Oscillations libres à une dimension

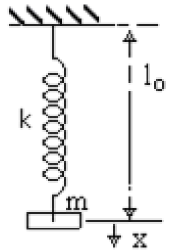
Exercice

Soit 2 ressorts de longueur l_{01}et l_{02} et de raideur k_1 et k_2. Si on suspend à l'extrémité de chaque ressort une masse m, on observe un allongement respectif x_{01}et x_{02}.

1. Déterminer l'équation différentielle du mouvement vertical de la masse m pour l'un des ressorts
2. Déterminer l'équation différentielle du mouvement vertical de la masse m suspendue aux ressorts mis bout à bout (montage série), toutes les constantes du mouvement ainsi que le circuit électrique équivalent.
3. Même question lorsque la masse m est accrochée aux 2 ressorts suspendus au même support parallèlement l'un à l'autre (montage parallèle)
4. Même question pour le cas des 2 ressorts mis de part et d'autre de m selon la figure 1.1. Déterminer en appliquant la règle de raideur du ressort équivalent, le mouvement de m monté selon la figure 1.2.

Réponse

1)



l_0 = longueur de l'un des ressorts ; x_0 = allongement statique du ressort

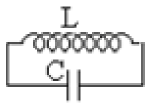
$l_0 + x_0$ = longueur du ressort avec masse au repos $\longrightarrow mg = k x_0$

x = allongement dynamique $\longrightarrow$ mouvement $\longrightarrow m\ddot{x} = mg - k(xo + x)$

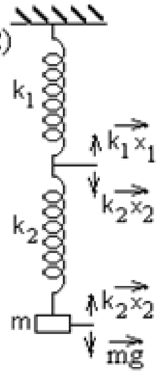
$\longrightarrow \ddot{x}(t) + \frac{k}{m}.x(t) = 0 \longrightarrow$ solution sinusoïdale avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

circuit électrique équivalent : $m \rightsquigarrow L$; $k \rightsquigarrow \frac{1}{C}$; $x \rightsquigarrow q$; $\dot{x} \rightsquigarrow \dot{q} = \frac{dq}{dt} = i \to q = \int i dt$

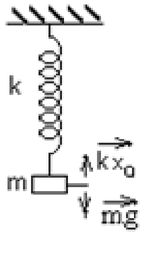
d'où $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \rightsquigarrow \ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$ avec $\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \rightsquigarrow L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i dt = 0 = \sum$ d.d.p. $\longrightarrow$



2)



équivalent à



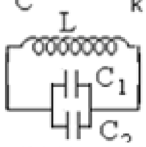
au repos , on a

$mg = k_2x_2 = k_1x_1 = k\,x_0$

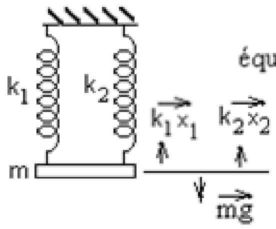
et $x_0 = x_1 + x_2 \longrightarrow x_0 = \frac{k}{k_1}x_0 + \frac{k}{k_2}x_0 \longrightarrow \frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$: $k = \frac{k_1k_2}{k_1 + k_2}$

$k \rightsquigarrow \frac{1}{C}$ donc $\frac{1}{k} \rightsquigarrow C \longrightarrow \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \rightsquigarrow C_1 + C_2 : (C_1 // C_2)$

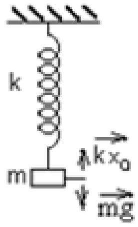
circuit électrique équivalent : $\longrightarrow$



3)



équivalent à

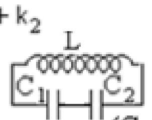


au repos , on a

$mg = k_1x_1 + k_2x_2 = k\,x_0$

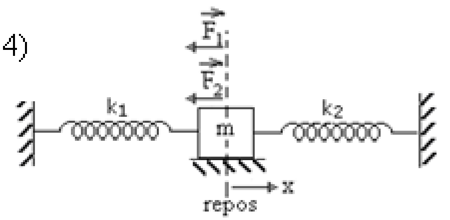
et $x_0 = x_1 = x_2 \longrightarrow k = k_1 + k_2$

circuit électrique équivalent : $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \longrightarrow$



(C_1 et C_2 en série)

4)



lorsque le ressort 1 est allongé de $x \longrightarrow F_1 = -k_1 x$

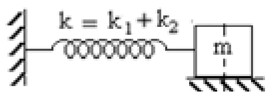
le ressort 2 est comprimé de $x \longrightarrow F_2 = -k_2 x$

la force de rappelle est toujours de sens contraire à la déformation

$\sum \vec{F}orces = m.\vec{\gamma} = m\ddot{x} = -k_1 x - k_2 x = -(k_1 + k_2)x$

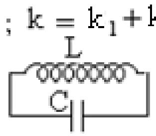
$\longrightarrow \ddot{x} + \omega_0^2.x = 0$ avec $\omega_0^2 = \frac{k_1 + k_2}{m} = \frac{k}{m}$; $k = k_1 + k_2$

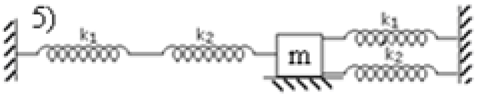
montage équivalent à



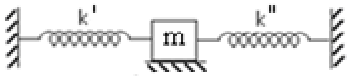
$\longrightarrow$ circuit électrique équivalent

$k \rightsquigarrow \frac{1}{C}$; $m \rightsquigarrow L$



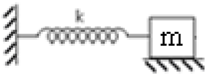


montage équivalent à (résultats des questions 2) le ressort k' équivalent à 2 ressorts en série et 3) le ressort k" équivalent à 2 ressorts en //)



$\frac{1}{k'} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$; $k'' = k_1 + k_2$

$\longrightarrow$ montage équivalent à (résultat de la question 4)



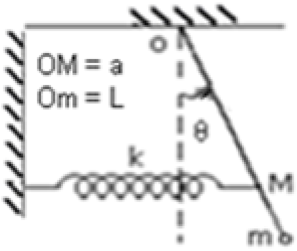
avec $k = k' + k'' = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} + k_1 + k_2$

Exercice

Soit un pendule constitué d'une tige rigide sans masse, de longueur L, d'une masse m et d'un ressort de raideur k.

Au repos (équilibre) la tige est verticale et le ressort est non déformé.

Déterminer les énergies cinétique et potentielle du système mécanique oscillant. En déduire la pulsation (dans le cas des petites oscillations).



Réponse

Au repos le pendule est vertical et le ressort est non déformé

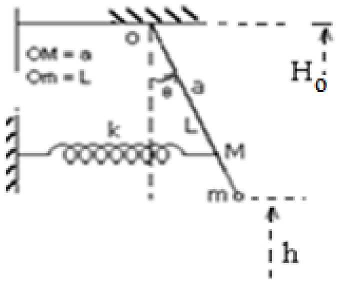
Lorsque m est écarté de θ , le ressort est déformé de x et $x = a \sin\theta$;

rappels

$[u(t)^n]' = n\, u(t)^{n-1}\, u'(t)$

$[f(g(t))]' = f'[g(t)]\; g'(t)$

$T = E_{cm} = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}^2$ avec $\theta = \theta(t)$



$V = E_{pr} + E_{pm}$ $E_{pr} = \frac{1}{2} k x^2$

$E_{pm} = mgh = mg\,(H_0 - L\cos\theta) = +mgH_0 - mgL\cos\theta$

Remarque:

constante

On convient dans les expressions de V de ne pas tenir compte de cette constante puisqu'elle disparait dans les dérivées

$$V = \frac{1}{2} k\, a^2 (\sin\theta)^2 - mgL\cos\theta$$

$$E_t = T + V = \text{constante} \longrightarrow \frac{d\,E_t}{dt} = 0 = mL^2\,\dot{\theta}\,\ddot{\theta} + k\,a^2 \sin\theta\cos\theta\,\dot{\theta} + mgL\sin\theta\,\dot{\theta}$$

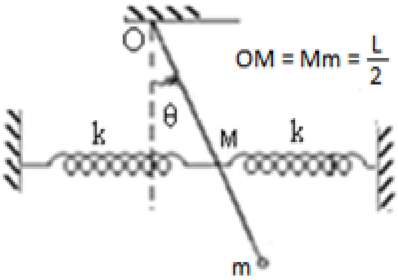
$$\dot{\theta} \neq 0 \ \text{(mouvement)} \longrightarrow mL^2\,\ddot{\theta} + k\,a^2 \sin\theta\cos\theta + mgL\sin\theta = 0$$

pour les petites oscillations : $\sin\theta \sim$ et $\cos \sim 1$ $\longrightarrow$ $\ddot{\theta} + \left(\frac{k\,a^2 + mgL}{mL^2}\right)\theta = \ddot{\theta} + \omega_0^2\,\theta = 0$

ou bien $L = T - V$ $\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta \dot{\theta}}\right) - \frac{\delta L}{\delta \theta} = 0 = mL^2\,\ddot{\theta} + k\,a^2 \sin\theta\cos\theta + mgL\sin\theta$

Exercice

Soit le systèmeoscillatoire mécanique de la figure :



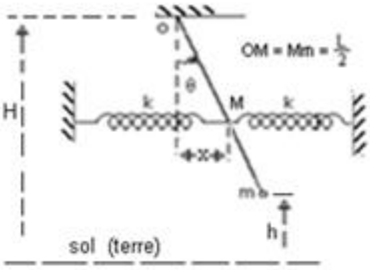
Le pendule est formé d'une tige Om sans masse est d'une masse ponctuelle m. Les ressorts identiques de raideur k sont soudés au milieu de la tige. Au repos $\theta = 0$ et les ressorts sont non déformés. Déterminer les énergies cinétique et potentielle du système mécanique oscillant en fonction de θ.

1) Etablir le Lagrangien du système

2) Trouver l'équation différentielle du mouvement pour les petites oscillations.

En déduire sa période propre.

Réponse



$$\sin\theta = \frac{x}{L/2} \qquad T = \frac{1}{2} J \dot\theta^2 = \frac{1}{2} mL^2 \dot\theta^2 \qquad V = 2\,\frac{1}{2} k x^2 + mgh$$

$$h = H - L\cos\theta \longrightarrow V = k\frac{L^2}{4}\sin^2\theta - mgL\cos\theta + \underbrace{mgH}_{\text{constante}}$$

$$Et = Ec + Ep = T + V = \text{constante (conservation de l'énergie)} \longrightarrow \frac{dEt}{dt} = 0$$

$$mL^2\dot\theta\ddot\theta + k\frac{L^2}{2}\sin\theta\cos\theta\,\dot\theta + mgL\sin\theta\,\dot\theta = 0$$

Rappels
$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u'$
$(f(g(t)))' = f'(g(t))\,g'(t)$

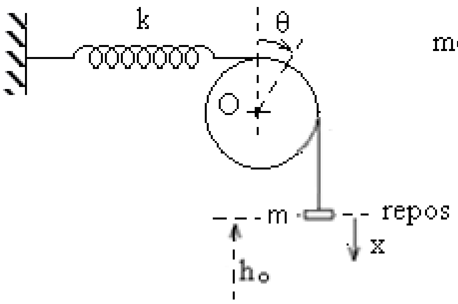
petites oscillations : $\cos\theta \simeq 1$, $\sin\theta \simeq \theta$ $\longrightarrow$ $\dot\theta\left(mL^2\ddot\theta + k\frac{L^2}{2}\theta + mgL\theta\right) = 0$

$\dot\theta \neq 0$ (mouvement) $\longrightarrow$ $\ddot\theta + \underbrace{\frac{kL+2mg}{2mL}}_{\omega_0^2}\theta = 0 \longrightarrow T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{2mL}{kL+2mg}}$

ou bien $L = T - V$ $\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta\dot\theta}\right) - \frac{\delta L}{\delta\theta} = 0 = mL^2\ddot\theta + k\frac{L^2}{2}\theta + mgL\theta$

Exercice

On considère le système oscillatoire mécanique de la figure :



moment d'inertie de la poulie

$$J = \frac{1}{2} M R^2$$

R = rayon de la poulie

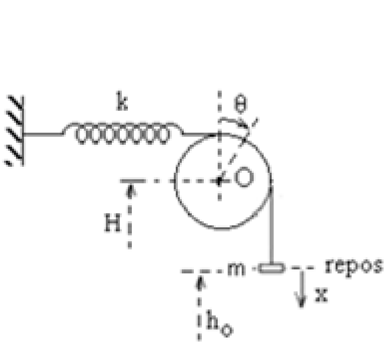
M = masse de la poulie

Lorsque la masse m est au repos à la hauteur h (par rapport au sol) le ressort k est allongé de x_o (allongement statique). Pour avoir des oscillations (mouvement), on tire la masse m de x vers le bas par rapport à sa position de repos (ou d'équilibre), la corde inextensible fait tourner la poulie (de masse M et de rayon R) de θ et allonge le ressort, puis on lâche le système.

1) Etablir le Lagrangien du système.

2) Déterminer l'équation différentielle du mouvement. En déduire la période des oscillations.

Réponse



$$T = \frac{1}{2} m\dot x^2 + \frac{1}{2} J\dot\theta^2 \longrightarrow \dot\theta = \frac{\dot x}{R}$$

$$J = \frac{1}{2} MR^2 \qquad x = R\theta \qquad T = \frac{1}{2} m\dot x^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2} MR^2 \frac{\dot x^2}{R^2}$$

$$T = \frac{1}{4}(M + 2m)\,\dot x^2$$

$$V = \frac{1}{2} k\,(x + x_o)^2 + MgH + mg\,(h_o - x) = \frac{1}{2} k\,(x + x_o)^2 - mgx + \text{une constante}$$

$$L = T - V$$

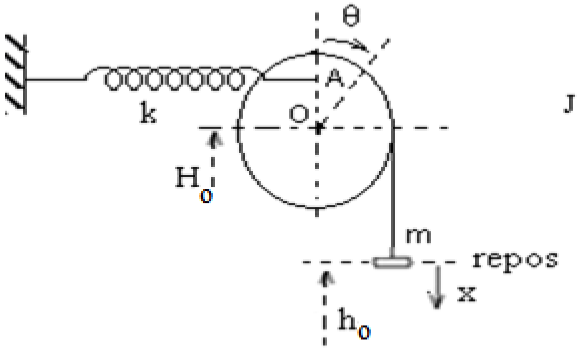
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta \dot{x}}\right) - \frac{\delta L}{\delta x} = 0 \longrightarrow \left(m + \frac{M}{2}\right)\ddot{x} + k(x + x_0) - mg = 0$$

au repos $mg = k\,x_0$ (équation à l'équilibre, statique) $\longrightarrow \ddot{x} + \frac{2k}{(2m+M)}x = 0$

la solution de cette équation différentielle est : $x(t) = X \sin(\omega_0 t + \varphi)$ avec $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{(2m+M)}{2k}}$

Exercice

Soit le système oscillatoire mécanique :



$J = \frac{1}{2}MR^2$ = moment dinertie du disque

$OA = r$

R = rayon du disque
M = masse du disque

Le disque de masse M et de rayon R peut uniquement tourner autour de son axe O. Le ressort de raideur k est attaché en A au disque tel que OA = r. Lorsque la masse m est au repos à la hauteur h (par rapport au sol) le ressort est allongé de x_0 (allongement statique). Pour avoir des oscillations (mouvement), on tire la masse m de x vers le bas par rapport à sa position de repos (ou d'équilibre), la corde inextensible fait tourner la poulie de θ et allonge le ressort, puis on lâche le système.

1) Déterminer les énergies cinétique et potentiel du système (en fonction de θ).

2) En utilisant la loi de la conservation de l'énergie, trouver la pulsation des oscillations.

Réponse

lorsque m descend de x $\longrightarrow$ la poulie tourne de θ $x = R\theta \longrightarrow \dot{x} = R\dot{\theta}$; le ressort est allongé de $\Delta x = r\,\theta$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{4}(M+2m)R^2\dot{\theta}^2$$

$$V = \frac{1}{2}k(x_0 + \Delta x)^2 + mg(h_0 - x) + MgH_0 = \frac{1}{2}k(x_0 + r\theta)^2 + mg(h_0 - R\theta) + MgH_0$$

$$E_t = T + V = \text{constante} \longrightarrow \frac{dE_t}{dt} = 0$$

$$\frac{dE_t}{dt} = 2\,\frac{1}{4}(M+2m)R^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + k(x_0 + r\theta)r\dot{\theta} - mgR\dot{\theta} = 0$$

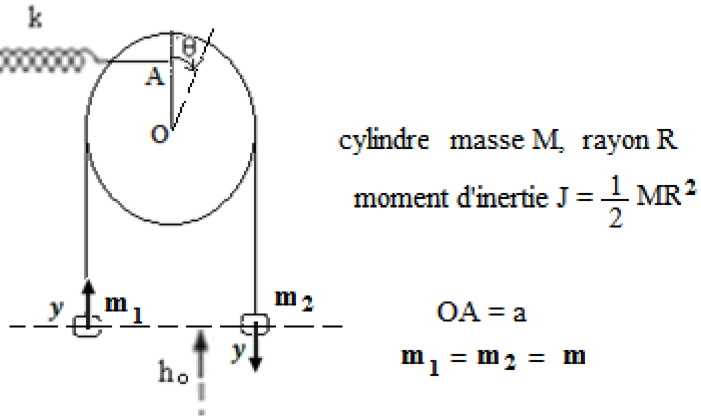
$$\dot{\theta}\left(\frac{1}{2}(M+2m)R^2\ddot{\theta} + kr^2\theta + \underbrace{kx_0r - mgR}_{\text{somme des moments des forces à l'équilibre} = 0}\right) = 0$$

$$\dot{\theta} \neq 0 \text{ (mouvement)} \longrightarrow \frac{1}{2}(M+2m)R^2\ddot{\theta} + kr^2\theta = 0$$

$$\longrightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2\,\theta = 0 \quad \text{avec :} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{2kr^2}{(2m+M)R^2}}$$

Exercice

Soit le système oscillatoire mécanique :

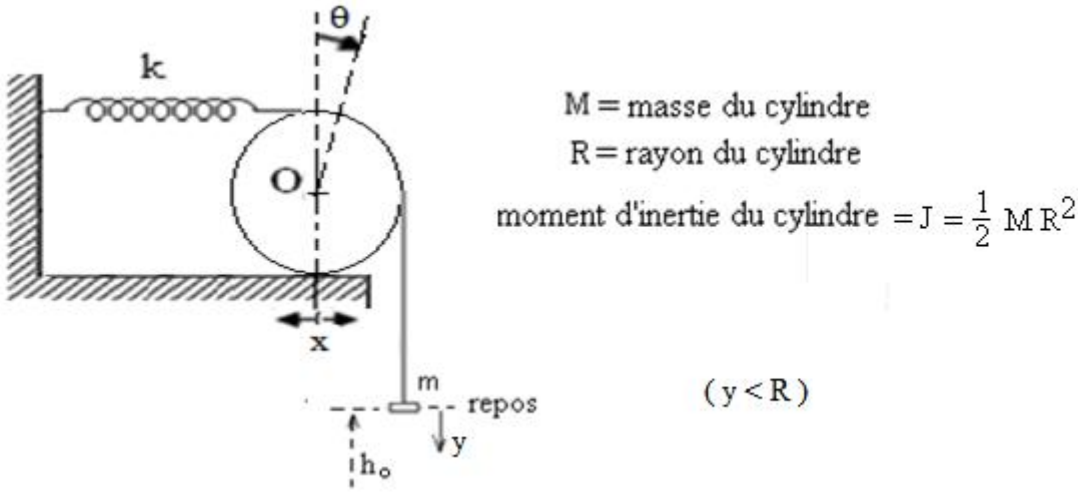


Le fil qui relie les masses m_1 et m_2 s'enroule sans glisser sur le pourtour du cylindre.
Au repos le ressort k est non déformé, les masses m_1 et m_2 sont à la hauteur h_o.
Lorsque m_2 descend de y, la masse m1 monte de y et le cylindre tourne de θ, donc $y = R\theta$.
1) Déterminer les énergies cinétique et potentiel du système (en fonction de θ).
2) Trouver la pulsation des oscillations.

Réponse

Exercice

On considère le système oscillatoire mécanique de la figure :



Lorsque la masse m est au repos à la hauteur h_o (par rapport au sol) le ressort k est allongé de x_o (allongement statique). Pour avoir des petites oscillations (mouvement), on tire la masse m de y vers le bas par rapport à sa position de repos (ou d'équilibre), la corde inextensible provoque simultanément un mouvement de rotation θ et un mouvement de translation x de la poulie (roulement sans glissement), puis on lâche le système.
1) Déterminer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système (on choisira x comme degré de liberté).
2) Déterminer l'équation différentielle du mouvement en fonction de x.
En déduire la période des oscillations.

Réponse

$$x = R\theta \longrightarrow \dot{x} = R\dot{\theta} \quad , \quad y = x + R\theta = 2x \longrightarrow \dot{y} = 2\dot{x}$$

$$T = \tfrac{1}{2} m\dot{y}^2 + \tfrac{1}{2} M\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2} J\dot{\theta}^2 = \tfrac{1}{2} m4\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2} M\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2} MR^2\dot{\theta}^2 = (2m + \tfrac{3}{4}M)\dot{x}^2$$

$$V = mg(h_0 - y) + \tfrac{1}{2} k(x_0 + y)^2 = mgh_0 - mg2x + \tfrac{1}{2} k(x_0 + 2x)^2$$

$$V = mgh_0 - 2mgx + \tfrac{1}{2} kx_0^2 + 2kx^2 + 2kx_0x = mgh_0 - 2x(mg - kx_0) + \tfrac{1}{2} kx_0^2 + 2kx^2$$

Au repos : $mg = kx_0 \longrightarrow V = mgh_0 + \tfrac{1}{2} kx_0^2 + 2kx^2$

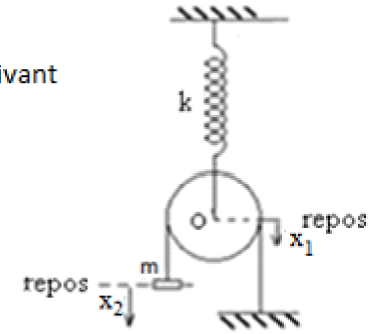
$L = T - V$, mouvement oscillatoire libre :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta \dot{x}}\right) - \frac{\delta L}{\delta x} = 0 \longrightarrow (4m + \tfrac{3}{2}M)\ddot{x} + 4kx = 0$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \longrightarrow \omega_0^2 = \frac{4k}{(4m + \tfrac{3}{2}M)} \quad , \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{(8m + 3M)}{8k}}$$

Exercice

Soit le système oscillatoire suivant



Au repos (équilibre) le ressort k est allongé de x_o. Lorsque la masse m descend de x_2 (mouvement) la poulie (de masse M de rayon R et de moment d'inertie $J = \tfrac{1}{2} MR^2$) descend (le ressort s'allonge) de x_1 et tourne de θ ($R\theta = x_1$), donc $x_2 = x_1 + R\theta = 2\,x_1$.
En utilisant le Lagrangien trouvez la période des oscillations.

Réponse

Lorsque la masse m descend de x_2 $\longrightarrow$ la poulie descend de x_1 (mouvement de translation)
$x_2 = x_1 + R\theta = 2\,x_1$ et la poulie tourne de θ (mouvement de translation) $x_1 = R\theta$

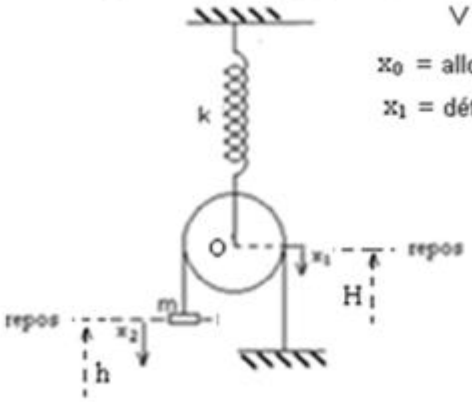
$T = \tfrac{1}{2} m\dot{x}_2^2 + \tfrac{1}{2} M\dot{x}_1^2 + \tfrac{1}{2} J\dot{\theta}^2$; $J = \tfrac{1}{2} MR^2$; $\dot{x}_2^2 = 4\dot{x}_1^2$ $\longrightarrow$ $T = (\tfrac{3}{4}M + 2m)\,\dot{x}_1^2$

$V = E_{pr} + E_{pm} + E_{pM}$ $\qquad E_{pr} = \tfrac{1}{2} k\,(x_0 + x_1)^2$

x_0 = allongement statique (allongement au repos)

x_1 = déformation dynamique (mouvement)

$L = T - V$



$$V = \tfrac{1}{2} k\,(x_0 + x_1)^2 + mg\,(h - x_2) + Mg\,(H - x_1)$$

$$= -(M + 2m)\,g\,x_1 + \tfrac{1}{2} k\,(x_0 + x_1)^2 + \text{constante}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta \dot{x}_1}\right) - \frac{\delta L}{\delta x_1} = 0$$

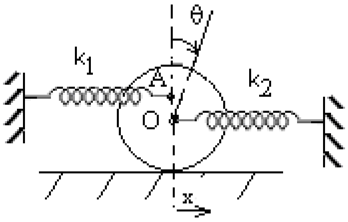
$$= (\tfrac{3}{2}M + 4m)\,\ddot{x}_1 - (M + 2m)g + k(x_0 + x_1)$$

$$= (\tfrac{3}{2}M + 4m)\,\ddot{x}_1 + kx_1 \underbrace{- (M + 2m)g + kx_0}_{\text{équation d'équilibre au repos} \;=\; \sum \vec{F}orces = 0} = 0 \longrightarrow \ddot{x}_1 + \omega_0^2\, x_1 = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = \frac{2k}{3M + 8m}$$

$$\longrightarrow T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Exercice

On considère le système oscillatoire mécanique de la figure



$OA = \frac{R}{2}$ $\qquad$ R = rayon du disque

$J = \frac{1}{2} M R^2$ = moment d'inertie du disque

M = masse du disque

Au repos les ressorts ne sont pas déformés.
Le cylindre (de masse M de rayon R et de moment d'inertie $J = ½ MR^2$) roule sans glisser, c'est-à-dire que lorsqu'il tourne de θ, son centre de gravité se déplace de x ($x = R\theta$).

1 Déterminer le Lagrangien du système

2 Etablir l'équation différentielle du mouvement pour les petites oscillations et en déduire la période propre des oscillations pour $k_1 = k_2 = k$.

Ou bien

1) Déterminer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système
en déduire le Lagrangien pour $k_1 = k$ et $k_2 = 2k$

2) Calculer l'équation du mouvement et en déduire sa période propre

Réponse

Le cylindre a 2 mouvements simultanés: rotation de θ et translation de x, $x = R\theta$.
Le ressort k_1 subit 2 déformations.

Lorsque le ressort k_1 s'allonge de $\frac{R}{2}\sin\theta + x = \frac{R}{2}\sin\theta + R\theta$

→ le ressort k_2 se comprime de $x = R\theta$; et inversement

T = énergie cinétique du système = énergie cinétique du disque (rotation + translation)
V = énergie potentielle du système = énergie potentielle des 2 ressorts de raideurs k_1 et k_2

$$L = T - V = \left(\frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}M\dot x^2\right) - \left(\frac{1}{2}k_1\left(x + \frac{R}{2}\sin\theta\right)^2 + \frac{1}{2}k_2 x^2\right)$$

$$L = \frac{3}{4}MR^2\dot\theta^2 - \frac{1}{2}k_1R^2\left(\theta + \frac{\sin\theta}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}k_2R^2\theta^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta\dot\theta}\right) - \frac{\delta L}{\delta\theta} = 0 = \frac{6}{4}MR^2\ddot\theta + k_1R^2\left(\theta + \frac{\sin\theta}{2}\right)\left(1 + \frac{\cos\theta}{2}\right) + k_2R^2\theta$$

pour les petites oscillations : $\sin\theta \sim \theta$ et $\cos\theta \sim 1$ $\longrightarrow$ $\ddot\theta + \left(\frac{9k_1 + 4k_2}{6M}\right)\theta = 0$

$$\ddot\theta + \omega_0^2\theta = 0 \qquad k_1 = k_2 = k \longrightarrow \mathbf{T = 2\pi}\sqrt{\frac{6M}{13k}}$$

Ou bien

$$T = ½ M\dot x^2 + ½ J\dot\theta^2 = ½ M(R\dot\theta)^2 + ½\, ½ MR^2\dot\theta^2 = \frac{3}{4}MR^2\dot\theta^2 = \frac{3}{4}M\dot x^2$$

$$V = ½ k_1(x + R\theta)^2 + ½ k_2 x^2 = ½ k_1 4R^2\theta^2 + ½ k_2R^2\theta^2$$

$$= ½(4k_1 + k_2)R^2\theta^2 = ½(4k_1 + k_2)x^2$$

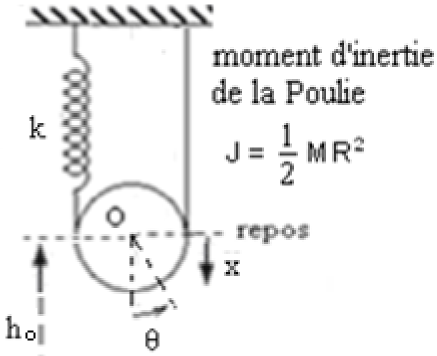
$$L = T - V = \frac{3}{4}M\dot x^2 - 3kx^2 = \left(\frac{3}{4}M\dot\theta^2 - 3k\theta^2\right)R^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta\dot\theta}\right) - \frac{\delta L}{\delta\theta} = 0 = \frac{3}{2}M\ddot\theta + 6k\theta \longrightarrow \ddot\theta + 4\frac{k}{M}\theta = 0 \longrightarrow T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \pi\sqrt{\frac{M}{k}}$$

Soit le système oscillatoire mécanique de la figure 3. **Au repos** (c'est-à-dire à l'équilibre, pas de mouvement), le ressort de raideur k est allongé de x_o (allongement statique) et le centre de gravité O de la poulie (de masse M et de rayon R) est à la hauteur h_o (altitude). **En mouvement**, lorsque le centre O de la poulie descend de x, la poulie tourne en même temps de θ (par rapport à son axe O, $x = R\Theta$). 1) Calculer les énergies cinétique et potentielle du système.

2) En utilisant la formule de Lagrange, trouver l'équation différentielle du mouvement.

3) En déduire la période propre des oscillations libres du système.



Réponse

Lorsque la poulie descend de x elle tourne de θ : $x = R\theta \longrightarrow$ le ressort est allongé de $x + R\theta = 2x$

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 \quad : \quad \dot{x} = R\dot{\theta} \qquad T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2 = \frac{3}{4}M\dot{x}^2$$

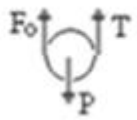
$$V = \frac{1}{2}k(x_0+2x)^2 + Mgh = \frac{1}{2}k(x_0+2x)^2 + Mg(h_0 - x)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta \dot{x}}\right) - \frac{\delta L}{\delta x} = 0 \qquad L = T - V \longrightarrow \frac{3}{2}M\ddot{x} + k(x_0+2x)2 - Mg = \frac{3}{2}M\ddot{x} + 4kx + \underbrace{2kx_0 - Mg}_{\text{équation à l'équilibre} = 0} = 0$$

Poulie au repos

$$\sum \vec{F}_{\text{orces}} = P + F_0 + T = 0 = Mg - kx_0 - T \longrightarrow Mg = kx_0 + T$$

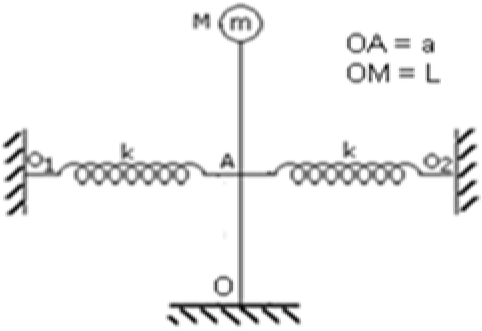
$$\sum \text{Moments des } \vec{F}_{\text{orces}}/O = 0 \longrightarrow F_0R - TR = 0 \longrightarrow T = kx_0$$



$$\longrightarrow \ddot{x} + \frac{8}{3}\frac{k}{M}x = 0 \qquad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{8}\frac{M}{k}}$$

Exercice

Un pendule inversé est constitué d'une tige de longueur L, de masse négligeable, mobile dans le plan de la figure autour du point 0, portant à son extrémité M une masse m ponctuel. En A sont attachés 2 ressorts identiques de raideur k tendus entre A et 2 points symétriques O_1 et O_2. Au repos la tige est verticale et les ressorts sont non déformés.



Déterminer, lorsque la position d'équilibre du pendule est stable, la fréquence de ses oscillations de faible amplitude.

Réponse

On peut écarter la masse m d'un petit angle θ par rapport à la verticale, l'énergie potentielle du système est :

V = Epot des 2 ressorts + Epot de la masse $= 2.\frac{1}{2}\,k\,(a.\sin\theta)^2 + mg.l.\cos\theta = k.a^2\,(\sin\theta)^2 + mg.l.\cos\theta$

La position d'équilibre est donnée par (Epot min) : $\left(\frac{\delta V}{\delta\theta}\right)_{\theta \text{ équilibre}} = 0 = 2\ k.a^2 \sin\theta.\cos\theta\ -\ mg.l.\sin\theta$

On fait les approximations de $\sin\theta \approx \theta$ et de $\cos\theta \approx 1$ pour les petits angles θ

$\rightarrow (2\ k.a^2\ -\ mg.l).\theta_{éq} = 0\ \rightarrow \theta_{éq} = 0$

cette position d'équilibre verticale est stable si : $\frac{\delta^2 E_p}{\delta\theta^2} > 0 \longrightarrow 2\ k.a^2 - mg.l > 0 \longrightarrow \mathbf{a^2 > \frac{mgl}{2k}}$

dans ce cas on a des oscillations et l'équation du mouvement est trouvée grâce à $\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta\dot\theta}\right) - \frac{\delta L}{\delta\theta} = 0$ avec $L = \text{Lagrangien} = T - V$

et $T = \text{Energie cinétique du système} = \text{Ec masse } m = ½\, J\,\dot\theta^2 = ½\, m l^2 \dot\theta^2$ (J = moment d'inertie)

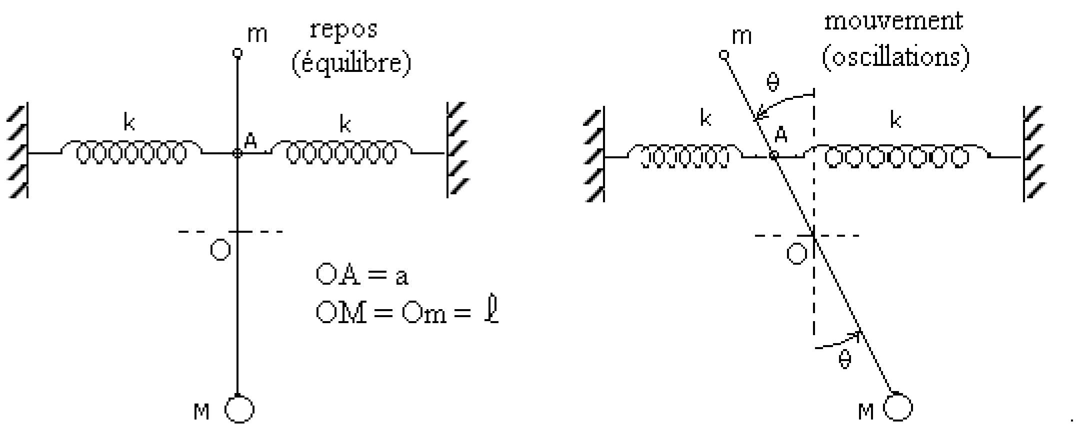
$L = ½\, m l^2 \dot\theta^2 - k a^2 (\sin\theta)^2 + mgl.\cos\theta \longrightarrow m l^2 \ddot\theta + 2\,k.a^2 \sin\theta\cos\theta - mgl.\sin\theta = 0$

pour les petites oscillations : $\sin\theta \sim \theta$ et $\cos\theta \sim 1 \longrightarrow \ddot\theta + \left(\frac{2\,k.a^2 - mgl}{m l^2}\right)\theta = 0$

avec $f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2\,k.a^2 - mgl}{m l^2}} = \frac{1}{T}$ à condition que $2\ k.a^2 - mgl > 0$

Exercice

On considère le pendule métronome de la figure constitué d'une tige rigide de masse négligeable de longueur 2L portant à ses extrémisées des masses m et M considérées ponctuelles et 2 ressorts identiques soudés en un point A à la tige. Au repos le système est symétrique par rapport à la verticale et les ressorts non déformés.



La tige écartée d'un angle θ, les ressorts déformés de x, le système oscille dans le plan de la figure autour de l'axe de rotation O.

1) Donner le lagrangien du système oscillatoire libre à un degré de liberté.
2) Etablir l'équation différentielle du mouvement dans le cas des petites oscillations, et sa solution $\theta(t)$.
3) En déduire la période propre pour M = m et a = ℓ / 2.

Réponse

T = énergie cinétique du système = $\frac{1}{2} J_M \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_m \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} ML^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} mL^2\dot{\theta}^2$

V = Epot des 2 ressorts + Epot des 2 masses = $2.\frac{1}{2} k x^2 + (-MgL\cos\theta + mgl\cos\theta)$

$x = a\sin\theta$; $L = T - V = \frac{1}{2}(M+m)L^2\dot{\theta}^2 - k(a.\sin\theta)^2 + (M - m)gL\cos\theta$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta\dot{\theta}}\right) - \frac{\delta L}{\delta\theta} = 0 = (m+M)L^2\ddot{\theta} + 2ka^2\sin\theta\cos\theta + (M - m)gL\sin\theta$$

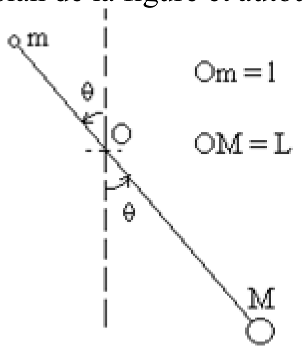
pour les petites oscillations : $\sin\theta \sim \theta$ et $\cos\theta \sim 1$

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{2k.a^2 + (M - m)gL}{(m+M)L^2}\right)\theta = \ddot{\theta} + \omega_0^2\,\theta = 0 \longrightarrow \theta(t) = \theta_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\begin{matrix} m = M \\ a = L/2 \end{matrix} \longrightarrow T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 4\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$$

Exercice

Soit un métronome constitué d'une tige rigide (sans masse, verticale au repos) portant 2 masses ponctuelles m et M. Les oscillations ont lieu dans le plan de la figure et autour de l'axe O.



Lagrangien et équation du mouvement ? Période du mouvement ? Analyser le mouvement lorsque M.L → m.l

Réponse

$$L = T - V = \frac{1}{2} m l^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} ML^2\dot{\theta}^2 - (-MgL\cos\theta + mgl\cos\theta) = \frac{1}{2}(ml^2 + ML^2)\dot{\theta}^2 + (MgL - mgl)\cos\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta\dot{\theta}}\right) - \frac{\delta L}{\delta\theta} = 0 = (ml^2 + ML^2)\ddot{\theta} + (MgL - mgl)\sin\theta$$

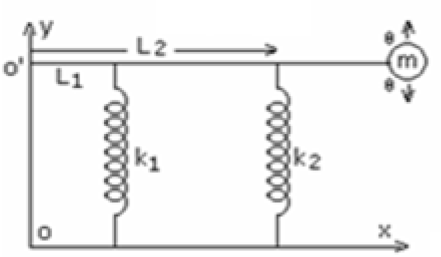
pour les petites oscillations : $\sin\theta \sim \theta \longrightarrow \ddot{\theta} + \frac{MgL - mgl}{ml^2 + ML^2}\theta = 0 \longrightarrow T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2 + ML^2}{MgL - mgl}}$

Lorsque $ML \longrightarrow ml$: La limite de $\omega_0^2 = 0$ C'est-à-dire $T_0 \longrightarrow \infty$: pas d'oscillations

$\ddot{\theta} = 0 \longrightarrow \dot{\theta}$ = constante $\longrightarrow \theta$ = constante. $t + \theta_0$: mouvement circulaire uniforme

Exercice

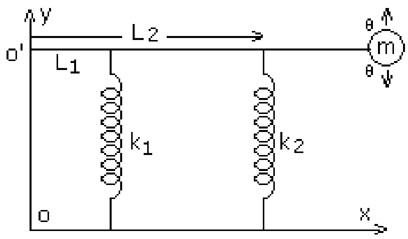
Soit le système oscillatoire mécanique de la figure :

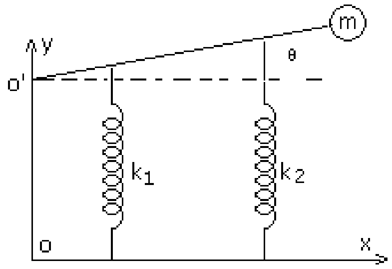


Au repos la tige O'm est horizontal.

En mouvement la masse m se déplace dans le plan x0y avec un angle θ (mouvement oscillatoire de rotation de la tige O' par rapport à O'). Calculer le Lagrangien du système et en déduire l'équation différentielle dans le cas des petites oscillations

Réponse





Au repos la tige O'm est horizontal. Les ressorts sont comprimés de x_{01} et x_{02} (déformations statiques).

l_{01} et l_{02} étant les longueurs des ressorts à vide : l_{01} = OO'+ x_{01} ; l_{02} = OO'+ x_{02}

En mouvement oscillatoire, la masse m se déplace dans le plan x0y avec un angle θ. Les ressorts sont déformés par rapport à l'horizontal de $x_1 = L_1 \sin\theta$ et $x_2 = L_2 \sin\theta$ (déformations dynamiques)

$$L = T - V \qquad T = \frac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}^2$$

$$V = \frac{1}{2} k_1 (x_1 - x_{01})^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_2 - x_{02})^2 + mg(OO' + L\sin\theta)$$

$$V = \frac{1}{2} k_1 (L_1 \sin\theta - x_{01})^2 + \frac{1}{2} k_2 (L_2 \sin\theta - x_{02})^2 + mg(OO' + L\sin\theta)$$

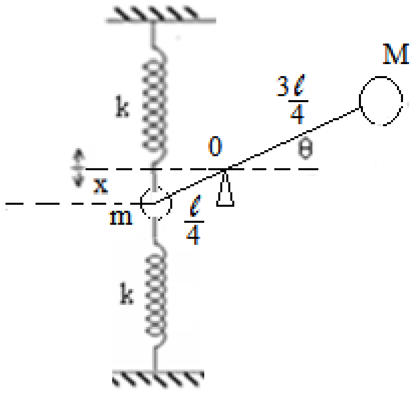
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta\dot{\theta}}\right) - \frac{\delta L}{\delta\theta} = 0 \longrightarrow mL^2\ddot{\theta} - (0 - (k_1(L_1\sin\theta - x_{01})L_1\cos\theta + k_2(L_2\sin\theta - x_{02})L_2\cos\theta + mgL\cos\theta) = 0$$

$$mL^2\ddot{\theta} + k_1L_1^2\sin\theta\cos\theta + k_2L_2^2\sin\theta\cos\theta \underbrace{- k_1x_{01}L_1\cos\theta - k_2x_{02}L_2\cos\theta + mgL\cos\theta}_{\text{équation à léquilibre (repos)} = \sum M^t \vec{F}/0 = 0} = 0$$

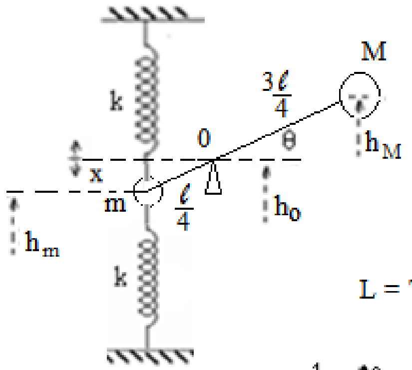
$$\text{pour les petites oscillations : } \sin\theta \sim \theta \text{ et } \cos\theta \sim 1 \longrightarrow \ddot{\theta} + \left(\frac{k_1L_1^2 + k_2L_2^2}{mL^2}\right)\theta = 0 = \ddot{\theta} + \omega_0^2\theta$$

Exercice

On considère un fléau constitué de 2 ressorts et d'une barre métallique de masse négligeable, de longueur ℓ portant deux masses ponctuelles m et M, tournant sans frottement autour de son axe au point fixe O comme le montre la figure :
x est la déformation dynamiques (amplitudes à chaque instant) de la masse m par rapport à sa position de repos (à l'équilibre la barre est horizontale $\theta = 0$). Déterminer:
1) Bilan énergétique, et Lagrangien du système.
2) L'équation différentielle du mouvement, dans le cas des petites oscillations. En déduire la pulsation propre et la période propre.



Réponse



1) x, θ, h_M, h_m 4 coordonnées généralisées, Et 3 relations entre eux

$x = h_o - h_m$ $\qquad \sin\theta = \dfrac{h_M - h_o}{\frac{3\ell}{4}} = \dfrac{h_o - h_m}{\frac{\ell}{4}} = \dfrac{x}{\frac{\ell}{4}}$

4-3 = 1, donc système à un degré de liberté.

$L = T - V$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \qquad x = \frac{\ell}{4}\sin\theta \rightarrow \dot{x} = \frac{\ell}{4}\dot{\theta}\cos\theta \qquad J = \frac{1}{2} M \left(\frac{3\ell}{4}\right)^2 = \frac{9}{32} M \ell^2$$

$$T = \frac{1}{32} m \ell^2 \dot{\theta}^2 \cos^2\theta + \frac{9}{64} M \ell^2 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{32}\left(m\cos^2\theta + \frac{9}{2}M\right)\ell^2 \dot{\theta}^2$$

$$V = 2\frac{1}{2} k x^2 + mg h_m + Mg h_M = k\frac{\ell^2}{16}\sin^2\theta - mg\frac{\ell}{4}\sin\theta + Mg\frac{3\ell}{4}\sin\theta + \text{constante}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta\dot{\theta}}\right) - \frac{\delta L}{\delta\theta} = 0 = \frac{1}{16}\left(m\cos^2\theta + \frac{9}{2}M\right)\ell^2\ddot{\theta} + \left(k\frac{\ell^2}{8}\sin\theta - mg\frac{\ell}{4} + Mg\frac{3\ell}{4}\right)\cos\theta$$

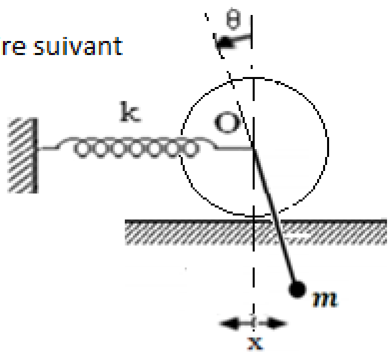
Dans le cas des petites oscillations : $\dfrac{1}{16}\left(m + \dfrac{9}{2}M\right)\ell^2\ddot{\theta} + k\dfrac{\ell^2}{8}\theta = 0$

puisque $- mg\dfrac{\ell}{4} + Mg\dfrac{3\ell}{4} = 0$ équation à léquilibre (repos) = $\sum M^t \vec{F}/0 = 0$

MHS : $\omega_o^2 = \dfrac{2k}{2m + 9M}$ $\qquad T_o = 2\pi\sqrt{\dfrac{2m + 9M}{2k}}$

Exercice

Soit le système oscillatoire suivant



$J_M = \frac{1}{2} M R^2$ = moment d'inertie du disque

M = masse du disque

R = rayon du disque

$Om = \ell$

Le pendule de longueur Om = l (tige sans masse porte une masse m ponctuelle en son extrémité) est solidaire au cylindre (disque) en O axe de rotation (tournent ensemble). Le disque (cylindre) roule sans glisser (**x = Rθ**).

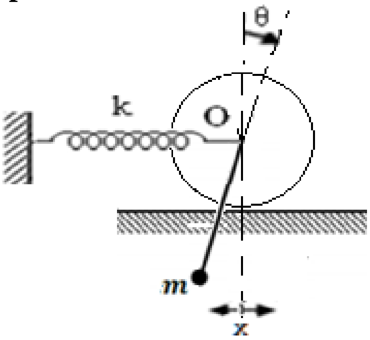
A l'équilibre (repos) θ = 0, le ressort k est non déformé.

1)Déterminele bilan énergétique.

2)Dans le cas des **petites oscillations**établir l'équation différentielle du mouvement,.

En déduire la pulsation propre et la périodepropre.

Réponse



2 coordonnées généralisées x et θ - une relation x = Rθ = 1 degré de liberté

Energie cynétique : $T = T_M + T_m$

$$T_M = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J_M\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2 = \frac{3}{4}M\dot{x}^2 = \frac{3}{4}MR^2\dot{\theta}^2$$

$$m\begin{cases} x - \ell\sin\theta \\ \ell\cos\theta \end{cases} \qquad v_m\begin{cases} \dot{x} - \ell\dot{\theta}\cos\theta \\ \ell\dot{\theta}\sin\theta \end{cases} \rightarrow \quad T_m = \frac{1}{2}m\left[\ell^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta + (\dot{x} - \ell\dot{\theta}\cos\theta)^2\right]$$

$$\begin{matrix} x = R\theta \\ \cos\theta \simeq 1 \end{matrix} \rightarrow \quad T_m = \frac{1}{2}m\left[\ell^2\dot{\theta}^2 + \dot{x}^2 - 2\ell\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta\right] = \frac{1}{2}m\left[\ell^2\dot{\theta}^2 + R^2\dot{\theta}^2 - 2\ell\dot{\theta}R\dot{\theta}\right] = \frac{1}{2}m(\ell - R)^2\dot{\theta}^2$$

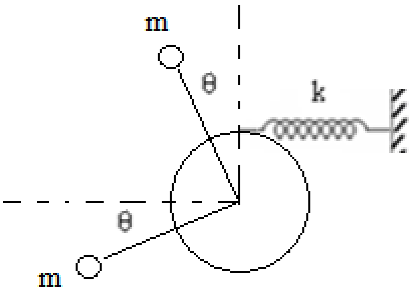
Energie potentielle : $V = V_{masse} + V_{ressort} = -mg\,\ell\cos\theta + \frac{1}{2}kx^2 = -mg\,\ell\cos\theta + \frac{1}{2}kR^2\theta^2$

$$L = T - V = \frac{3}{4}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m(\ell - R)^2\dot{\theta}^2 + mg\,\ell\cos\theta - \frac{1}{2}kR^2\theta^2$$

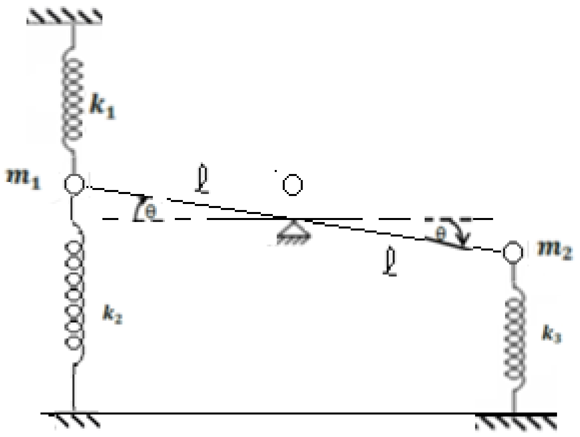
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0 \qquad \sin\theta \simeq \theta \quad \rightarrow \quad \left[\frac{3}{2}MR^2 + m(l - R)^2\right]\ddot{\theta} + (mgl + kR^2)\theta = 0$$

$$\omega_0^2 = 2\,\frac{mgl + kR^2}{3MR^2 + 2m(l - R)^2}$$

Exercice

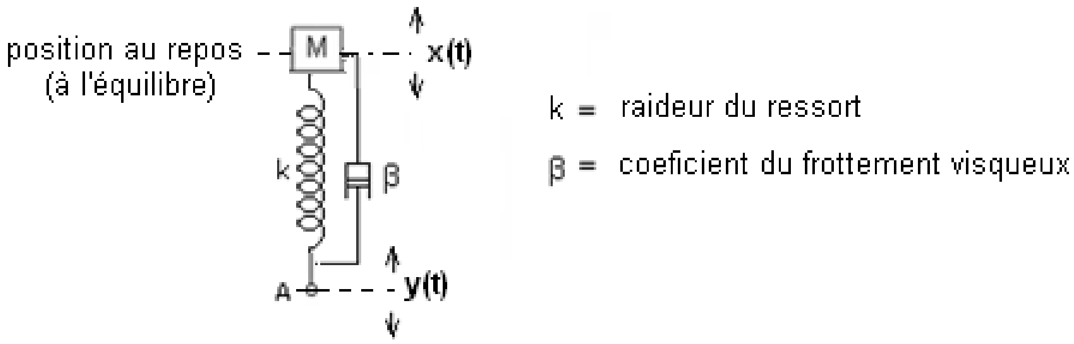


Exercice



Exercice

On considère le système oscillatoire mécanique amorti de la figure :



Le point A est soumis à des vibrations verticales d'amplitude y(t).

La masse M est alors animée d'un mouvement oscillatoire vertical d'amplitude dynamique x(t).

1) Etablir l'équation du mouvement de la masse M. En déduire l'équation différentielle du mouvement en fonction de x et y

2) On donne M = ; k = ; β = . les conditions initiales : x(0) = 0 ; v(0) =

Déterminer la solution du régime transitoire.