الفصل العاشر : توزيع كي χ2 وتوزيع ستيودنت t وتوزيع فيشر

I. توزيع ستيودنت student او توزيع t او توزيع العينات الصغيرة

هو توزيع مشتق من حاصل قسمة متغيرين مستقلين أولهما في البسط يمثل التوزيع الطبيعي القياسي z وفي المقام الجذر التربيعي للمتغير (χ^2) اي

$$t = \frac{z}{\sqrt{\frac{\chi^2_{(n)}}{n}}} \quad \sim t_{(n)}$$

اما الدالة الاحتمالية لتوزيع t تكتب كالاتي

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\left(\frac{n}{2}\right)} . \left[1 + \frac{x^2}{n}\right]^{\left(-\frac{n+1}{2}\right)} \qquad -\infty < x < +\infty$$

خصائص توزيع t

- الوسط الحسابي لتوزيع t مساو لـ 0 $\bar{x} = 0$
- تباين توزيع t $s^2 = \frac{n}{n-2}$ لجميع القيم $n > 2$
- عدد درجات الحرية لتوزيع t هي n-1
- الانحراف المعياري للعينة هو المستخدم بدلا من الانحراف المعياري للمجتمع (مجهول)
- المجتمع المسحوبة منه العينة يتبع توزيع طبيعي
- كلما زادت n اقترب من توزيع z
- غالبا ما يتم اللجوء الى توزيع t عندما يكون حجم العينة اقل من 30 والعكس يتم استعمال توزيع z

الدرجة المعيارية لتوزيع t هي $t = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ حيث $\bar{x}$ هو متوسط الحسابي للعينة μ هو متوسط الحسابي للمجتمع و s هو الانحراف المعياري للعينة.

استخدامات توزيع ستيودنت t

- اختبارات لعينة واحدة (يستخدم بمقارنة متوسط العينة بقيمة مفترضة للمجتمع)
- اختبارات لعينتين مستقلتين (يستخدم هذا الاختبار في مقارنة متوسط عينتين مستقلتين اي ان الاشخاص في العينة الاولى ليسوا نفس الاشخاص في العينة الثانية)

- اختبارات لعينتين مرتبطين (يستخدم هذا الاختبار في مقارنة متوسط عينتين مرتبطتين اي ان الاشخاص في العينة الاولى هم نفس الاشخاص في العينة الثانية)

جدول توزيع ستيودنت : معرف بدرجات الحرية في الاسطر و الاحتمالات في الاعمدة.

مثال : احسب احتمالات القيم التالية استعانة بجدول توزيع ستيودنت

$$p(t_{12} \leq 1.91), p(t_{26} \leq 1.60), p(t_{17} \geq 1.73), p(-1.65 \leq t_{14} \leq 1.65)$$

$p(t_{12} \leq 1.91) = 0.96$ في الجدول 1 السطر 12 والقيمة الجدولية موجودة في العمود الموافق لـ احتمال 0.96

$p(t_{26} \leq 1.60) = 0.94$ في الجدول 1 السطر 26 والقيمة الجدولية موجودة في العمود الموافق لـ احتمال 0.94

$$p(t_{17} \geq 1.73) = 1 - p(t_{17} < 1.73) = 1 - 0.95 = 0.05$$

السطر 17 والقيمة الجدولية موجودة في العمود الموافق لـ احتمال 0.95 في الجدول 1

$$p(-1.76 \leq t_{14} \leq 1.76) = p(t_{14} \leq 1.76) - p(t \geq 1.76) = 0.95 - (1 - 0.95) = 0.9$$

السطر 14 والقيمة الجدولية موجودة في العمود الموافق لـ احتمال 0.95 في الجدول 1

$$p(-1.76 \leq t_{14} \leq 1.76) = 1 - \alpha = 1 - 0.1 = 0.9$$

من الجدول الثاني السطر 14 والقيمة هي موافقة لـ احتمال α مساو لـ 0.1 يصبح 1-α مساو لـ 1–0.1=0.9

أوجد القيم الجدولية

$$p(T_{v=10} \leq t) = 0.96 \quad , p(T_{v=19} \geq t) = 0.05 \quad , p(-t \leq T_{v=29} \leq t) = 0.90$$

$(T_{v=10} \leq t) = 0.96 \ , t = 1.9481$ جدول1

$p(T_{v=19} \geq t) = 0.05 \ , p(T_{v=19} < t) = 1 - 0.05 = 0.95 \, , t = 1.7291$ جدول1

$p(-t \leq T_{v=29} \leq t) = 0.90 \ , \alpha = 0.1$ من الجدول 2 $, t = 1.6991$

مثال 1 : نفترض ان x متغير عشوائي يتبع توزيع طبيعي بمتوسط 8 سحبت عينة عددها 16 بانحراف معياري 3.94 احسب احتمال ان يفوق متوسط هذه العينة 10 ، اوجد فترة الثقة قدرها 90 % لمتوسط العينة .

الحل

العينة معروف عددها وانحرافها المعياري و مسحوبة من محتمع طبيعي اذن المتغير العشوائي يتبع

$$p(\bar{x} > 10) = p\left(t > \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\right) = p\left(t > \frac{10-8}{\frac{3.94}{\sqrt{16}}}\right) = p(t > 2.03)$$

$$= 1 - p(t \leq 2.03) = 1 - 0.97 = 0.03$$

تقاطع قيمة t 2.03 مع درجات الحرية 15 نجد يوافق احتمال 0.97

$$p(-t \leq \bar{x} \leq t) = 0.9 \ \ , p(\bar{x} \leq t) = 0.95$$

تقاطع احتمال 0.95 مع درجات الحرية 15 نجد قيمة t مساوية لـ1.7531

$$t = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}, \bar{x} = t \times \frac{s}{\sqrt{n}} + \mu = 1.7531 \times \frac{3.94}{\sqrt{16}} + 8 = 9.7268$$

$$-t = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}, \bar{x} = -t \times \frac{s}{\sqrt{n}} + \mu = -1.7531 \times \frac{3.94}{\sqrt{16}} + 8 = 6.273$$

$$p(6.273 \leq \bar{x} \leq 9.7268) = 0.9$$

❖ مثال اجريت دراسة على طلبة قسم العلوم المالية لمعرفة مدى تاثير التقنيات التعليمية في رفع العلامات عند الطلبة فاجري امتحان قبل اعتماد التقنيات فسجل متوسط 55 و تم اختيار 20 طالب تم تدريسهم بتقنيات حديثة واجري نفس الامتحان فكان متوسط العلامات المحصلة هو 76 وانحراف معياري 32.6 هل استخدام التقنيات الحديثة له اثر في رفع متوسط العلامات .

$$t = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{76-55}{\frac{32.6}{\sqrt{20}}} = 2.88$$

من جدول توزيع t بدرجة حرية n-1=20-1=19 و مستوى معنوية(α)تبين ان 0.05 $= t_{(\alpha,19)}$

نجد ان القيمة المحسوبة 2.88هي اكبر من القيمة الجدولية 2.86 وبالتالي هناك اثر معنوي للتقنيات الحديثة على العلامات