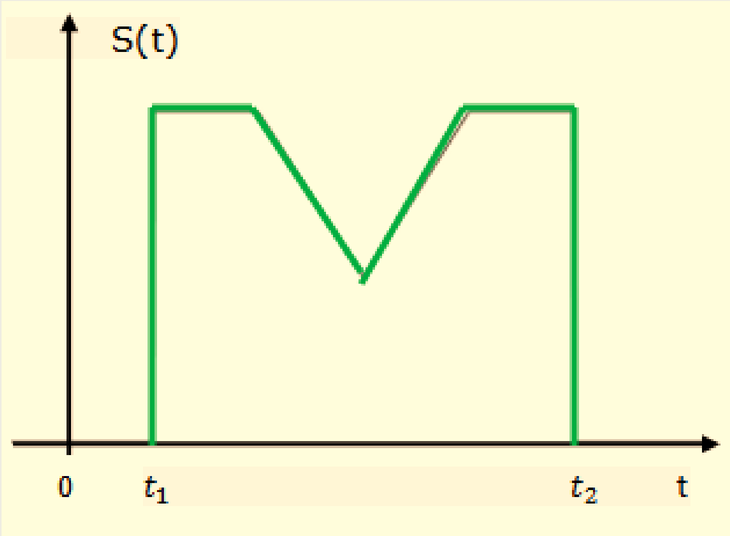


Fig.6. Exemple d'un Signal à support borné

LES SIGNAUX ALEATOIRES

Un signal aléatoire est un processus incertain (stochastique), c'est à dire l'évolution d'une variable aléatoire en fonction du temps. Cela implique que sa connaissance à l'instant $\boldsymbol{t}$ ne permet pas de prévoir sa valeur à l'instant $\boldsymbol{t} + \Delta\boldsymbol{t}$.Tout signal aléatoire évolue d'une manière imprévisible et non reproductible d'une expérience à l'autre. Il ne peut pas faire l'objet d'une description analytique, sa seule description repose sur les propriétés statistiques telles que la moyenne, la variance, la loi de probabilité etc.)

Les signaux aléatoires se divisent en deux classes (tableau .2) :

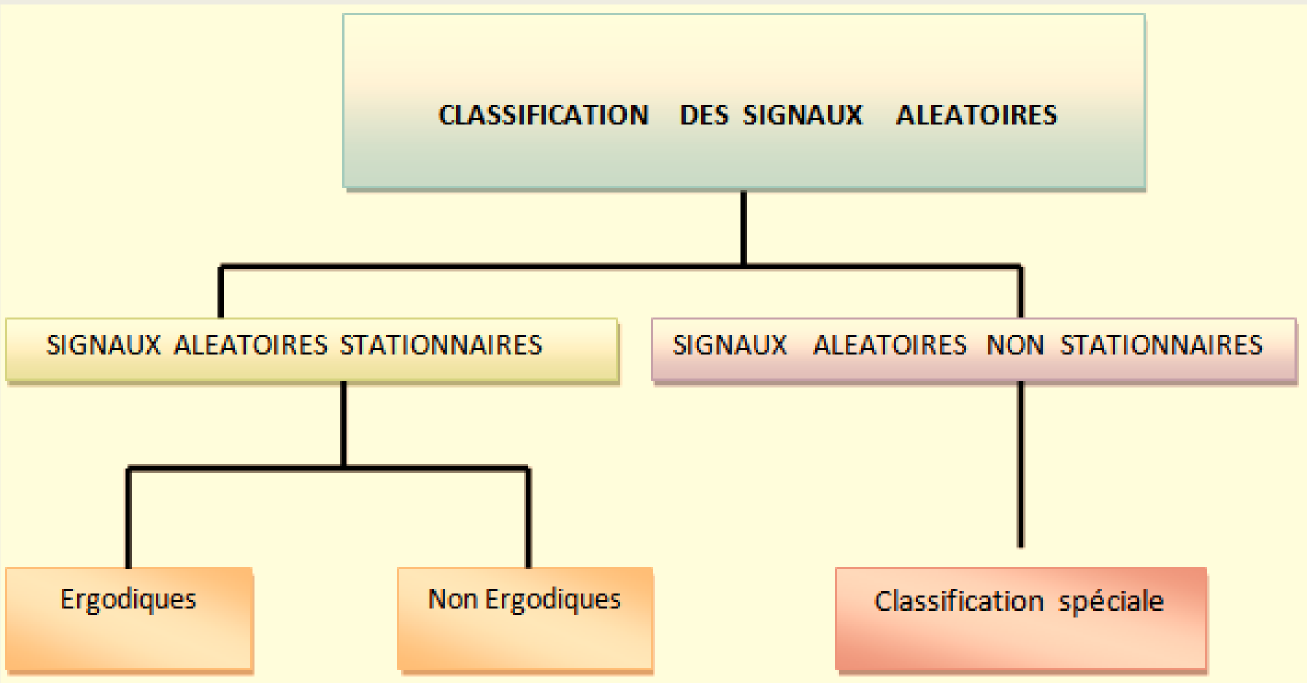


Tableau 2 classification des signaux aléatoires

Les signaux aléatoires stationnaires

Cette classe regroupe les signaux dont les caractéristiques aléatoires ne se modifient pas au cours du temps (toutes les propriétés statistiques sont invariantes par rapport aux changements arbitraires de l'origine).Ils ont les mêmes valeurs statistiques en t_1 ou en t_2 . C'est le cas par exemple du bruit électronique.

Cette catégorie de signaux se subdivise en :

1 – Signaux aléatoires stationnaires ergodiques

Cette catégorie de signaux possède les valeurs moyennes statistiques égales aux valeurs moyennes temporelles. (Fig. 7a)

2–Signaux aléatoires non ergodiques

3 – Signaux aléatoires non stationnaires.

Cette classe forme une catégorie spéciale (complexe).Les signaux aléatoires non stationnaires sont des signaux dont le contenu statistique évolue au cours du temps : par exemple : la parole.(fig.7b ,c)

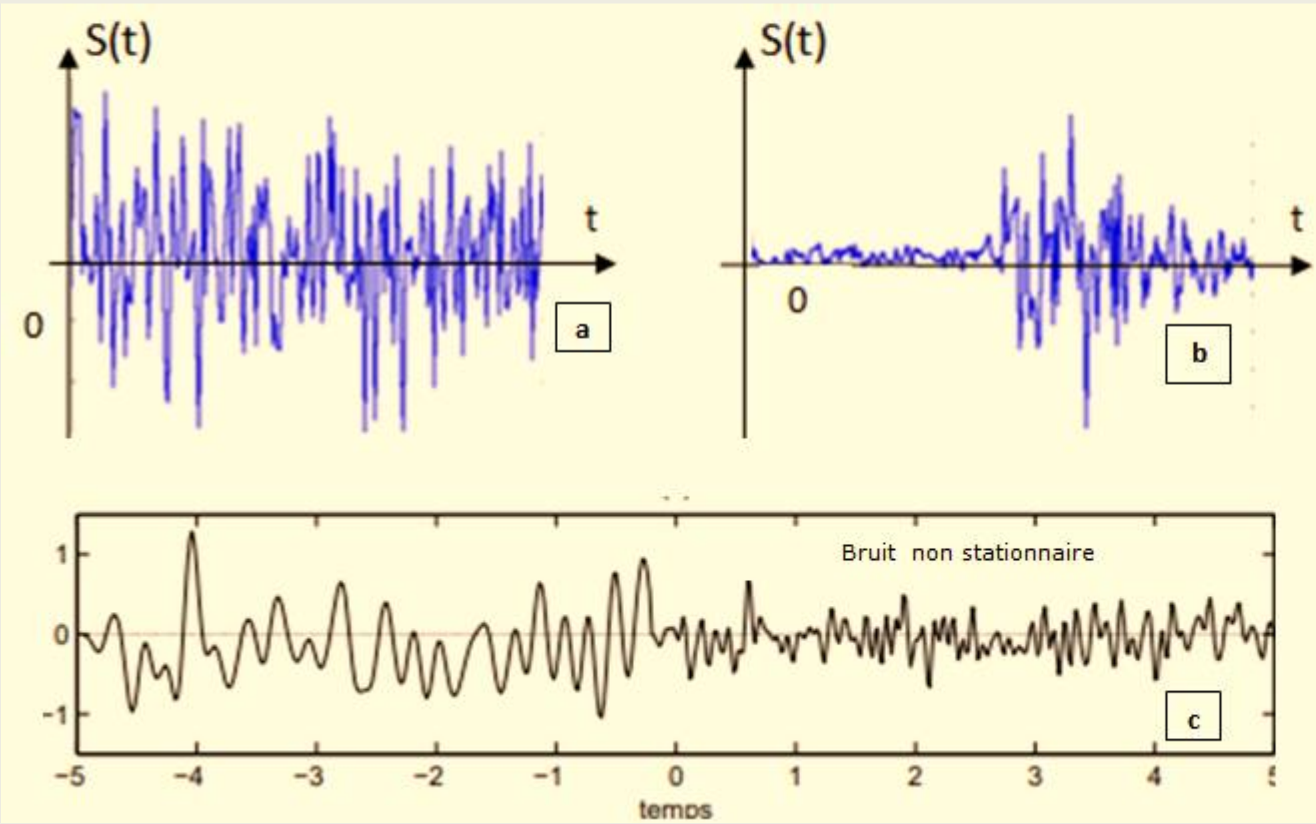


Fig.7 signal aléatoire :(a) stationnaire, (b et c) non stationnaire

II – Classification dimensionnelle

La classification dimensionnelle est une classification qui est fonction du nombre de variables.

- **Signal mono** (uni) dimensionnel $\mathbf{1D}$: c'est le cas le plus courant ou le signal est fonction d'une seule variable comme par exemple la tension électrique, la parole etc.

- **Signal bidimensionnel** $\mathbf{2D}$: c'est le cas d'une image statique en noir et blanc, comme par exemple la brillance $\boldsymbol{B(x,y)}$

- **Signal tridimensionnel** $\mathbf{3D}$. (fig.8) : comme par exemple la pression $\boldsymbol{P(x,y,z)}$ .Exemple du film parlant etc.

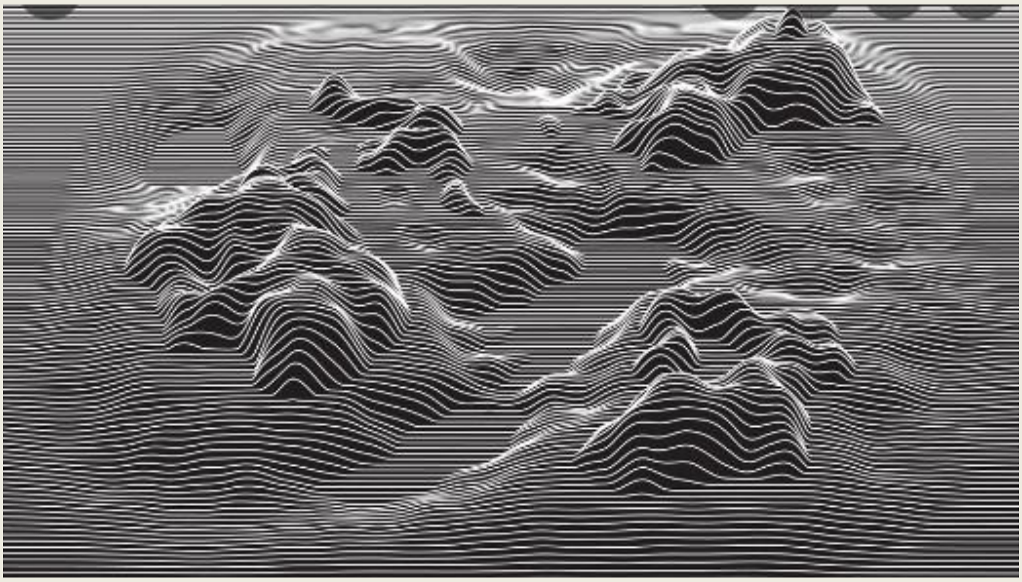


Fig.8 exemple de signal 3D

- **Signal multidimensionnel** $\boldsymbol{4D\ ou\ (3D+t)}$. C'est un signal qui est formé de $\mathbf{4}$ paramètres dont la forme la plus générale s'écrit $\boldsymbol{F(x,y,z,t)}$: exemple d'une onde électromagnétique $\vec{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{x,y,z,t})$, $\vec{\boldsymbol{B}}\ (\boldsymbol{x,y,z,t})$ et bien d'autres.

III – Classification morphologique des signaux

Les capteurs enregistrent les signaux physiques porteurs de l'information utile sous la forme analogique. Pour les traiter sur machine, il faut les rendre discrets (numériques).

Conversion analogique –numérique

Les étapes classiques qui visent à effectuer le passage d'un signal analogique à un signal numérique s'appelle numérisation. C'est cette numérisation sur un signal analogique qui va nous permettre de l'étudier à l'aide d'un calculateur. La conversion analogique - numérisation nécessite les opérations suivantes : fig.9.

- Echantillonnage du signal
- Quantification du signal
- Numérisation du signal

1- **Forme analogique (continue) du signal** : C'est le signal dont la grandeur (en amplitude) varie de façon continue dans le temps.

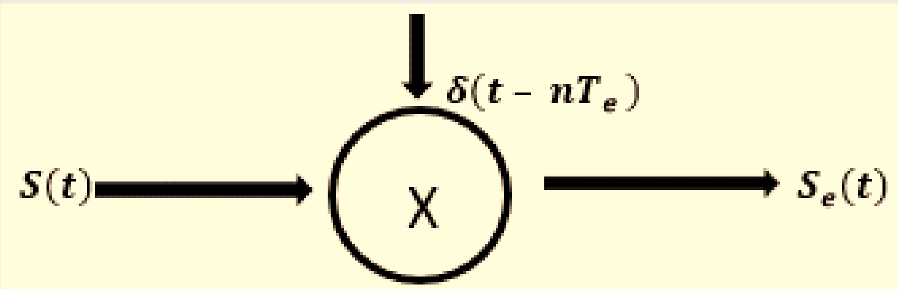
2- **Forme échantillonnée du signal** : c'est la représentation du signal lorsque l'amplitude est continue et le temps discret. Le signal temporel ci-dessus est échantillonné pour le rendre un signal temporel échantillonné en multipliant $S(t)$ par un peigne de Dirac.

Échantillonner un signal $S(t)$ à temps continu revient à multiplier ce dernier par un peigne de Dirac $\delta_{Te}(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e)$ soit :

$$S_{ech}(t) = S(t).\delta_{Te}(t) = S(t).\sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e) = \sum_{-\infty}^{+\infty} S(t).\delta(t - nT_e)$$

Et par application de la propriété de l'impulsion de Dirac : $S(t).\delta(t - t_0) = S(t_0).\delta(t - t_0)$, on obtient alors :

$$S_{ech}(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} S(nT_e).\delta(t - nT_e)$$



On opère généralement avec un échantillonnage périodique (prendre des échantillons du signal analogique à des instants régulièrement espacés) défini par $t = n.T_e$

Si on désigne le signal analogique par $S(t)$, sa version échantillonnée est $S_{ech}(nT_e)$, n étant un entier.

T_e : La période d'échantillonnage, c'est-à-dire la durée entre deux échantillons

$\frac{1}{T_e} = f_e$: La fréquence d'échantillonnage qui est l'inverse de la période d'échantillonnage

Le pas d'échantillonnage T_e se détermine grâce à l'application du théorème de Shannon (physicien Américain) qui s'annonce comme suit :

Tout signal à bande limitée dans l'intervalle de fréquence $[-f_{min} , +f_{max}]$ c'est-à-dire possédant un spectre de fréquence ayant une fréquence maximale f_{max} peut être entièrement reconstruit sans erreur à partir de sa suite d' échantillons , il faut et il suffit pour cela que la fréquence d'échantillonnage vérifie le théorème de Shannon.

$f_e \geq 2.f_{max}$

L'application de ce théorème implique que toute information renfermée dans le signal analogique est conservée dans ses échantillons.

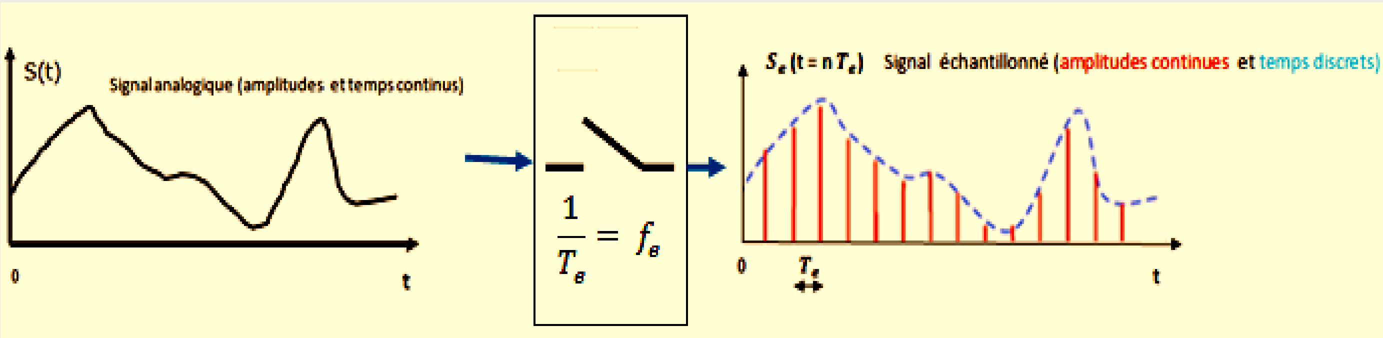


fig.9 Principe de conversion d'un signal analogique en un signal numérique

3– La quantification : La quantification des amplitudes est une seconde étape qui consiste à approximer les valeurs instantanées des amplitudes du signal par une valeur discrète, c'est à dire discrétiser les valeurs prises par les échantillons fig.10.

Ce procédé permet d'attribuer à l'amplitude de chaque échantillon un mot binaire unique $(0, 1)$

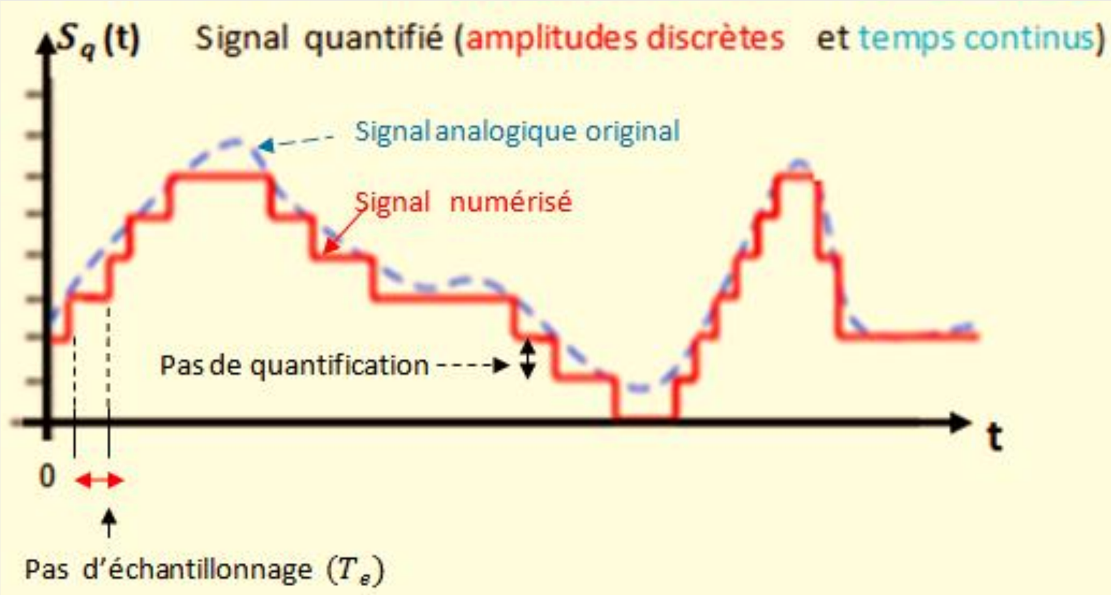


Fig.10 : principe de la quantification des signaux

4 – L'étape finale est la forme numérique ou les amplitudes et le temps du signal sont discrets. Cette forme rend le signal représenté par un nombre fini de données binaires $(\mathbf{0}, \mathbf{1})$. fig. 11

La numérisation est signaux possède beaucoup d'avantage .Elle permet de stocker l'information sans détérioration , reproduire facilement sans perte d'information, transmettre sans perte, faire des traitements identiques quelque soit le type de données etc.

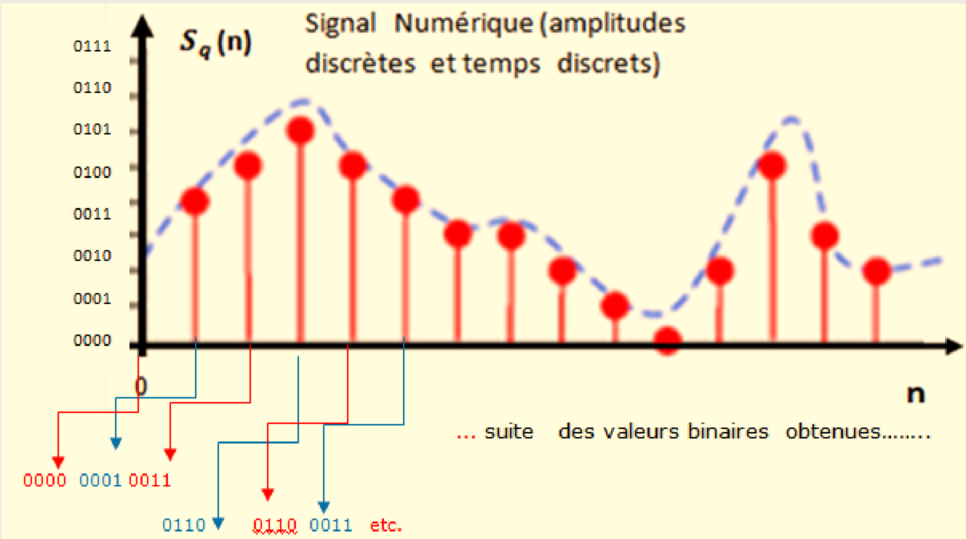


fig 11:Exemple de numérisation d'un signal

IV Classification énergétique

On a vu précédemment la classification des signaux reposant sur la caractéristique morphologique, la prédictibilité et sur la périodicité ou la non périodicité. Or toute transmission de signal porteur d'information quel que soit sa classification est liée à une transmission d'énergie .C'est la raison pour laquelle l'étude des propriétés des signaux exige d'étudier leur énergie. Le tableau 4 résume la classification énergétique des signaux à temps continu.

la maitrise de la classification énergétique des signaux nous impose de rappeler les principales définitions concernant l'énergie et la puissance d'un signal.

Pour simplifier la compréhension , considérons un signal $\boldsymbol{S(t)}$ produit par une tension appliquée aux bornes d'une résistance de $\mathbf{1}$ Ohm (fig.12)

L'énergie dissipée dans la résistance pendant le laps de temps $\boldsymbol{dt}$ est :

$$\boldsymbol{dE = S^2(t)dt}$$

La puissance instantanée du signal est :

$$\boldsymbol{P_{inst}(t) = \frac{dE}{dt} = S^2(t)}$$

L'énergie contenue dans le signal entre les instants $\boldsymbol{t_1}$ et $\boldsymbol{t_2}$ est **:**

$$\boldsymbol{E(t_1, t_2)} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{P_{inst}(t)\, dt} = \int_{t_1}^{t_2} S^2(t)\, \boldsymbol{dt}$$

L'energie totale du signal est **:**

$$\boldsymbol{E_s}(-\infty, \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} S^2(t)\, \boldsymbol{dt}$$

La puissance moyenne temporelle du signal entre les instants $\boldsymbol{t_1}$ et $\boldsymbol{t_2}$ est :

$$\boldsymbol{P(t_1, t_2)} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{P_{inst}(t)\, dt} = \frac{E(t_1, t_2)}{t_2 - t_1} \quad \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} S^2(t)\, \boldsymbol{dt}$$

La puissance moyenne totale :

$$\boldsymbol{P_s}(-\infty, \infty) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \boldsymbol{S^2(t)\, dt} = \boldsymbol{< S^2(t) >}$$

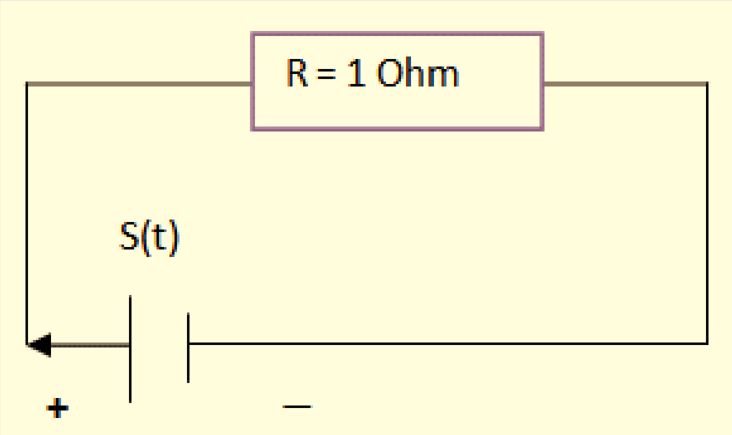


Fig.12.tension aux bornes d'une résistance

Il ressort que du point de vue énergétique, on classe les signaux en deux grandes familles (Tableau 3)

– Les signaux à énergie finie, pour lesquels $0 < \boldsymbol{E} < +\infty$

– Les signaux à puissance moyenne finie (énergie infinie), pour lesquels la puissance moyenne est bornée, à savoir $0 < \boldsymbol{P} < = +\infty$

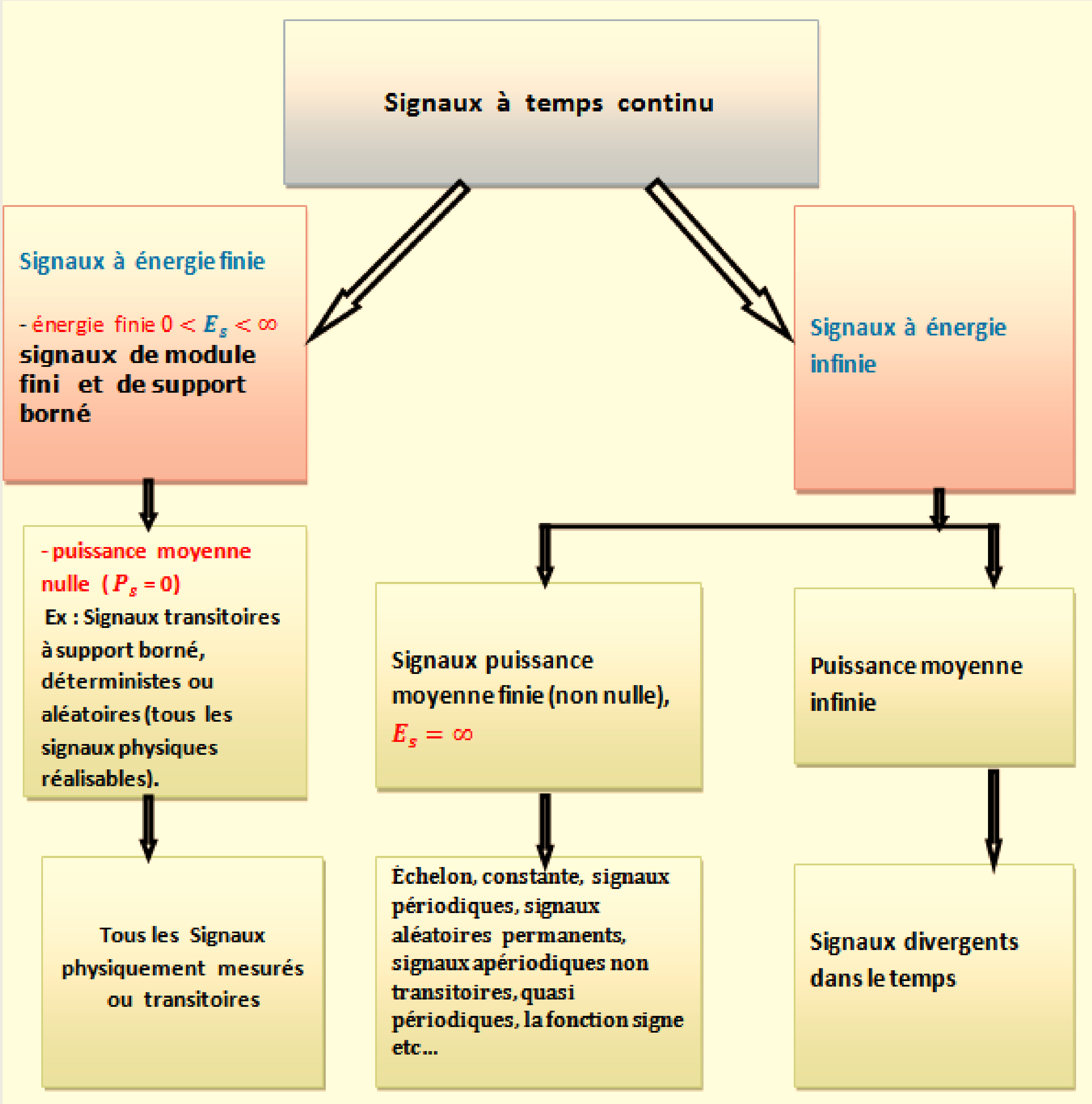


Tableau .3 classification energetique des signaux à temps continu

Les Signaux à énergie finie

on definit l'energie instantanée d'un signal $S(t)$ comme $E_{inst} = |S(t)|^2$.L'énergie instantanée est une grandeur difficile à mesurer.Il est plus pratique de mesurer l'énergie moyenne sur un intervalle de temps $[\,t_1\ ,\ t_2\,]$.
Soit $S(t)$ un signal quelconque qui peut être complexe ou réel , defini sur $]-\infty\ ,\ +\infty[$ et T l'intervalle de temps . Il est dit à énergie finie (de carré sommable ou encore à support borné c'est-à-dire de durée limitée) s'il remplit la condition :

$$0 < E_s < +\infty \quad \text{soit :} \quad E_s = \int_{-\infty}^{\infty} |S(t)|^2\, dt < \infty$$

l’expression $|\,\boldsymbol{S(t)}|^{\,2}$ représente une énergie instantanée

Cette expression sous l’intégrale correspond à l’énergie totale du signal c'est-à-dire la somme de toutes les énergies instantanées .

$\boldsymbol{E_s} \;=\; \int_{t_1}^{t_2} |\,\boldsymbol{S(t)}|^{\,2}\,\boldsymbol{dt},$ (valeur finie ,pour le cas des signaux bornés temporellement et de carré intégrable) . l’ énergie a pour unité le joule.

Energie d’un signal complexe

L’ energie d’un signal complexe est definie par :

$\boldsymbol{E_s} \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} |\,S(t)|^{\,2}\,\boldsymbol{dt}$ (convergence de cette intégrale) ou encore :

$\boldsymbol{E_s} \;=\; \lim\limits_{T\to\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |\,\boldsymbol{S(t)}|^{\,2}\,\boldsymbol{dt}$, avec $|\,\boldsymbol{S(t)}|^{\,2} \;=\; \boldsymbol{S(t).S^{*}(t)}$.

$\boldsymbol{S^{*}(t)}$: conjugué de $\boldsymbol{S(t)}$

Energie d’un signal réel

L’ énergie d’un signal réel est definie par : $\boldsymbol{E_s} \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} S^2\,(t)\,\boldsymbol{dt}$, ou

$$\boldsymbol{E_s} = \lim_{T\to\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \boldsymbol{S^2(t)\,dt}$$

les signaux concernés par cette catégorie sont principalement tous les signaux transitoires à support borné (deterministes ou aléatoires) et les signaux représentant une grandeur physique .Les signaux de cette catégorie ont une puissance moyenne nulle $(\boldsymbol{P_s} = \boldsymbol{0})$.

Remarque :

- Un signal d’energie $\boldsymbol{E_s} \;=\; \boldsymbol{0}$ est un signal nul
- Deux signaux $\boldsymbol{S_1(t)}$ et $\boldsymbol{S_2(t)}$ sont égaux si l’energie de leur difference est nulle :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{S_1}^{\,2}(\boldsymbol{t})\,\boldsymbol{dt} \;-\; \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{S_2}^{\,2}(\boldsymbol{t})\,\boldsymbol{dt} \;=\; \boldsymbol{0}$$

Exercices corrigés

Exercice n°1

Soit un signal $\boldsymbol{s(t)} \;=\; \boldsymbol{r(t)}$ sur $[\,\boldsymbol{0},\boldsymbol{T}],$ ou $\boldsymbol{r(t)}$ est appelée la fonction rampe, elle a pour expression $\boldsymbol{r(t)} \;=\; \boldsymbol{t.H(t)}$

Le calcul de son énergie donne :

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} |S(t)|^2 dt = \int_0^T \mathrm{H}^2(\mathrm{t})\ \mathrm{t}^2 dt = \int_0^T \mathrm{t}^2 dt = \left[\frac{\mathrm{t}^3}{3}\right]_0^T = \frac{\mathrm{T}^3}{3}$$

c'est donc un signal à énergie finie

Exercice n°2

soit donné un signal $S(t) = A\ .cos\ \omega t = A\ .cos\, 2\pi f t = A cos \frac{2\pi}{T} t$ avec $A \in \mathbb{R}$

sa puissance moyenne est :

$$P_{S_p(t)} = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} |S_p(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} S_p(t)^2 dt = \frac{A^2}{T_0}\int_0^{T_0} \cos^2(2\pi f t)\, dt =$$

$$\frac{A^2}{2T_0}\int_0^{T_0} [1 + cos(4\pi f t)]\, dt = \frac{A^2}{2T_0}\int_0^{T_0} dt + \frac{A^2}{2T_0}\int_0^{T_0} cos(4\pi f t)\, dt = \frac{A^2}{2T_0} [t]_0^{T_0}$$

$$+\frac{A^2}{2T_0}[sin(4\pi f t)]_0^{T_0} = \frac{A^2}{2T_0} T_0 + \frac{A^2}{2T_0}[sin(4\pi f t)]_0^{T_0} = \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2T_0}[sin(4\pi) - sin(0)] =$$

$$\frac{A^2}{2T_0}[1 + 0] = \frac{A^2}{2}$$

il s'agit donc d'un signal à puissance moyenne finie dont la puissance moyenne vaut $\frac{A^2}{2}$ et par conséquent son énergie est infinie.

Exercice n°3

soit un signal ayant pour expression $s(t) = 4$, pour $t \in [-\frac{\theta}{2}, \frac{\theta}{2}]$,son énergie est :

$$E_s = \int_{-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}} 4\ dt = 4[t]_{-\frac{\theta}{2}}^{+\frac{\theta}{2}} = 4\ [\frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2}] = 4\theta$$

la puissance moyenne est : $P_s = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{4\theta}{T} = 0$

Exercice n°4

soit un signal $S(t) = A\, e^{-\beta|t|}$, avec $\beta > 0$

ce signal possède une énergie :

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} |S(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathrm{A}\, e^{-\beta|t|}|^2 dt = A^2\int_{-\infty}^{0} e^{2\beta t} + A^2\int_0^{\infty} e^{-2\beta t} dt$$

$$= A^2.\left\{ \left[\frac{1}{2\beta}e^{2\beta t}\right]_{-\infty}^{0} + \left[-\frac{1}{2\beta}e^{-2\beta t}\right]_{0}^{\infty} \right\} = A^2\frac{1}{2\beta} - 0 - 0 + A^2\frac{1}{2\beta} = \frac{A^2}{\beta}$$

c'est un signal à énergie finie

Exercice n°5

on considère le signal :

$S(t) = e^{-\beta t}$, pour $t \geq 0$, avec $\beta > 0$

$S(t) = 0$ pour $t < 0$. Son énergie est :

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} |S(t)|^2\, dt = \int_0^{\infty} e^{-2\beta t}\, dt = \left[-\frac{1}{2\beta}e^{-2\beta t}\right]_0^{\infty} = -\frac{1}{2\beta}\left[e^{-2\beta t}\right]_0^{\infty}$$

$= \frac{1}{2\beta}$: donc c'est un signal à énergie finie

Exercice n°6

Soit un signal $S(t) = t.e^{-t}.H(t)$

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} |S(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |t\, e^{-t}.\mathrm{H(t)}|^2\, dt = \int_0^{\infty} t^2 e^{-2t}\, dt$$

calcul de l'intégrale : $\int_0^{\infty} t^2 e^{-2t}\, dt$

En utilisant l'**i**ntégration **p**ar **p**artie(**IPP**) qui s'exprime par :

$$\int_{-a}^{a} u\, dv = uv - \int_{-a}^{a} v\, du$$

on pose $t^2 = u$, $du = 2tdt$ et en posant $dv = e^{-2t}dt$, $v = -\frac{1}{2}e^{-2t}$,

$$\int_0^{\infty} t^2 e^{-2t}\, dt = \left[-\frac{t^2}{2}e^{-2t}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)2.t.e^{-2t}\, dt = -\frac{1}{2}[t^2\, e^{-2t}]_0^{\infty}$$
$$+ \int_0^{\infty} .t.e^{-2t}\, dt$$

calcul de l'integrale : $\int_0^{\infty} .t.e^{-2t}\, dt$

de même on pose $t = u$, $du = dt$ et en posant $dv = e^{-2t}dt$, $v = -\frac{1}{2}e^{-2t}$

$$\int_0^{\infty} t.e^{-2t}\, dt = t(-\frac{1}{2})e^{-2t} - \int_0^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-2t}\, dt = (-\frac{1}{2})t.e^{-2t} + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-2t}\, dt$$

avec $\int_0^{\infty} e^{-2t}\, dt = -\frac{1}{2}e^{-2t}$

On a finalement :

$$\int_0^{\infty} t^2 e^{-2t}\,dt = -\frac{1}{2}[t^2\,e^{-2t}]_0^{\infty} + \left[(-\frac{1}{2})t.e^{-2t}\right]_0^{\infty} + \left[\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}).e^{-2t}\right]_0^{\infty} =$$

$$-\frac{1}{4}\left[\frac{1}{e^{2.\infty}} - \frac{1}{e^{2.0}}\right] = -\frac{1}{4}[0-1] = \frac{1}{4}$$ (signal à énergie finie)

Exercice n°7

Soit le signal $S(t) = Ae^{-\alpha t}H(t)$

L'énergie d'un signal est :$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} |\,S(t)|^{\,2}\,dt$

comme le signal est réel , son énergie est :

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{S(t)\,S(t)}dt = \int_{-\infty}^{\infty} S^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} A.e^{-\alpha t}H(t).A.e^{-\alpha t}.H(t)dt$$

$$= A^2\int_0^{\infty} e^{-2\alpha t}dt = A^2\left[\left(-\frac{1}{2\alpha}\right)e^{-2\alpha t}\right]_0^{\infty} = A^2\left(-\frac{1}{2\alpha}\right)(e^{-2\,\alpha\,.\infty} - e^{-2\,\alpha\,.0})$$

$$= A^2\left(-\frac{1}{2\alpha}\right)\left(\frac{1}{e^{2\,\alpha\,.\infty}} - \frac{1}{e^{2\,\alpha\,.0}}\right) = A^2\left(-\frac{1}{2\alpha}\right)(0-1) = A^2\left(+\frac{1}{2\alpha}\right) = \frac{A^2}{2\alpha}$$, (signal à énergie finie)

Le calcul de sa puissance moyenne est :

$$P_s = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S^2(t)dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}E_s = \lim_{T\to\infty}\frac{A^2}{2\alpha.T} = 0$$

Exercice n° 8

on donne le signal $S(t) = A.\sin\omega\,t$ (signal réel)

A : étant l'amplitude , $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ la pulsation et T : la periode

calcul de son énergie :

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{S(t)\,S(t)}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} S^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} A.\sin\omega\,t.A.\sin\omega\,tdt =$$

$$A^2\int_{-\infty}^{\infty}\sin\omega\,t\,.\sin\omega\,tdt = A^2\int_{-\infty}^{\infty}\sin^2\omega\,t\,.dt = A^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos 2\omega\,t}{2}.dt =$$

$$\frac{A^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(1-\cos 2\omega\,t)dt = \frac{A^2}{2}\left[\int_{-\infty}^{\infty}1.\,dt - \int_{-\infty}^{\infty}\cos 2\omega\,t.dt\right] =$$

$\frac{A^2}{2}[\mathrm{t}]_{-\infty}^{\infty} - \frac{A^2}{2}\left[\frac{1}{2\omega}\sin 2\omega\, t\right]_{-\infty}^{\infty} = +\infty$, car :

$[\mathrm{t}]_{-\infty}^{\infty} = +\infty$ et $[\sin 2\omega\, t]_{-\infty}^{\infty}$ possède des valeurs bornées comprises entre -1 et $+1$ d'où est egal à $E_s = \infty$ (signal à énergie infinie)

Exercice n° 9

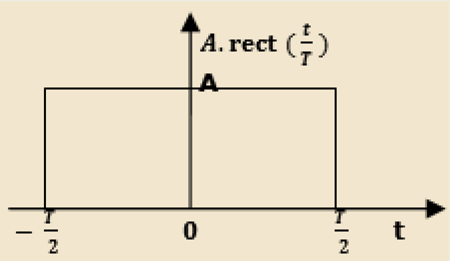
soit un signal de la forme fenêtre rectangulaire (créneau , porte)de durée T et d'amplitude A

Calcul de son énergie :

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} S^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} [A.\sqcap(\tfrac{t}{T})]^2\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} [A.\mathrm{rect}(\tfrac{t}{T})]^2\, dt =$$
$$A^2 \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [\mathrm{rect}(\tfrac{t}{T})]^2 dt = A^2 \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1.dt = A^2\left[\left(\frac{T}{2}+\frac{T}{2}\right)\right] = A^2.T$$

c'est un signal à énergie finie et ainsi il possède une puissance nulle.

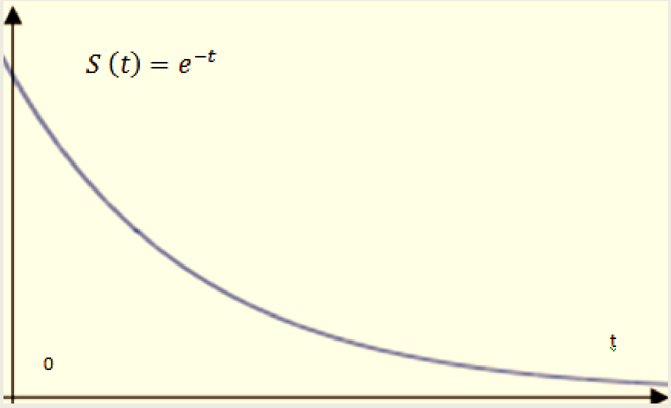
$$P_s = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S^2(t)dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}E_s = \lim_{T\to\infty}\frac{A^2T}{T} \to 0$$



Exercice n°10

soit un signal à support temporel non borné

$$S(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

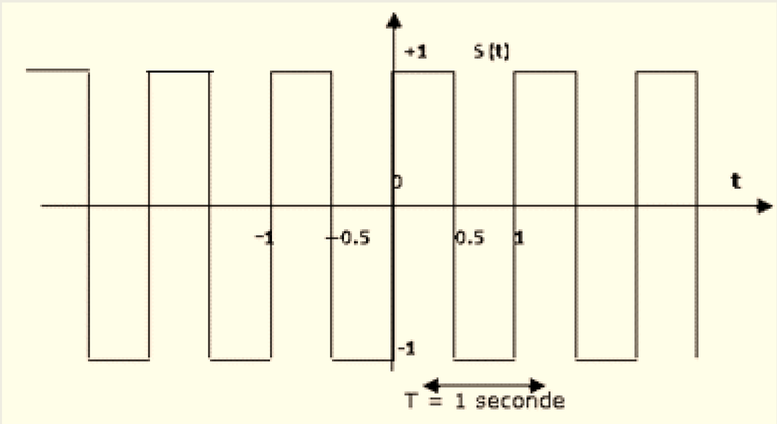


$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} |S(t)|^2 dt = \int_0^{\infty} e^{-2t}\, dt = (-\tfrac{1}{2})\,[\,e^{-2t}\,]_0^{\infty} = 0 - (\tfrac{1}{-2}) = \tfrac{1}{2}$$

c'est un signal a energie finie et sa puissance étant $P_s = 0$

Exercice n°11

soit un signal (figure ci - dessous) à support temporel non borné periodique de periode $T = 1$ seconde , calculer sa puissance moyenne et son énergie.



$$P_s = \frac{1}{T} \int_0^T |S(t)|^2 dt = \frac{1}{T}\left[\int_0^{\frac{T}{2}} |S(t)|^2 dt + \int_{T/2}^{T} |S(t)|^2 dt\right] =$$

$\frac{1}{T}\left[\int_0^{\frac{T}{2}} |1|^2 dt + \int_{T/2}^{T} |(-1)|^2 dt\right] = \frac{1}{T}\left[\frac{T}{2} + T - \frac{T}{2}\right] = 1$, donc son énergie E_s est $+\infty$

Signaux à puissance moyenne finie

Les signaux concernés par cette catégorie sont les signaux physiquement réalisables et les signaux periodiques.Cette catégorie comprend plus particulièrement les signaux issus d'un générateur de signaux, les signaux periodiques ,les signaux permanents non periodiques et les signaux permanents aléatoires.

Les signaux appartenant à cette categorie possède une puissance moyenne finie non nulle ($E_s = +\infty$) .Les signaux à puissance moyenne finie non nulle sont des signaux dont l'énergie est infinie et dont on ne peut calculer que la puissance moyenne.Ils sont definis par :

$$P_s = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |S(t)|^2\, dt \quad , \quad \text{avec} \quad 0 < P_s < +\infty \quad et \quad E_s = +\infty$$

considérons un signal $S(t)$ quelconque complexe. Deux cas se présentent :

1- cas d'un signal periode

Calculons la puissance moyenne d'un signal periodique $S_p(t)$,son énergie sur une periode T_0 est :

$$E_{S_p(t)} = \int_0^{T_0} |S_p(t)|^2\, dt$$

l'énergie sur k periodes $0 < t < kT_0$ est :

$$E_{S_{kp}(t)} = \int_0^{kT_0} |S_p(t)|^2\, dt \int_0^{1T_0} |S_p(t)|^2\, dt + \int_{1T}^{2T_0} |S_p(t)|^2\, dt + \ldots + \int_{(K-1)T_0}^{KT_0} |S_p(t)|^2\, dt$$

Si maintenant on calcule la puissance pour le même signal periodique $S_p(t)$ sur une periode nous obtenons :

$$P_{S_p(t)} = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} |S_p(t)|^2\, dt$$

La puissance sur k periodes sera :

$$P_{S_{kp}(t)} = \frac{1}{KT_0}\int_0^{kT_0} |S_p(t)|^2\, dt =$$

$$\frac{1}{KT_0}\int_0^{1T_0} |S_p(t)|^2\, dt + \frac{1}{KT_0}\int_{1T}^{2T_0} |S_p(t)|^2\, dt + \ldots + \frac{1}{KT_0}\int_{(K-1)T_0}^{KT_0} |S_p(t)|^2\, dt$$

$$= K\frac{1}{K}[P_{S_p(t)}] = K\frac{1}{K}\left[\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} |S_p(t)|^2\, dt\right] = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} |S_p(t)|^2\, dt = P_{S_p(t)}$$

Les signaux periodiques sont à puissance moyenne finie .La puissance moyenne d'un signal periodique $S_p(t)$ est donc definie par :

$$P_{S_p(t)} = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} |S_p(t)|^2\, dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |S_p(t)|^2\, dt \quad \text{(unité : le watt)}$$

C'est la puissance moyenne calculée sur une periode c'est à dire sur un intervalle $(-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2})$ qui n'est autre que la periode T_0 du signal $S_p(t)$. Il s'agit une valeur constante .Autrement dit, la puissance moyenne correspond à l'énergie sur une periode divisée par la durée de cette periode.

2- cas d'un signal non periode

lorsque $S(t)$ est aperiodique , la puissance moyenne est calculée à l'aide de l'expression suivante :

$$P_{s(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |S(t)|^2 dt, \quad \text{(valeur finie)}$$

$$0 < P_{s(t)} < \infty \,, \qquad E_{s(t)} = \infty$$

3-Signaux à puissance moyenne infinie et énergie infinie

il existe une classe de signaux qui ont une puissance moyenne et une énergie infinies .Les signaux qui font partie de cette classe sont l'impulsion de Dirac, peigne de Dirac , signal $s(t) = t$, bruit blanc etc.

C'est le cas des signaux ou on a :

$$P_{s(t)} \longrightarrow \infty \,, \qquad E_{s(t)} \longrightarrow \infty$$

Remarque

les signaux à energie finie sont des signaux dont on ne peut pas calculer la puissance moyenne.

les signaux à puissance moyenne finie non nulle , dont l'energie est infinie et donc on ne peut calculer que la puissance moyenne

Energie et puissane d'interaction des signaux

Il est également possible de definir la puissance et l'énergie d'interaction entre deux signaux.Pour deux signaux $S_1(t)$ et $S_2(t)$, leur énergie d'interaction est definie comme suit :

$$E_{S_1(t).S_2(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(t) S_2^*(t) dt \quad \text{et} \quad E_{S_2(t).S_1(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} S_2(t) S_1^*(t) dt$$

leur puissance d'intraction est :

$$P_{S_1(t).S_2(t)} = S_1(t).S_2^*(t)$$

EXERCICES CORRIGES

Exercice n°1

considerons un signal suivant :

$$S(t) = sin\,\omega\, t = sin\,2\pi f\, t = sin\frac{2\pi}{T}t$$

Calcul de l'energie de $S(t)$, on a :

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} |\, S(t)|^{\,2}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\sin\frac{2\pi}{T}t\right]^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos\ 2\frac{2\pi}{T}t}{2}dt =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}dt - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\cos\ 2\frac{2\pi}{T}t\,dt = \left[\left(\frac{1}{2}t - \frac{T}{8\pi}sin\,\frac{4\pi}{T}t\right)\right]_{-\infty}^{\infty} = \infty$$

calcul de la puissance moyenne$\frac{T}{2}$

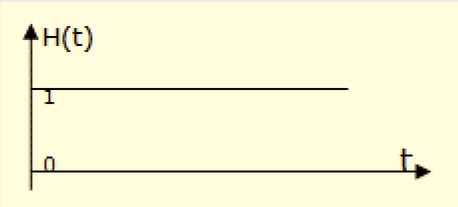
$$P_s = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |\, S(t)|^{\,2}\, dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\frac{1-\cos\ 2\frac{2\pi}{T}t}{2}dt =$$

$$\lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{T}\frac{1}{2}\ t - \frac{1}{T}\frac{T}{8\pi}sin\frac{4\pi}{T}t\right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{1}{2}$$

Il s'agit d'un signal à energie infinie et à puissance moyenne finie

Exemple n° 2

soit la fonction echelon unité est definie par $H(t) = 1$ pour $t \geq 1$ et nulle ailleurs



calcul de l'énergie

$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} S^2(t)\, dt = \int_{0}^{\infty} H^2(t)\, dt = \int_{0}^{\infty} 1^2(t)\, dt = [\mathrm{t}]_0^{\infty} = +\infty$: signal à energie infinie

calcul de la puissance totale

$$P_s = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S^2(t)\, dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} 1^2\, dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ [\mathrm{t}]_0^{\frac{1}{2}} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\frac{\mathrm{T}}{2} = \frac{1}{2}\ \text{watt}$$

Exercice n°3

soit un signal $\boldsymbol{s(t)}$ constant avec $\boldsymbol{s(t)} = \mathbf{10}$ volts pour $-\infty < t < +\infty$

son Energie est :

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} S^2(t)\,\boldsymbol{dt} = \int_{-\infty}^{\infty}(10)^2\,\boldsymbol{dt} = +\infty$$

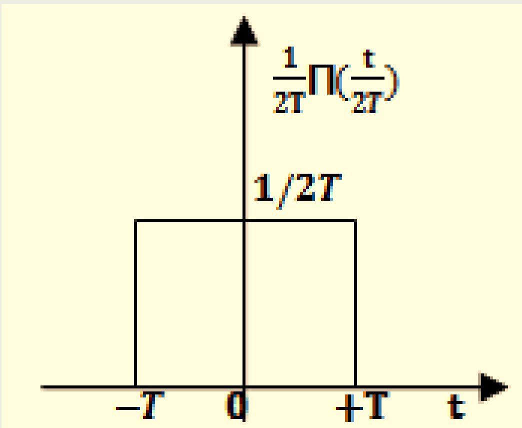
Sa puissance moyenne est :

$$\boldsymbol{P_s = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{\mathrm{T}}\int_{-T/2}^{T/2} S^2(t)\,dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{\mathrm{T}}\int_{-T/2}^{T/2}(10)^2\,dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{\mathrm{T}}.100\,.T = 100\,.Volts}$$

c'est un signal à puissance moyenne finie.

Exercice n° 4

soit un signal de la figure ci - dessous du type fonction porte , de largeur $\boldsymbol{2T}$ (centrée sur **0**) et d'amplitude $\boldsymbol{\frac{1}{2T}}$



L'énergie étant :

$$\boldsymbol{E_s} = \int_{-\infty}^{\infty} S^2(t)\,\boldsymbol{dt} = \int_{-T}^{+T}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2T}}\right)^2\Pi\left(\frac{\mathbf{t}}{\boldsymbol{2T}}\right)^2(t)\,\boldsymbol{dt} = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2T}}\right)^2\int_{-T}^{T}1^2(t)\,\boldsymbol{dt} = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2T}}\right)^2[\mathrm{T}]_{-\mathrm{T}}^{T}$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}T^2}2T = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2T}}$$

Puissance étant : $\boldsymbol{P_s = \lim_{T\to\infty}\frac{E_s}{T} = \lim_{T\to\infty}\frac{\frac{1}{2T}}{T} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T^2} = 0}$

exercice n° 6

on donne le signal $\boldsymbol{S(t) = A.\sin\omega\,t}$ (signal réel) .On a vu precedemment que ce signal possède une energie infinie .Le calcul de sa puissance moyenne donne :

$$P_s = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |S(t)|^2\,dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A.\sin\omega t\,.A.\sin\omega t dt =$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{A^2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin^2\omega t\,.dt = \lim_{T\to\infty} \frac{A^2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1-\cos 2\omega t}{2}\,.dt =$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{A^2}{2T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (1-\cos 2\omega t)dt = \lim_{T\to\infty} \frac{A^2}{2T}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1\ dt \quad - \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos 2\omega t\,.dt\right] =$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{A^2}{2T}\left[\left[\ \mathrm{t} - \frac{1}{2\omega}\sin 2\omega t\ \right]\right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{A^2}{2T}\left[\frac{\mathrm{T}}{2} - \left(-\frac{\mathrm{T}}{2}\right) - \frac{1}{4\pi f}\left(\sin 4\pi f\frac{\mathrm{T}}{2}\right) - \left(\sin(-4\pi f\frac{\mathrm{T}}{2})\right)\right] =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \left[\frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{8T\pi f}\left(\sin 4\pi f\frac{\mathrm{T}}{2}\right) - \left(\sin(-4\pi f\frac{\mathrm{T}}{2})\right)\right] =$$

$$\lim_{T\to\infty} \left[\frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{8T\pi f}\left(\sin 4\pi f\frac{\mathrm{T}}{2}\right) + \left(\sin 4\pi f\frac{\mathrm{T}}{2}\right)\right] = \lim_{T\to\infty} \left[\frac{A^2}{2} - \frac{2\,A^2}{8T\pi f}\left(\sin 4\pi f\frac{\mathrm{T}}{2}\right)\right] =$$

$$\lim_{T\to\infty} \left[\frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{4T\pi f}\left(\sin 4\pi f\frac{\mathrm{T}}{2}\right)\right] = \lim_{T\to\infty} \left[\frac{A^2}{2} - \frac{A^2 T}{4T\pi}\left(\sin 4\pi\frac{1}{\mathrm{T}}\frac{\mathrm{T}}{2}\right)\right] = \lim_{T\to\infty} \left[\frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{4\pi}(\sin 2\pi)\right]$$

$\frac{A^2}{4T\pi f}\left(\sin 4\pi f\frac{\mathrm{T}}{2}\right)$ tend vers **0** lorsque T tend vers l'infinie(∞) d'où
$P_s = \lim_{T\to\infty}\left[\frac{A^2}{2}\right] = \frac{A^2}{2}$ donc c'est un signal à puissance moyenne finie autrement dit un signal à energie infinie

exercice n°7

Soit un signal S(t) ayant pour expression analytique.

$$S(t) = \begin{cases} -t+1 & \text{pour} \quad 0 \le t \le 1 \\ t-1 & \quad\quad\quad 1 \le t \le 2 \\ 0 & \quad\quad\quad \text{ailleurs} \end{cases}$$

calculer l'energie et la puissance moyenne de ce signal

1- calcul de son énergie

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} |S(t)|^2\, dt = \int_0^1 (-t+1)^2\, dt + \int_1^2 (t-1)^2\, dt = \left[-\frac{1}{3}(-t+1)^3\right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}(t-1)^3\right]_1^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Calcul de la puissance moyenne

$$P_s = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |S(t)|^2\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} |S(t)|^2\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{E_S}{T} =$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\int_0^1 (-t+1)^2 dt + \int_1^2 (t-1)^2 dt}{T} = \lim_{T\to\infty} \frac{\frac{2}{3}}{T} = 0$$

2-on suppose maintenant que $f(t) = s(2t)$, calculer l'energie et la puissance moyenne **de** $f(t)$

$$f(t) = s(2t) = \begin{cases} -2t+1 & 0 \le 2t \le 1 \\ 2t-1 & 1 \le 2t \le 2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \longrightarrow s(2t) = \begin{cases} -2t+1 & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ 2t-1 & \frac{1}{2} \le t \le 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt = \int_0^{\frac{1}{2}} (-2t+1)^2\, dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (2t-1)^2\, dt = \left[-\frac{1}{6}(-2t+1)^3\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{1}{6}(2t-1)^3\right]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

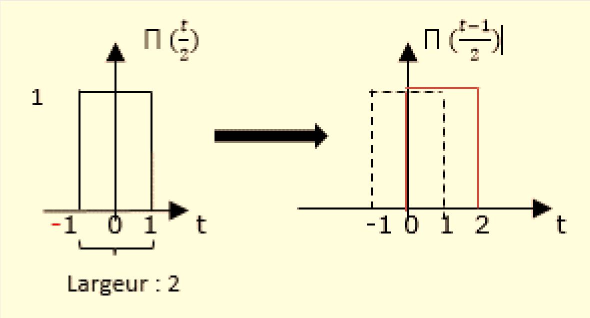
$$P_s = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{E_f}{T} =$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\int_0^{\frac{1}{2}} (-2t+1)^2 dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (2t-1)^2 dt}{T} = \lim_{T\to\infty} \frac{\frac{1}{3}}{T} = 0$$

Exercice **n° 8**

Soit un signal porte $S(t) = \prod\left(\frac{t-1}{2}\right)$ de durée **2** et d'amplitude **1** centré en 0

1-Tracer son graphe

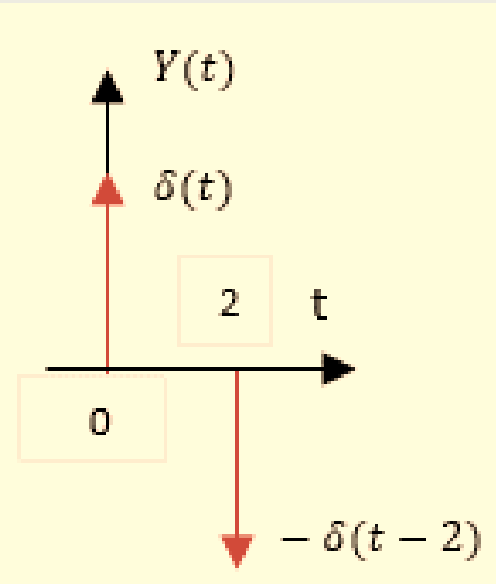


2-Calculer sa dérivée

$$y(t) = \frac{dS(t)}{dt} = \frac{d\left[\Pi\left(\frac{t-1}{2}\right)\right]}{dt} = \frac{d[\ H(t) - H(t-2)\ ]}{dt} = \delta(t) - \delta(t-2)$$

Remarque : $H(t)$ étant la fonction Heaviside (échelon unité)

Sachant que $\frac{d[\ H(t)\ ]}{dt} = \delta(t)$



DEVOIR

Exercice n°1

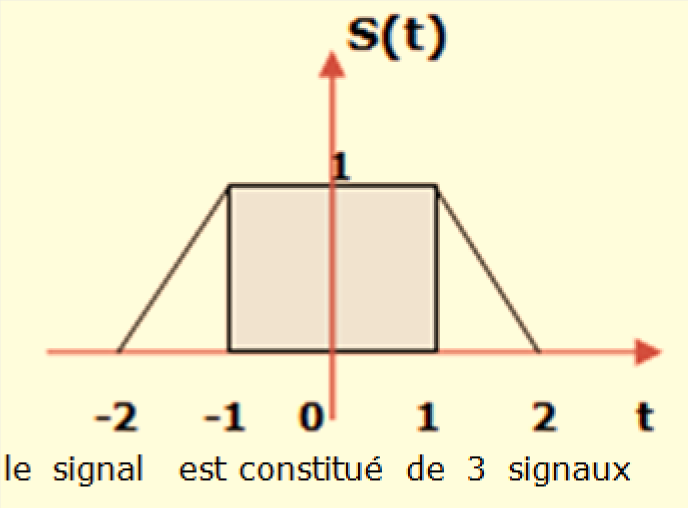
soit un signal $s(t)$ defini par :

$$s(t) = \begin{cases} -t \quad si \quad -1 < t < 1 \\ 0 \qquad si\ non \end{cases}$$

tracer le graphe du signal s(t). Calculer son énergie et sa puissance moyenne .Quelle conclusion tirez vous ?

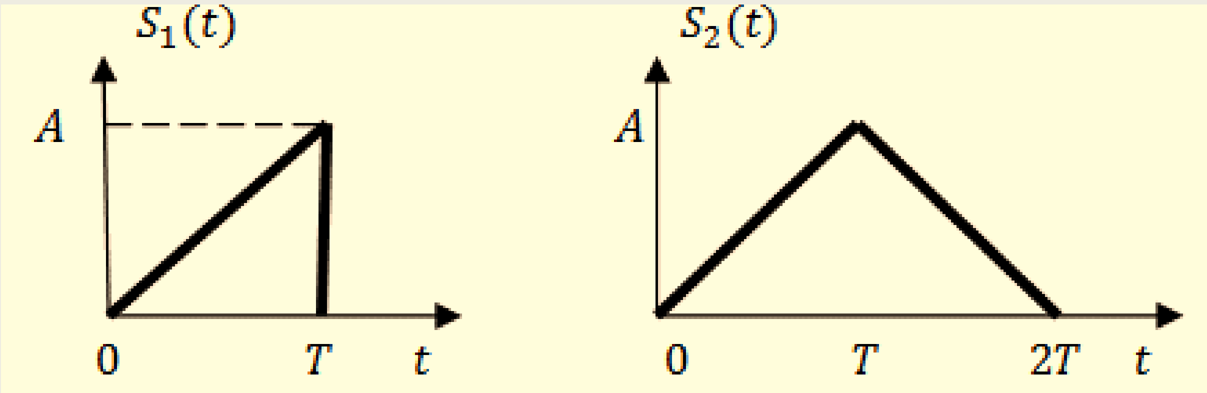
Exercice **n°2**

Soit le signal ci dessous. Calculer son énergie et sa puissance moyenne.



Exercice n°3

Soient deux signaux $S_1(t)$ et $S_2(t)$ représentés par les graphes ci-dessous. Trouver leur expression analytique et calculer leur énergie et leur puissance moyenne respective.



V – Classification spectrale des signaux

Il existe deux domaines d'analyse d'un signal

Domaine temporel :

La description la plus simple ou la plus classique d'un signal est donnée par la représentation des variations de son amplitude en fonction du temps. Elle a pour but d'analyser l'évolution du signal $S(t)$ au cours du temps. Il est alors possible de mettre en évidence certaines caractéristiques lorsque le signal est de forme simple (périodique ou non, calcul de son énergie, sa valeur moyenne etc.)

Domaine fréquentiel : Dans la plupart du temps les signaux physiques ne sont pas toujours si simples, ils possèdent des formes complexes ce qui limite leur analyse dans le domaine temporel. Une représentation très concrète est donnée par la représentation des amplitudes du signal en fonction de la fréquence .Cette représentation est appelée spectre du signal. L'analyse d'un signal dans le domaine fréquentiel (spectre du signal) s'effectue alors selon la distribution de son amplitude , sa puissance ou son énergie en fonction de la fréquence .Ce type d'analyse constitue une représentation duale , identique d'un point de vue de l'information renfermée et s'avère ainsi plus complète.

Une telle analyse conduit à classer les signaux en :

- Signaux de basses fréquences
- Signaux de hautes fréquences
- Signaux à bandes étroites
- Signaux à bandes larges

Cette analyse des signaux dans le domaine fréquentielle est appelée analyse spectrale .Elle est réalisée par la transformée de Fourier (cas des signaux non périodiques et stationnaires) et par série de Fourier (cas des signaux périodiques).

Le domaine occupé par le spectre du signal est appelé la largeur de bande spectrale du signal $\Delta \boldsymbol{f}$ fig 21

$$\Delta \boldsymbol{f} = \boldsymbol{B} = \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{max}} - \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{min}} (\boldsymbol{en} \quad \boldsymbol{Hz})$$

$f_{max} > \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{min}}$: La fréquencecaractéristiquedénotant la limite supérieure de la bande $\boldsymbol{B}$

$\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{min}} \geq \mathbf{0}$: La fréquence caractéristique dénotant la limite inferieure de la bande $\boldsymbol{B}$

Tout signal est appelé signal à bande limitée ou de spectre à support borné si son spectre est nul en dehors de cette bande $\boldsymbol{B}$.

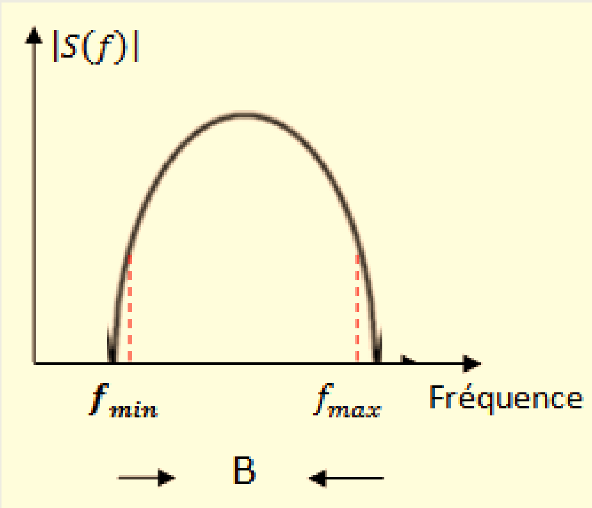


Fig. 21largeur de bande spectrale d'un signal

Selon la fréquence moyenne $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{moy}} = [\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{max}} + \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{min}}]/\mathbf{2}$, on distingue deux types de signaux :

Signaux à bande étroite

Les signaux pour lesquels le rapport :

$\frac{\Delta f}{f_{moy}} = \frac{f_{max} - f_{min}}{[f_{max} + f_{min}]/2}$: Est petit sont appelés signaux à bande étroite

$(f_{max} \approx f_{min})$

Signaux à large bande

Ce sont les signaux pour les signaux pour lesquels le rapport

$\frac{\Delta f}{f_{moy}} = \frac{f_{max} - f_{min}}{[f_{max} + f_{min}]/2}$ est grand sont appelés signaux à large bande

$(f_{max} \gg f_{min})$ **fig.**22

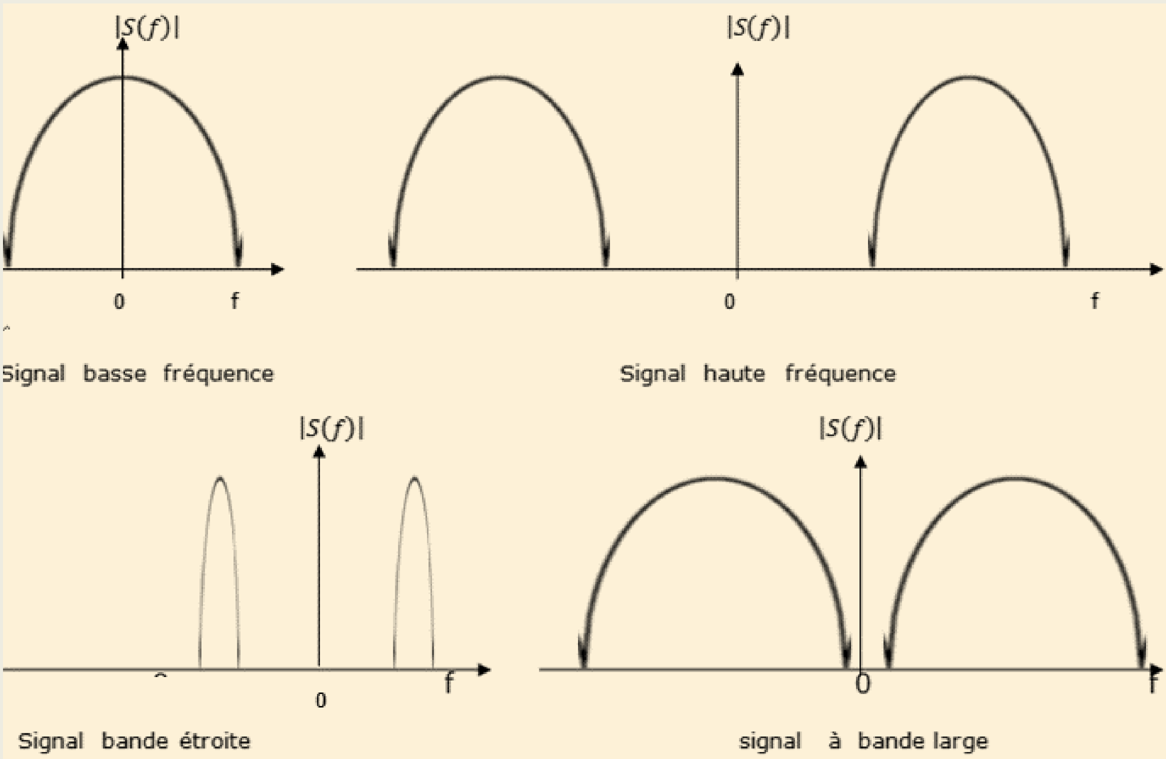


fig.13 : Classification spectrale des signaux

Notion du rapport signal sur bruit

Un des obstacles capital en traitement du signal sera d'extraire le signal utile porteur de l'information utile noyé dans du bruit gênant (parasite). Tout signal mesuré porteur d'information utile comporte du bruit. La difficulté du problème résulte de la proportion entre signal et bruit. Cette difficulté est mesurée par le rapport signal à bruit (RSB ou SNR en anglais).

Un signal $\boldsymbol{S(t)}$ mesuré renferme un signal utile (composante déterministe) $\boldsymbol{S_U(t)}$ et un bruit $\boldsymbol{b(t)}$ habituellement aléatoire : $\boldsymbol{S(t) = S_U(t) + b(t)}$
Pour quantifier la qualité du signal, on utilise la notion de rapport signal sur bruit (RSB) :

$\boldsymbol{RSB = \frac{P_{s(t)}}{P_{B(t)}}}$, ou

$\boldsymbol{P_{s(t)}}$: La puissance du signal utile en watt

$\boldsymbol{P_{B(t)}}$: La puissance du bruit en watt

Ce rapport mesure la quantité de bruit (parasite) que renferme le signal porteur de l'information utile.

Ou en $\boldsymbol{dB}$: $\boldsymbol{RSB_{(dB)} = 10\ log\ (RSB) = 10\ log\ \frac{P_{s(t)}}{P_{B(t)}}}$

------------------------- **Boumerdes (Algérie), 07/2023 -77** -----------------------