

TD2 : Interpolation polynomiale

Exercice 1 :

Soit les trois points $(0, 1)$, $(1, 0.5)$ et $(3, 0.25)$ de la fonction $f(x)$.

1. Obtenir le polynôme de Lagrange passant par ces points.
2. Obtenir une approximation de $f(1.5)$.
3. Connaissant que $f(x) = 1/(x + 1)$, calculer l'erreur maximale commise en approximant $f(x)$ par $P(x)$ puis la comparer avec l'erreur exacte.

Exercice 2 :

Soit les polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ définis comme suit :

| | | | |
|--------|----|----|----|
| x | 0 | 1 | 2 |
| $P(x)$ | -6 | 3 | 21 |
| $Q(x)$ | 10 | 15 | 40 |

Trouver leurs points d'intersection en utilisant la méthode d'interpolation de Lagrange.

Exercice 3 :

Soit les deux fonctions f et g définies par :

$$f(x) = \sqrt{x-1} \text{ et } g(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) \text{ et trois points } x_0=1, x_1=\frac{3}{2}, x_2=2$$

1. Montrer sans le calculer, que f et g ont le même polynôme d'interpolation aux points x_0, x_1 et x_2 .
2. Calculer ce polynôme avec la base de Lagrange et la base de Newton.

Exercice 4 :

On dispose des résultats expérimentaux pour la position $f(t)$ d'une étoile à différents temps t :

| | | | | | |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| t | 1.0000 | 1.5000 | 2.0000 | 2.5000 | 3.0000 |
| $f(t)$ | 4.4755 | 5.3996 | 6.5496 | 7.8216 | 9.1997 |

- a) En utilisant un polynôme de degré 2, déterminer une approximation de $f(t)$ pour $t = 1.2$.
- b) En utilisant un polynôme de degré 3, déterminer une approximation de $f(t)$ pour $t = 1.2$.
- c) Donner l'expression analytique de l'erreur d'interpolation pour le polynôme obtenu en a).

Exercice 5 :

Supposons que dans le contexte de la production industrielle, vous avez collecté des données sur le temps nécessaire pour fabriquer une pièce en fonction de son diamètre. Vous avez les données suivantes :

| Diamètres (cm) | Temps de fabrication (min) |
|-----------------------|-----------------------------------|
| 1 | 10 |
| 3 | 20 |
| 5 | 35 |
| 7 | 50 |

Estimer le temps de fabrication pour les diamètres manquants (2, 4, 6) en utilisant l'interpolation polynomiale de Newton.