Chapitre 1

Introduction aux équations de Lagrange

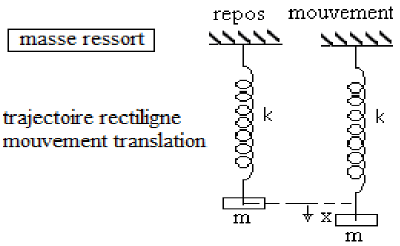
1. Introduction

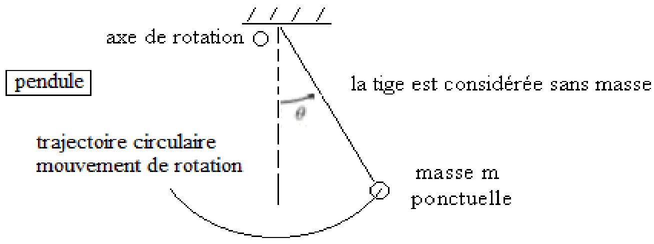
Ce chapitre présente une description globale des mouvements oscillatoires périodiques et harmonique ainsi que les différents formalismes permettant de déterminer les équations différentielles du mouvement des systèmes conservatifs.

2. Généralités sur les vibrations

- **Oscillation**

Mouvement d'un corps qui se déplace alternativement de part et d'autre d'une position d'équilibre. Exemples:





- **Vibration**

Mouvement d'un système matériel élastique autour d'une position d'équilibre. On désigne aussi par vibration les oscillations rapides des systèmes mécaniques.
Un mouvement est dit périodique s'il se répète identique à lui-même pendant des intervalles de temps égaux.

- ✓ Le plus petit intervalle de répétition est appelé **période** notée 'T', définie par le temps qui s'écoule entre deux passages successifs de la masse en mouvement au même endroit. l'unité est la second 's'.
  Une fonction f(t) est dite périodique dans le temps lorsque **f(t+T) = f(t).**

Pour un mouvement de rotation, un tour constitue une répétition.

Pour un mouvement oscillatoire, la durée d'une oscillation (aller et retour) constitue une période.

- ✓ Le nombre de répétition par second est appelé **fréquence** notée « f », l'unité est le hertz « Hz » ou « s^{-1} ». elle est reliée à la période par : $f = 1/T$ nous montre si la vibration est lente ou rapide.

- ✓ Le nombre de tours par seconde est appelé **pulsation** notée ω, l'unité est le rad/s.

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

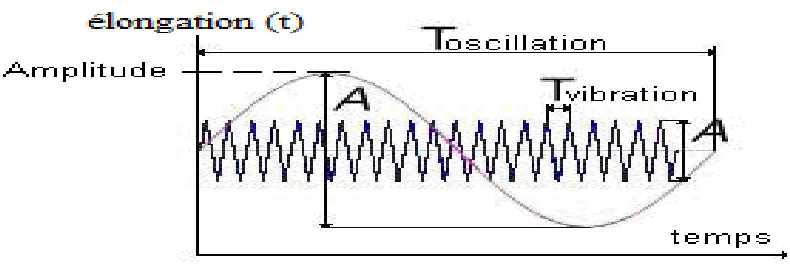
- ✓ La valeur maximale de la grandeur atteinte lors du mouvement est appelée amplitude (A) ou élongation maximale.

- **Différences entre vibration et oscillation**

Les principales différences entre vibration et oscillation sont l'amplitude et la fréquence du mouvement.

Dans l'exemple du pendule simple, le mouvement étant lent, on utilise alors le terme de mouvement oscillatoire.

Le terme de vibration est en général réservé à des fréquences plus élevées, comme les vibrations sonores.



3. Classification des vibrations

- **Vibrations libres et vibrations forcées**

Les vibrations libres sont les vibrations qui résultent lorsqu'on écarte un système de sa position d'équilibre ou on lui donne une vitesse initiale, puis on le laisse vibrer librement.

Cela se passe sans l'intervention d'une force extérieure. **Ex**: une masse accrochée à un ressort- un pendule simple.
Si le système est soumis à une force extérieure au cours de toutes ces vibrations, les vibrations résultantes sont dites forcées.

- **Vibrations amorties et vibrations non amorties**

Si l'énergie totale du système est conservée l'hors des vibrations (il n'y a pas de dissipation de l'énergie), ces vibrations sont dites non amorties. En revanche si le système perd de l'énergie au cours de ces vibrations (si l'on considère la résistance de l'air sur la masse du pendule simple dans l'exemple précédant), après certain temps la masse s'arrête à cause de la dissipation de l'énergie. Ces vibrations, sont dites vibrations amorties.

- **Vibrations forcées amortis:**

La force périodique extérieure (excitation) compense les pertes d'énergie par frottement, les oscillations ainsi entretenus ne s'amortissent pas.

4. Equation de Lagrange

Pour étudier le mouvement oscillatoire d'un système mécanique (connaitre sa nature) on cherche à établir les équations mathématiques (différentielles) qui régissent le mouvement, il est nécessaire dans un premier temps de repérer sa position, grâce à un système d'axes dans l'espace.
L'équation différentiel du mouvement peut être déterminer par plusieurs méthodes :

1. Le principe fondamental de la dynamique (PFD) $\sum F = m\vec{\gamma}$
2. Théorème de l'énergie mécanique (l'énergie mécanique est conservée $\frac{dE_t}{dt} = 0$).
3. Théorème de moment cinétique.
4. Equation de Lagrange.

La méthode de Lagrange est apparu comme un moyen plus efficace (les calculs sont plus rapide) quelque soit la difficulté du système considéré pour l'obtention des équations du mouvement.

4.1. Cas des systèmes conservatifs

L'énergie totale d'un système mécanique est la composition des énergies cinétiques et potentielles :

$$E_t = E_{cin\acute{e}tique} + E_{potentielle} = T + V$$

- Un système est **conservatif** lorsqu'il n'y a pas d'échange d'énergie entre lui et l'extérieure. C'est à dire qu'il ne subit aucune force de frottement (perte) ou force d'excitation (entretient). L'énergie totale d'un système conservatif **est constante** au cours du temps : $\frac{dE_t}{dt} = 0 \quad \forall t$ Cette équation de conservation donne l'équation différentielle des systèmes conservés (sans amortissement).
- La méthode de Lagrange est une des méthodes qui permet de caractériser un mouvement par une formulation Lagrangienne qui nous produit un système d'équations différentielles associé au mouvement.

On définit une fonction mathématique (dont les variables sont **les coordonnées généralisées**) appelée fonction de Lagrange L ou "Lagrangien" donnée par :

$$L = Ec - Ep = T - V$$

- Pour un système **conservatif** les n équations du mouvement sont données par :

Equation de Lagrange : $$\boldsymbol{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \qquad (i = 1, 2 \ldots\ldots, n)}$$

n : nombre de degrés de liberté

- Dans le cas d'une translation suivant 'x', l'équation s'écrit : $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$
- Dans le cas d'une rotation avec un angle θ, l'équation s'écrit : $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$

(*La démonstration de ces équations n'est pas au programme*)

4.1.1. Nombre de degré de liberté

Le nombre minimal des coordonnées indépendantes nécessaires pour étudier un système vibratoire.

n = nombre de degrés de liberté = nombre de coordonnés généralisés = le nombre des équations différentiels

4.1.2. Les coordonnées généralisées

Les coordonnées généralisées sont des variables **indépendantes**, **nécessaires** et **suffisantes** pour décrire le même système mécanique à tout instant. Elles représentent les écarts par rapport à la position d'équilibre. q_i avec $i = 1 \ldots\ldots\ldots n$. n : est le nombre de DDL

Indépendantes : ne présentent aucune relation mathématique entre les coordonnées.

Nombre de coordonnés généralisés = Nombre de coordonnés - Nombre de relations entre ces coordonnés.

Exemple 1 : le pendule simple (connaitre la position de la masse m dans chaque instant). Deux coordonnées $(x, y\ = 2)$.

Par la connaissance d'une seule coordonnée x ou y, car elles sont liées par la relation : $x^2 + y^2 = L^2$ $\quad$ $n = 2 - 1 = 1$ degré de liberté

Exemple 2 : le système masse-ressort

Pour connaitre la position de la masse dans chaque instant, il faut connaitre seulement l'abscisse x, une seule coordonnée, alors le système est à un degré de liberté.

Exemple 3 : deux masses et deux ressorts

Pour connaitre les positions des masses m_1 et m_2 dans chaque instant il faut connaitre les abscisses x_1 et x_2 (les deux coordonnées sont indépendantes), l'étude de ce système nécessite deux coordonnées donc le système est à deux degrés de liberté.

n =1 un système à un degré de liberté

n=2 un système à deux degré de liberté

4.2. Cas des forces de frottement dépendant de la vitesse

En réalité les systèmes sont soumis naturellement à des frottements. Lorsqu'un système oscillatoire est soumis à des forces de frottement **fluide** de la forme :

$f = -\beta\, v$ (β = coefficient d'amortissement visqueux)

On montre que l'on obtient les n équations du mouvement de ce **système non conservatif** grâce aux :

Equation de Lagrange : $$\boldsymbol{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots . n)}$$

Avec L = La fonction Lagrangien ; n = nombre de degré de liberté

Et D = La fonction dissipation définit égale à la demi-puissance dissipée

$$\boldsymbol{D} = \int f dv = \int \beta v dv = \frac{1}{2}\beta v^2$$

4.3. Cas d'une force extérieure dépendant du temps

Lorsqu'un système oscillatoire en plus d'être soumis à des forces de frottement qui dérivent d'une fonction dissipation D, est excité (entretenu) par une force extérieure dépendant du temps F (t)

On montre que l'on obtient les n équations du mouvement de ce **système non conservatif** grâce aux :

Equation de Lagrange : $$\boldsymbol{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial W}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \dots . n)}$$

Avec : L : fonction Lagrangien

D : fonction dissipation = ½ $\beta\, v^2$

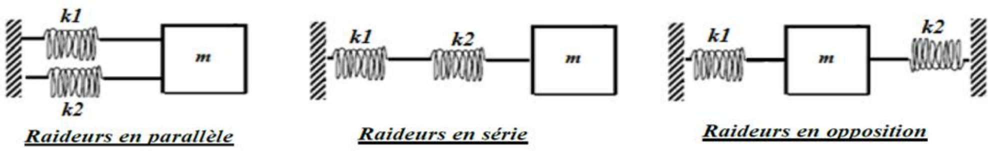
W: travail de la force d'excitation = $\int F\, dx = F$

5. Formules usuelles

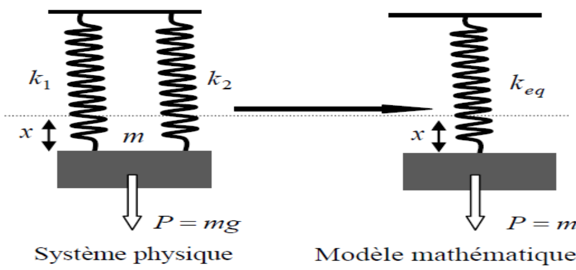
- ✓ Un ressort se déforme au cours du mouvement, il n'y a pas de mouvement de masse, donc un ressort n'a pas d'énergie cinétique. **(d'ailleurs on ne donne pas la masse d'un ressort dans les exercices).**
- ✓ La **déformation** d'un ressort est soit un **allongement** (ressort plus long) soit une **compression** (ressort plus court) par rapport à sa longueur à vide. La **force de rappel** d'un ressort sur une masse est toujours négatif (car agit toujours dans le sens contraire de la déformation)

5.1. Ressort équivalant

Dans le cas de la présence de plusieurs ressorts, on procède par le calcul de raideur équivalent. Les raideurs sont liées soit en série ou en parallèle (opposition).



a. Ressorts en parallèle



La constante de raideur du ressort équivalent est donnée par la relation suivante :

$$k_{eq} = (k_1 + k_2)$$

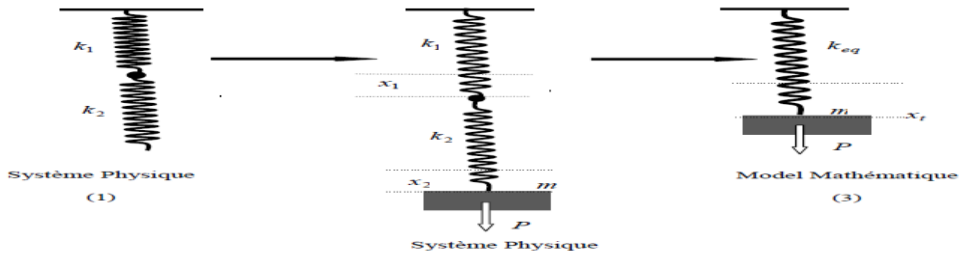
Si le système est constitué de plusieurs ressorts en parallèles, alors la constante de la raideur du ressort équivalent est donnée par :

$$k_{eq} = \sum_i k_i$$

b. ressorts en série

la suspension de la masse m à l'extrémité libre des deux ressorts (k_1 et k_2) cause des allongements x_1 et x_2 dans k_1 et k_2 respectivement.

L'allongement total : $x_t = x_1 + x_2$



La constante de raideur du ressort équivalent est donnée par la relation suivante :

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

Dans le cas général ou le système est constitué de plusieurs ressorts en série :

$$\frac{1}{k_{eq}} = \sum_i \frac{1}{k_i}$$

- ✓ Toute masse « m » animée d'un mouvement de **translation** avec une vitesse v possède une énergie cinétique :

$$E_c = T_{tr} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

- ➢ L'énergie cinétique **de rotation** d'un corps de moment d'inertie $I_{/\Delta}$ est :

$$T_{rot} = \frac{1}{2}I_{/\Delta}\dot{\theta}^2$$

  $I_{/\Delta}$: est le moment d'inertie par rapport aux point de l'axe de rotation.

- ➢ L'énergie potentielle d'une masse dans un champ gravitationnel (L'énergie potentielle gravitationnel) :

$$V_{masse} = mgh\ [assention\ d'une\ hauteur\ h]$$

$$V_{masse} = -mgh\ [descente\ d'une\ hauteur\ h]$$

h : hauteur par rapport au sol

- L'énergie potentielle d'un ressort de raideur k lors d'une déformation x est (L'énergie potentielle élastique) :

$$V_{ress} = \frac{1}{2}kx^2$$

Moment d'inertie

Forme	**Moment d'inertie par rapport au centre de gravité G (J/s)**
Tige (Longueur **L**, masse **M**)	$\frac{1}{12}ML^2$
Cylindre (rayon **R**, masse **M**)	$\frac{1}{2}MR^2$
Sphère (rayon **R**, masse **M**)	$\frac{2}{5}MR^2$
Masse ponctuelle m	ML^2