Chapitre 2

Oscillations libres des systèmes à un degré de liberté

1. Introduction

Les grandeurs physiques (déplacement, vitesse, pulsation…) sont des variables qui dépendent du temps, elles seront étudiées à travers le comportement des systèmes, ces derniers sont caractérisés par des équations du mouvement de type : équations différentielles linéaires. Ce qui permet de décrire de diverses caractéristiques importantes de vibrations.

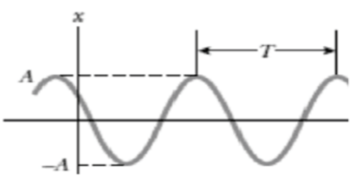
2. Oscillations libres non amortis

Un système qui oscille en absence de toute force d'excitation, et des forces de frottement est appelé **oscillateur libre non amorti** (harmonique) où l'amplitude reste constante. Dans les cas simples, le mouvement oscillant est décrit par une fonction sinusoïdale ; soit :

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi) = A\,cos\,(\omega t + \varphi') \qquad avec \quad \varphi' = \varphi + \pi/2$$

C'est aussi l'équation d'un mouvement harmonique sinusoïdale **MHS** du type le plus simple des mouvements périodiques

$x(t)$: est l'élongation (ou la position), à l'instant t, l'élongation maximale ou l'amplitude du mouvement varie entre –A et +A.



φ : La phase initiale à l'instant $t = 0$.

$(\omega t + \varphi)$: La phase instantanée à l'instant t, exprimée en radian.

- Calcul de **la vitesse** d'un mouvement rectiligne sinusoïdal :

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) = \omega.A.cos(\omega t + \varphi)$$

Il y a un déphasage constant de $\pi/2$ entre l'élongation et la vitesse. *x(t)* et *v(t)* sont en quadrature de phase.

- Calcul de **l'accélération** d'un mouvement rectiligne sinusoïdal :

$$\gamma(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \ddot{x}(t)$$

$$= -\omega^2 . A . \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 . x(t)$$

$$\rightarrow \boldsymbol{\ddot{x}(t) + \omega^2 . x(t) = 0}$$

On obtient une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants sans second membre, caractéristique de ce type de mouvement.

Alors tout mouvement rectiligne vérifiant une équation différentielle linéaire du type :

$$\boldsymbol{\ddot{x}(t) + C . x(t) = 0} \qquad \text{Est sinusoïdale}$$

Avec C constante > 0, C = ω^2

On notera $\omega_0 = \sqrt{C}$ pulsation propre du **MHS** (mouvement harmonique sinusoïdal).

- Un mouvement oscillatoire est dit rectiligne à un degré de liberté lorsqu'il a lieu dans une direction unique de l'espace, et la connaissance d'une seule variable de position suffit pour connaître sa position.

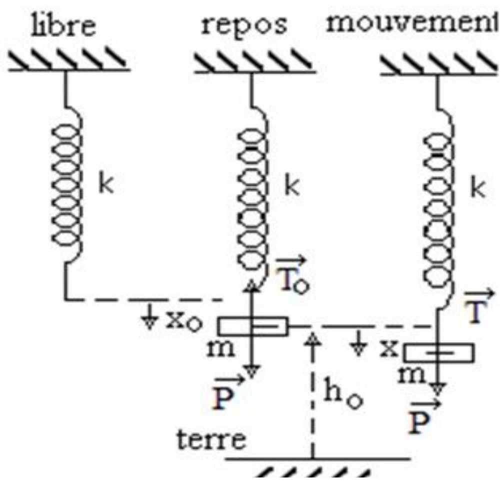
3. Mouvement oscillatoire de translation (le système masse-ressort)

Plusieurs méthodes sont utilisées pour déterminer l'équation différentielle de mouvement (EDM). Parmi ces méthodes on cite : la méthode de Newton et la méthode de Lagrange.

3.1. La méthode de Newton

C'est un système conservatif à un degré de liberté x.

Ressort de raideur k (coefficient d'élasticité), sans masse.



a) Masse m au repos

Le ressort est allongé de x_0 ;

x_0 : est une déformation statique.

C'est une situation **d'équilibre** donc **pas de mouvement.**

$$\sum \overrightarrow{Forces} = 0 = \vec{P} + \vec{T_0}$$

$$mg - k.x_0 = 0 \quad \text{Équation à l'équilibre}$$

$\vec{T}$: Force de rappel du ressort proportionnel à la déformation.

b) Masse m est écarté de *x* puis lâchée

Nous avons donc une oscillation ;

x : déformation dynamique

D'après la deuxième loi du Newton $\sum \overrightarrow{Forces} = m\vec{\gamma} = \vec{P} + \vec{T}$

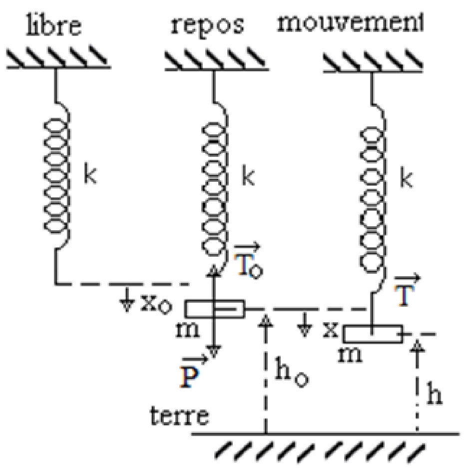
$$mg - k(x_0 + x) = m\ddot{x} = mg - kx_0 - kx = -kx$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \text{ de même type que } \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

La solution est un MHS : $\boldsymbol{x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi)}$

3.2. Méthode de Lagrange

Le système masse-ressort a un degré de liberté. Il est libre (aucune force extérieure) et conservatif (non amorti).



Bilan énergétique

Energie de la masse m — Energie du ressort k

E_c masse (T) — E_p masse (V) — E_p ressort (V)

$\boldsymbol{\frac{1}{2}m\dot{x}^2}$ — $\boldsymbol{mgh}$ — $\boldsymbol{\frac{1}{2}k(déformation)^2}$

$$h = h_0 - x$$

***1* degré de liberté**

Fonction de Lagrange (Lagrangien)

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - mg(h_0 - x) - \frac{1}{2}k(x + x_0)^2$$

Equation de Lagrange : $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = mg - k(x + x_0) = -kx$$

Car : $mg - kx_0 = 0$ équation à l'équilibre.

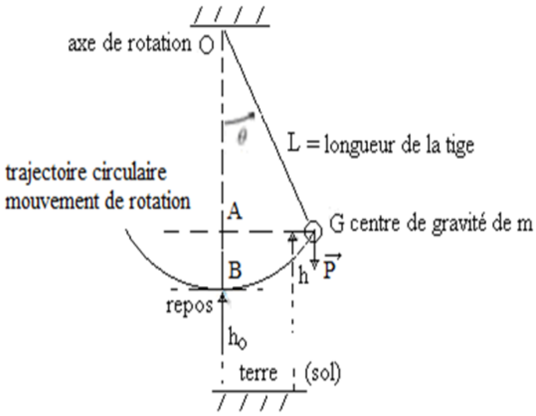
$$m\ddot{x} + kx = 0 \rightarrow \ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0$$

De même type que : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$

La solution est un MHS : $\boldsymbol{x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi)}$

Avec $\omega_0^2 = \frac{k}{m} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{k}{m}}$

4. Mouvement oscillatoire de rotation (le pendule simple)



Fonction de Lagrange (Lagrangien)

La masse m est ponctuelle, animée d'un mouvement oscillatoire de rotation avec une vitesse angulaire $d\theta/dt$ par rapport à O distant de L. La tige est considérée sans masse. C'est un système conservatif à un degré de liberté θ. **Le pendule est simple.**

La masse m possède **un moment d'inertie** $J = mL^2$ donc une énergie **cinétique de rotation** :

$$E_c = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2$$

$$h = h_0 + AB \quad ; \qquad AB = OB - OA\,; \qquad \cos\theta = \frac{OA}{L}$$

Donc : $AB = L - L\cos\theta$

Bilan énergétique

E_c masse (T)	E_p masse (V)
$\frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2$	mgh

$$V = mgh = mg(h_0 + L - L\cos\theta) = mgh_0 + mgL(1 - \cos\theta)$$

La fonction de Lagrange (Lagrangien):

$$L = T - V = \frac{1}{2} mL^2\dot{\theta}^2 - mgh_0 - mgL(1 - \cos\theta)$$

Equation de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mL^2\dot{\theta} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mL^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgL\sin\theta$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = mL^2\ddot{\theta} + mgL\sin\theta = 0$$

Cette formule est non linéaire nous devons faire des approximations**.** Dans le cas des **petites oscillations** ($\theta \ << \ 10°$) ou bien ($\theta \ en\ rad \ << \ 1$) on peut faire l'approximation suivante :

$\sin\theta \approx \theta$; $cos\theta \ \approx \ 1$

$mL^2\ddot{\theta} + mgL\theta = 0$ alors : $\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$

De même type que : $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$

La solution est un MHS : $\boldsymbol{\theta(t) = \theta_m \sin(\omega_0 t + \varphi)}$

Avec $\omega_0^2 = \frac{g}{L} \ \rightarrow \ T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

Remarque : le moment d'inertie dans un système qui fait un mouvement de rotation est équivalent à la masse dans un système faisant un mouvement de translation.

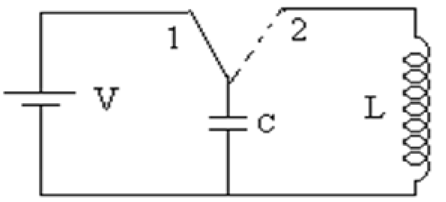
Si le système est constitué de deux masses distantes (les masses sont éloignées) le moment d'inertie est donné par : $I = m_1r_1^2 + m_2r_2^2$

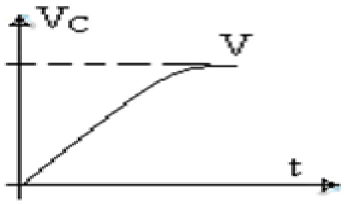
7. circuit électrique L-C oscillant

La position 1 du contacteur : Le condensateur C soumis à la tension V du générateur, se charge avec une charge électrique q :

$$V_C = V = \frac{q}{C}$$

La position 2 du contacteur : C se décharge dans la self L (bobine, inductance), un courant $i = \frac{dq}{qt} = \dot{q}$ Circule dans la maille.





Système à 2 coordonnées généralisée q et i, et 1 relation entre q et i → n = 2 – 1 = **1 degré de liberté.**

Loi des maille :

$$\sum d.d.p = \sum f.e.m \rightarrow V_C + V_L = 0$$

$$V_C = \frac{q}{C} = \frac{1}{C}\int idt \qquad L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int idt = 0$$

$$\rightarrow$$

$$V_L = L\frac{di}{dt} = L\ddot{q} \qquad L\ddot{q} + \frac{q}{C} = 0 \rightarrow \ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$$

Du même type que $\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$

La solution est un MHS

Avec : $\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$

Analogies électromécanique

On observe à travers ces exemples que les oscillations harmoniques simples mécaniques ou électriques sont décrites par le même type d'équation différentielle du 2ème ordre à coefficient constant linéaire en : x ou θ ou q … sans second membre. La solution de ce type d'équation est un MHS. On peut alors faire des analogies entre grandeurs mécaniques et électriques :

Système mécanique (masse + ressort)	Système électrique (circuit LC oscillant)
$\ddot{x} + \frac{k}{m}.x = 0$	$\ddot{q} + \frac{1}{LC} q = 0$
Elongation x	Charge q
Vitesse $v = dx/dt = \dot{x}$	Courant $i = dq/dt = \dot{q}$
Accelération $\gamma = \ddot{x}$	$di/dt = \ddot{q}$
Masse m	Inductance L (ou self ou bobine)
Raideur k	1/C (Condensateur C)
Période propre $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$	Période propre $T = 2\pi\sqrt{LC}$
Echange d'énergie mécanique entre masse et ressort $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$	Echange d'énergie électrique entre bobine et condensateur $\frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$

D'une autre manière, on peut dire que tout système vibratoire contient trois moyens :

- **Système mécanique**
- Moyen pour **stocker l'énergie cinétique**, c'est la masse.
- Moyen pour **stocker l'énergie potentielle**, c'est le ressort.
- Moyen de **dissipation de l'énergie**, c'est l'amortisseur.
- **Système électrique**
- Moyen pour **stocker l'énergie électrique**, c'est le condensateur.
- Moyen pour **stocker l'énergie magnétique**, c'est la bobine.
- Moyen de **dissipation de l'énergie**, c'est la résistance électrique.