

ONDES ET VIBRATIONS Cours, TD et TP



Dr. Nadjat MOKEDDEM

Université Abou Bekr Belkaïd, Tlemcen

Faculté de: Technologie

Département : Génie électrique et électronique (GEE)

Email ; nd.mokeddem@yahoo.fr

Table des matières



Objectifs	4
Introduction	5
I - Exercice : Trigonométrie	6
II - Exercice : Calcul Différentiel	7
III - Chapitre 1 : Introduction aux équations de Lagrange	8
1. Introduction	8
2. Généralités sur les vibrations	9
2.1. Oscillation	9
2.2. Vibration	9
2.3. Différences entre vibration et oscillation	9
3. Classification des vibrations	10
3.1. Vibrations libres et vibrations forcées	10
3.2. Vibrations amorties et vibrations non amorties	10
3.3. Vibrations forcées amorties	10
4. Exercice : Question 1 : oscillations libres	10
5. Exercice : Question 2 : oscillations forcées	11
6. Équation de Lagrange	11
6.1. Cas des systèmes conservatifs	11
6.2. Cas des forces de frottement dépendant de la vitesse	13
6.3. Cas d'une force extérieure dépendant du temps	13
7. Exercice	14
8. Exercice	14
9. Formules usuelles	14
9.1. Ressort équivalent	14
10. Série de TD n°1	16
IV - Exercice : Équations Différentielles	17
V - Exercice : Énergie	18
VI - Chapitre 2 : Oscillations libres des systèmes à un degré de liberté	19
1. Introduction	19

2. Exercice	19
3. Exercice	19
4. Oscillations libres non amortis	19
5. Exercice	21
6. Mouvement oscillatoire de translation (le système masse-ressort)	21
6.1. La méthode de Newton	21
6.2. Méthode de Lagrange	22
7. Mouvement oscillatoire de rotation (le pendule simple)	23
8. Exercice :	25
9. circuit électrique L-C oscillant	25
10. Analogies électromécanique	26
11. Exercices résolus	27
12. série de TD n°2	27
13. Polycopie de TP Ondes et Vibrations	27
Solutions des exercices	28
Abréviations	31
Bibliographie	32

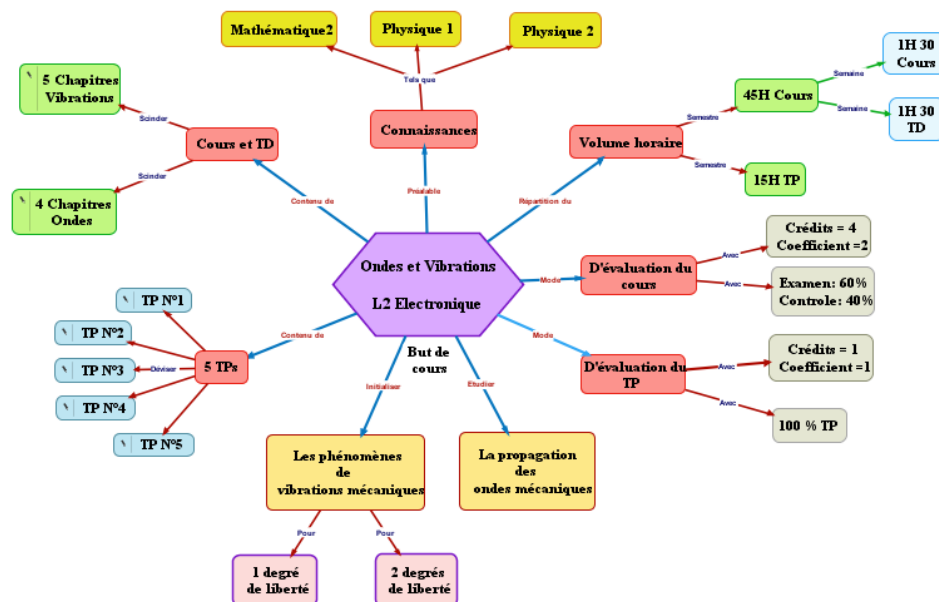
Objectifs

L'objectif du module "ondes et vibrations" est de fournir aux étudiants une compréhension approfondie des phénomènes d'ondes et de vibrations qui sont omniprésents dans la nature et les systèmes techniques. Ce module est essentiel dans de nombreux domaines de la physique, de l'ingénierie et des sciences appliquées. Voici quelques objectifs spécifiques typiques de notre module : • Examiner les types de vibrations (libres, forcées, amorties).

- Analyser les résonances et les modes propres dans les systèmes vibratoires.
- Résoudre des équations différentielles liées aux systèmes vibratoires.
- Étudier les différentes formes d'ondes (mécaniques, électromagnétiques, acoustiques, etc.).
- Appréhender les propriétés des ondes telles que la fréquence, la longueur d'onde, la vitesse de propagation, l'amplitude, et l'énergie.
- Explorer comment les ondes se propagent dans différents milieux (solides, liquides, gaz).
- Comprendre les phénomènes de réflexion, réfraction, diffraction et interférence. Notre module contient aussi des travaux pratiques ondes et vibrations d'où l'objectif de l'expérimentation et la modélisation est:
- Effectuer des expériences pour observer les phénomènes d'ondes et de vibrations.
- Utiliser des outils de simulation et de modélisation pour prédire le comportement des systèmes. En résumé, ce module vise à doter les étudiants des connaissances théoriques et pratiques nécessaires pour analyser et résoudre des problèmes impliquant des ondes et des vibrations dans divers contextes scientifiques et techniques.

Introduction

Les vibrations constituent un phénomène fondamental et omniprésent dans de nombreux domaines de la physique et de l'ingénierie. Elles désignent les mouvements oscillatoires autour d'une position d'équilibre et se manifestent dans une vaste gamme de systèmes, des simples pendules aux structures complexes comme les ponts et les gratte-ciel. La compréhension des vibrations est essentielle pour analyser, prédire et contrôler les comportements dynamiques des systèmes mécaniques et structures.



La carte conceptuelle

Exercice : Trigonométrie

I

[Séance n° 1 p.26]

Calculez la valeur de : $\sin(30^\circ)$, $\cos(45^\circ)$, $\tan(60^\circ)$

Exercice : Calcul Différentiel



II

[solution n°2 p.28]

- Trouvez la dérivée de la fonction : $f(x)=x^3-5.x^2+4.x-2$

Chapitre 1 : Introduction aux équations de Lagrange



1. Introduction

Ce chapitre présente une description globale des mouvements oscillatoires périodiques et harmonique ainsi que les différents formalismes permettant de déterminer les équations différentielles du mouvement des systèmes conservatifs.

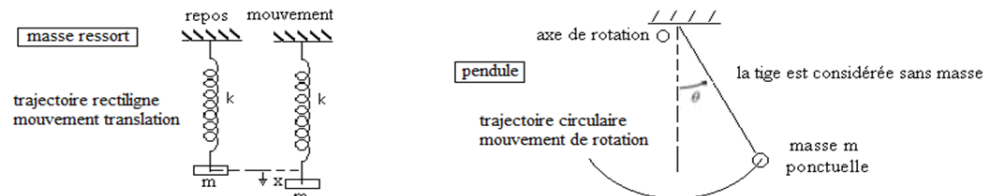
2. Généralités sur les vibrations

2.1. Oscillation

Mouvement d'un corps qui se déplace alternativement de part et d'autre d'une position d'équilibre

Exemple

Système masse-ressort, pendule



2.2. Vibration

Mouvement d'un système matériel élastique autour d'une position d'équilibre. On désigne aussi par vibration les oscillations rapides des systèmes mécaniques [1*].

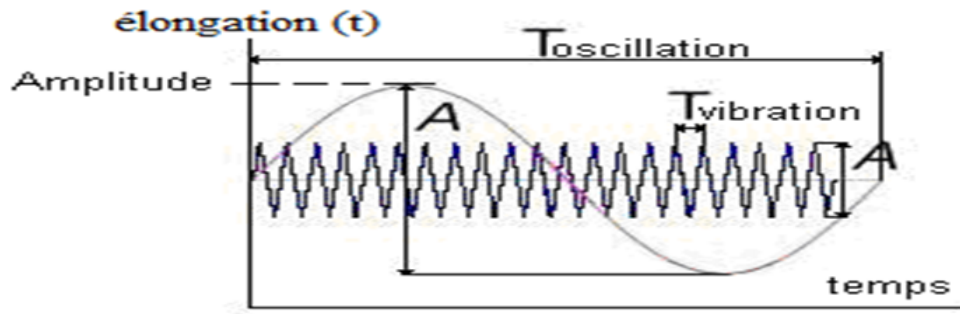
- Un mouvement est dit **périodique** s'il se répète identique à lui-même pendant des intervalles de temps égaux.
- Le plus petit intervalle de répétition est appelé **période** notée 'T', définie par le temps qui s'écoule entre deux passages successifs de la masse en mouvement au même endroit. l'unité est la second 's'.
- Une fonction $f(t)$ est dite périodique dans le temps lorsque $f(t+T) = f(t)$.
 - Pour un mouvement de rotation, un tour constitue une répétition.
 - Pour un mouvement oscillatoire, la durée d'une oscillation (aller et retour) constitue une période.
 - Le nombre de répétition par second est appelé **fréquence** notée « f », l'unité est le hertz « Hz » ou « s^{-1} ». elle est reliée à la période par : $f = 1/T$ nous montre si la vibration est lente ou rapide.
 - Le nombre de tours par seconde est appelé **pulsation** notée ω , l'unité est le rad/s.
 $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$
 - La valeur maximale de la grandeur atteinte lors du mouvement est appelée **amplitude** (A) ou élongation maximale.

2.3. Différences entre vibration et oscillation

Les principales différences entre vibration et oscillation sont l'amplitude et la fréquence du mouvement.

Dans l'exemple du pendule simple, le mouvement étant lent, on utilise alors le terme de mouvement oscillatoire.

Le terme de vibration est en général réservé à des fréquences plus élevées, comme les vibrations sonores [2*].



3. Classification des vibrations

3.1. Vibrations libres et vibrations forcées

Les vibrations libres sont les vibrations qui résultent lorsqu'on écarte un système de sa position d'équilibre ou on lui donne une vitesse initiale, puis on le laisse vibrer librement. Cela se passe sans l'intervention d'une force extérieure. Ex: une masse accrochée à un ressort- un pendule simple.

Si le système est soumis à une force extérieure au cours de toutes ces vibrations, les vibrations résultantes sont dites forcées.

3.2. Vibrations amorties et vibrations non amorties

Si l'énergie totale du système est conservée l'hors des vibrations (il n'y a pas de dissipation de l'énergie), ces vibrations sont dites non amorties. En revanche si le système perd de l'énergie au cours de ces vibrations (si l'on considère la résistance de l'air sur la masse du pendule simple dans l'exemple précédant), après certain temps la masse s'arrête à cause de la dissipation de l'énergie [3*]. Ces vibrations, sont dites vibrations amorties.

3.3. Vibrations forcées amortis

La force périodique extérieure (excitation) compense les pertes d'énergie par frottement, les oscillations ainsi entretenus ne s'amortissent pas.

4. Exercice : Question 1 : oscillations libres

[solution n°3 p.28]

Si la masse dans un système masse-ressort est déplacée de sa position d'équilibre et relâchée, l'amplitude des oscillations est déterminée par

- ☐ La force appliquée initialement
- ☐ La masse
- ☐ La constante du ressort
- ☐ Le déplacement initial

5. Exercice : Question 2 : oscillations forcées

[solution n°4 p.28]

Quelle est l'amplitude de la réponse en régime permanent d'un oscillateur harmonique forcé non amorti à la fréquence de résonance ?

- ☐ Finie et petite
- ☐ Finie et grande
- ☐ Infinie
- ☐ Zéro

6. Équation de Lagrange

Pour étudier le mouvement oscillatoire d'un système mécanique (connaître sa nature) on cherche à établir les **équations mathématiques** (différentielles) qui régissent le mouvement, il est nécessaire dans un premier temps de repérer sa position, grâce à un système d'axes dans l'espace.

- L'équation différentiel du mouvement peut être déterminé par plusieurs méthodes :
- Le principe fondamental de la dynamique (PFD*).
- Théorème de l'énergie mécanique (l'énergie mécanique est conservée).
- Théorème de moment cinétique.
- L'équation de Lagrange.

La méthode de Lagrange est apparue comme un moyen plus efficace (les calculs sont plus rapides) quelque soit la difficulté du système considéré pour l'obtention des équations du mouvement.

6.1. Cas des systèmes conservatifs

- Un système est **conservatif** lorsqu'il n'y a pas d'échange d'énergie entre lui et l'extérieure. C'est à dire qu'il ne subit aucune force de frottement (perte) ou force d'excitation (entretien).
- L'énergie totale d'un système conservatif est constante au cours du temps :

$$\frac{dE_t}{dt} = 0 \quad \forall t$$

Cette équation de conservation donne l'équation différentielle des systèmes conservés (sans amortissement).

- La méthode de **Lagrange** est une des méthodes qui permet de caractériser un mouvement par une **formulation Lagrangienne** qui nous produit un système d'équations différentielles associé au mouvement.
- L'énergie totale d'un système mécanique est la composition des énergies cinétiques et potentielles :

$$E_t = E_{cinétique} + E_{potentielle} = T + V$$

On définit une fonction mathématique (dont les variables sont les coordonnées généralisées) appelée **fonction de Lagrange L** ou "**Lagrangien**" donnée par :

$$L = E_c - E_p = T - V$$

Pour un système conservatif les n équations du mouvement sont données par :

$$\text{Equation de Lagrange : } \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

n : nombre de degrés de liberté

Dans le cas d'une translation suivant 'x', l'équation s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

Dans le cas d'une rotation avec un angle θ , l'équation s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

[cf.]

Cf. "Ma vidéo"

6.1.1. Nombre de degré de liberté

Le nombre minimal des coordonnées indépendantes nécessaires pour étudier un système vibratoire.

n = nombre de degrés de liberté = nombre de coordonnés généralisés = le nombre des équations différentiels

a) Les coordonnées généralisées

Les coordonnées généralisées sont des variables **indépendantes**, **nécessaires** et **suffisantes** pour décrire le même système mécanique à tout instant. Elles représentent les écarts par rapport à la position d'équilibre. q_i avec $i=1, \dots, n$. n : est le nombre de DDL *

Indépendantes : ne présentent aucune relation mathématique entre les coordonnées.

Nombre de coordonnés généralisés = Nombre de coordonnés - Nombre de relations entre ces coordonnés.

Exemple

Le pendule simple :

connaître la position de la masse m dans chaque instant.

Deux coordonnées (x,y=2).

Par la connaissance d'une seule coordonnée x ou y, car elles sont liées par la relation : $x^2 + y^2 = L^2$

$n=2-1=1$ degré de liberté

Exemple

Le système masse-ressort

Pour connaître la position de la masse dans chaque instant, il faut connaître seulement l'abscisse x , une seule coordonnée, alors le système est à un degré de liberté

Exemple

Deux masses et deux ressorts

Pour connaître les positions des masses m_1 et m_2 dans chaque instant il faut connaître les abscisses x_1 et x_2 (les deux coordonnées sont indépendantes), l'étude de ce système nécessite deux coordonnées donc le système est à deux degrés de liberté.

$n = 1$ un système à un degré de liberté

$n = 2$ un système à deux degrés de liberté

6.2. Cas des forces de frottement dépendant de la vitesse

En réalité les systèmes sont soumis naturellement à des frottements [4*]. Lorsqu'un système oscillatoire est soumis à des forces de frottement fluide de la forme :

$$f = -\beta v$$

β = coefficient d'amortissement visqueux

On montre que l'on obtient les n équations du mouvement de ce système non conservatif grâce aux :

$$\text{Equation de Lagrange : } \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Avec L = La fonction Lagrangien ; n = nombre de degré de liberté

Et D = La fonction dissipation définit égale à la demi-puissance dissipée

$$D = \int f dv = \int \beta v dv = \frac{1}{2} \beta v^2$$

6.3. Cas d'une force extérieure dépendant du temps

Lorsqu'un système oscillatoire en plus d'être soumis à des forces de frottement qui dérivent d'une fonction dissipation D , est excité (entretenu) par une force extérieure dépendant du temps $F(t)$

On montre que l'on obtient les n équations du mouvement de ce système **non conservatif** grâce aux :

$$\text{Equation de Lagrange : } \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial W}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Avec :

L : fonction Lagrangien

D : fonction dissipation = $1/2 \beta v^2$

W: travail de la force d'excitation = $\int F dx = Fx$

7. Exercice

[solution n°5 p.29]

Quelle est la formule de la fréquence naturelle f_0 d'un système masse-ressort ?

8. Exercice

[solution n°6 p.29]

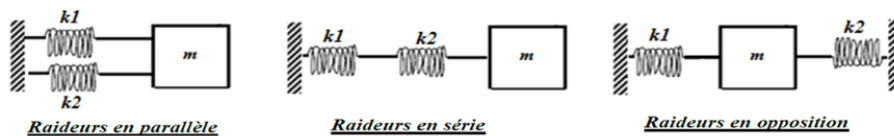
Décrivez ce qu'est la résonance dans un système de vibrations forcées.

9. Formules usuelles

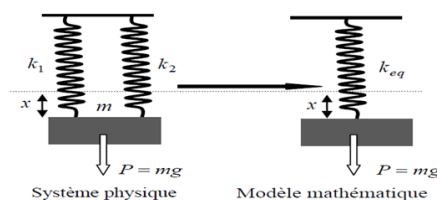
- Un ressort se déforme au cours du mouvement, il n'y a pas de mouvement de masse, donc un ressort n'a pas d'énergie cinétique. (d'ailleurs on ne donne pas la masse d'un ressort dans les exercices).
- La déformation d'un ressort est soit un allongement (ressort plus long) soit une compression (ressort plus court) par rapport à sa longueur à vide.
- La force de rappel d'un ressort sur une masse est toujours négatif (car agit toujours dans le sens contraire de la déformation)

9.1. Ressort équivalent

Dans le cas de la présence de plusieurs ressorts, on procède par le calcul de raideur équivalent. Les raideurs sont liées soit en série ou en parallèle (opposition).



9.1.1. Ressorts en parallèle



La constante de raideur du ressort équivalent est donnée par la relation suivante : $k_{eq} = (k_1 + k_2)$

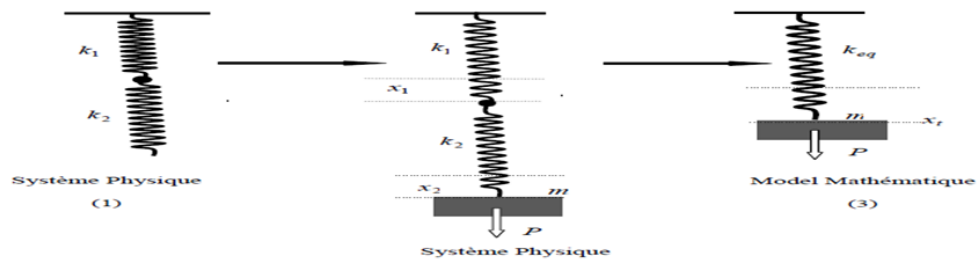
Si le système est constitué de plusieurs ressorts en parallèles, alors la constante de la raideur du ressort équivalent est donnée par :

$$k_{eq} = \sum_i k_i$$

a) ressorts en série

la suspension de la masse m à l'extrémité libre des deux ressorts (k_1 et k_2) cause des allongements x_1 et x_2 dans k_1 et k_2 respectivement.

L'allongement total : $x_t = x_1 + x_2$



La constante de raideur du ressort équivalent est donnée par la relation suivante :

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

Dans le cas général ou le système est constitué de plusieurs ressorts en série :

$$\frac{1}{k_{eq}} = \sum_i \frac{1}{k_i}$$

- Toute masse « m » animée d'un mouvement de translation avec une vitesse v possède une énergie cinétique :

$$E_c = T_{tr} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

- L'énergie cinétique de rotation d'un corps de moment d'inertie $I_{/\Delta}$ est :

$$T_{rot} = \frac{1}{2}I_{/\Delta}\dot{\theta}^2$$

$I_{/\Delta}$: est le moment d'inertie par rapport aux point de l'axe de rotation.

- L'énergie potentielle d'une masse dans un champ gravitationnel (L'énergie potentielle gravitationnel) :

$$V_{masse} = mgh \text{ [assension d' une hauteur h]}$$

$$V_{\text{masse}} = -mgh \text{ [descente d' une hauteur h]}$$

h : hauteur par rapport au sol

- L'énergie potentielle d'un ressort de raideur k lors d'une déformation x est (L'énergie potentielle élastique :

$$V_{\text{ress}} = \frac{1}{2} kx^2$$

Rappel

Moment d'inertie

Forme	Moment d'inertie par rapport au centre de gravité G (J/s)
Tige (Longueur L, masse M)	$\frac{1}{12} ML^2$
Cylindre (rayon R, masse M)	$\frac{1}{2} MR^2$
Sphère (rayon R, masse M)	$\frac{2}{5} MR^2$
Masse ponctuelle m	ML^2

10. Série de TD n°1

Série de TD n°1

[cf. Série de TD n°1]

En cas d'échec consultez *ce site*

Exercice : Équations Différentielles

IV

[solution n°7 p.29]

Résolvez l'équation différentielle : $dy/dx + 2y = 0$

Exercice : Énergie



- Calculez l'énergie cinétique d'un objet de 10kg se déplaçant à une vitesse de 15m/s.

Chapitre 2 : Oscillations libres des systèmes à un degré de liberté

VI

1. Introduction

Les grandeurs physiques (déplacement, vitesse, pulsation...) sont des variables qui dépendent du temps, elles seront étudiées à travers le comportement des systèmes, ces derniers sont caractérisés par des équations du mouvement de type : équations différentielles linéaires. Ce qui permet de décrire de diverses caractéristiques importantes de vibrations.

2. Exercice

[solution n°9 p.29]

Un système masse-ressort est composé d'une masse m et d'un ressort de constante k . Lorsque la masse est déplacée de sa position d'équilibre et relâchée, elle commence à osciller autour de cette position. La fréquence naturelle des oscillations, notée f_0 , est donnée par la formule : $f_0 = 1/2\pi \sqrt{k/m}$.

Dans cette formule, k représente du ressort (en N/m) et m représente de l'objet (en kg)

3. Exercice

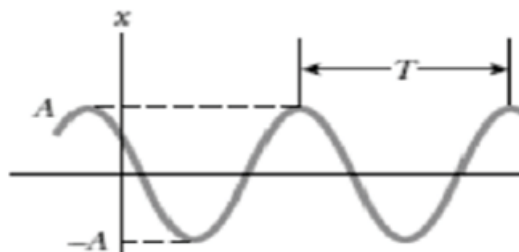
[solution n°10 p.29]

La solution générale pour les vibrations libres non amorties est de la forme : $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$.

Dans cette équation, A représente des oscillations, ω_0 est la angulaire naturelle, et ϕ est la initiale.

4. Oscillations libres non amorties

Un système qui oscille en absence de toute force d'excitation, et des forces de frottement est appelé **oscillateur libre non amorti** (harmonique) où l'amplitude reste constante.



Dans les cas simples, le mouvement oscillant est décrit par une fonction sinusoïdale ; soit :

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi) = A \cos(\omega t + \varphi') \quad \text{avec} \quad \varphi' = \varphi + \pi/2$$

C'est aussi l'équation d'un mouvement harmonique sinusoïdale MHS* du type le plus simple des mouvements périodiques

$x(t)$: est l'élongation (ou la position), à l'instant t , l'élongation maximale ou l'amplitude du mouvement varie entre $-A$ et $+A$.

φ : La phase initiale à l'instant $t=0$.

$(\omega t + \varphi)$: La phase instantanée à l'instant t , exprimée en radian.

- Calcul de **la vitesse** d'un mouvement rectiligne sinusoïdal :

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) = \omega \cdot A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

Il y a un déphasage constant de $\pi/2$ entre l'élongation et la vitesse. $x(t)$ et $v(t)$ sont en quadrature de phase.

- Calcul de **l'accélération** d'un mouvement rectiligne sinusoïdal :

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \ddot{x}(t)$$

$$= -\omega^2 \cdot A \cdot \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 \cdot x(t)$$

$$\rightarrow \ddot{x}(t) + \omega^2 \cdot x(t) = 0$$

On obtient une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants sans second membre, caractéristique de ce type de mouvement.

Alors tout mouvement rectiligne vérifiant une équation différentielle linéaire du type :

$$\ddot{x}(t) + C \cdot x(t) = 0 \quad \text{Est sinusoïdale}$$

Avec C constante > 0 , $C = \omega^2$

On notera : $\omega_0 = \sqrt{C}$ pulsation propre du **MHS (mouvement harmonique sinusoïdal)**.

- Un mouvement oscillatoire est dit **rectiligne à un degré de liberté** lorsqu'il a lieu dans une direction unique de l'espace, et la connaissance d'une seule variable de position suffit pour connaître sa position.

5. Exercice

[solution n°11 p.29]

est de la forme : $x(t) = A \cos(w t + \Phi)$

La solution générale pour

les vibrations libres non amorties

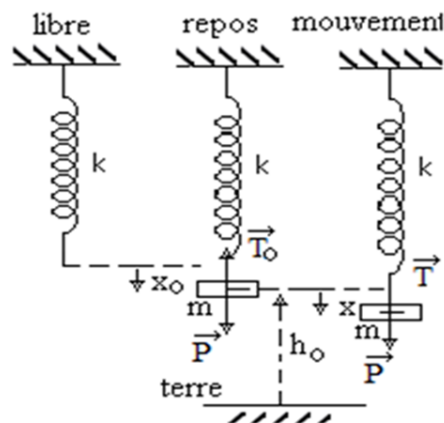
6. Mouvement oscillatoire de translation (le système masse-ressort)

Plusieurs méthodes sont utilisées pour déterminer l'équation différentielle de mouvement (EDM^{*}). Parmi ces méthodes on cite : la méthode de Newton et la méthode de Lagrange.

6.1. La méthode de Newton

C'est un système conservatif à un degré de liberté x .

Ressort de raideur k (coefficient d'élasticité), sans masse.



6.1.1. Masse m au repos

Le ressort est allongé de x_0 ;

x_0 : est une déformation statique.

C'est une situation d'équilibre donc pas de mouvement.

$$\sum \overrightarrow{Forces} = 0 = \vec{P} + \vec{T}_0$$

$$mg - k \cdot x_0 = 0 \quad \text{Équation à l'équilibre}$$

a) Masse m est écarté de x puis lâchée

Nous avons donc une oscillation ;

x : déformation dynamique

D'après la deuxième loi du Newton

$$\sum \overrightarrow{Forces} = m\vec{\gamma} = \vec{P} + \vec{T}$$

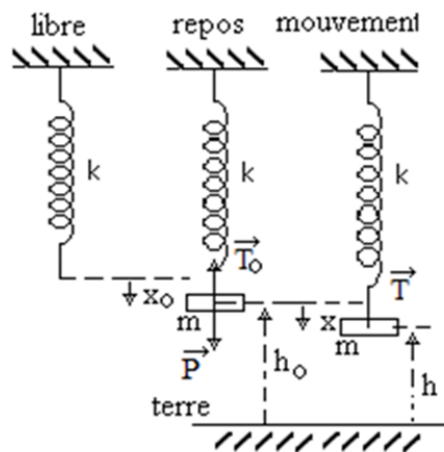
$$mg - k(x_0 + x) = m\ddot{x} = mg - kx_0 - kx = -kx$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \text{ de même type que } \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

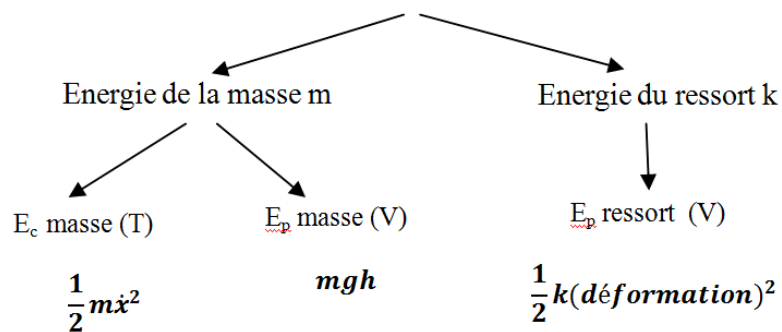
La solution est un MHS : $x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$

6.2. Méthode de Lagrange

Le système masse-ressort a un degré de liberté. Il est libre (aucune force extérieure) et conservatif (non amorti).



Bilan énergétique



Fonction de Lagrange (Lagrangien)

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - mg(h_0 - x) - \frac{1}{2} k(x + x_0)^2$$

Equation de Lagrange : $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = mg - k(x + x_0) = -kx$$

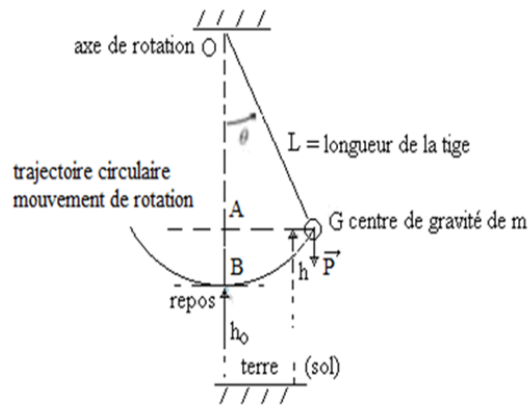
Car : $mg - kx_0 = 0$ équation à l'équilibre.

$$m \ddot{x} + kx = 0 \rightarrow \ddot{x}(t) + \frac{k}{m} x(t) = 0$$

De même type que : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$

La solution est un MHS : $x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$

Avec $\omega_0^2 = \frac{k}{m} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$

7. Mouvement oscillatoire de rotation (le pendule simple)

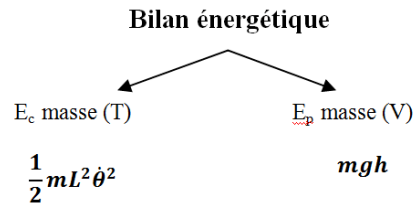
La masse m est ponctuelle, animée d'un mouvement oscillatoire de rotation avec une vitesse angulaire $d\theta/dt$ par rapport à O distant de L . La tige est considérée sans masse. C'est un système **conservatif à un degré** de liberté θ . Le pendule est simple.

La masse m possède un moment d'inertie $J = mL^2$ donc une énergie cinétique de rotation :

$$E_c = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} mL^2 \dot{\theta}^2$$

$$h = h_0 + AB \quad ; \quad AB = OB - OA \quad ; \quad \cos \theta = \frac{OA}{L}$$

Donc : $AB = L - L \cos \theta$



$$V = mgh = mg(h_0 + L - L \cos \theta) = mgh_0 + mgL(1 - \cos \theta)$$

La fonction de Lagrange (Lagrangien):

$$L = T - V = \frac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}^2 - mgh_0 - mgL(1 - \cos \theta)$$

Équation de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mL^2 \dot{\theta} \quad \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mL^2 \ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgL \sin \theta$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = mL^2 \ddot{\theta} + mgL \sin \theta = 0$$

Cette formule est non linéaire nous devons faire des approximations. Dans le cas des petites oscillations ($\theta \ll 10^\circ$) ou bien (θ en rad $\ll 1$) on peut faire l'approximation suivante :

$$\sin \theta \approx \theta \quad ; \quad \cos \theta \approx 1$$

$$mL^2 \ddot{\theta} + mgL \theta = 0 \quad \quad \text{alors :} \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{L} \theta = 0$$

De même type que :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

La solution est un MHS : $\theta(t) = \theta_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$

$$\text{Avec } \omega_0^2 = \frac{g}{L} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Remarque

Le moment d'inertie dans un système qui fait un mouvement de rotation est équivalent à la masse dans un système faisant un mouvement de translation.

Si le système est constitué de deux masses distantes (les masses sont éloignées) le moment d'inertie est donné par : $I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$

8.

Exercice :

Vibrations libres

Exercice : un système masse-ressort est constitué d'une masse $m=3$ kg et d'un ressort de constante $k=150$ N/m. la masse est déplacée de 0.1 m de sa position d'équilibre et relâchée.

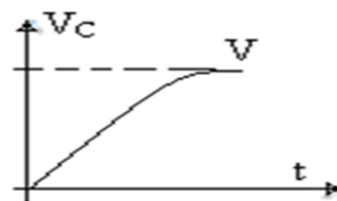
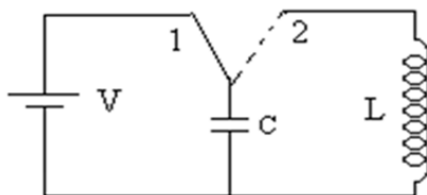
1. Quelle est la fréquence naturelle f_0 du système ?
2. Quelle est l'amplitude des oscillations ?
3. Écrivez l'équation du mouvement.

[cf. res_02]

9. circuit électrique L-C oscillant

La position 1 du contacteur : Le condensateur C soumis à la tension V du générateur, se charge avec une charge électrique q : $V_C = V = q/C$

La position 2 du contacteur : C se décharge dans la self L (bobine, inductance), un courant $i = dq/dt$ Circule dans la maille.



Système à 2 coordonnées généralisées q et i, et 1 relation entre q et i $\rightarrow n = 2 - 1 = 1$ degré de liberté.

Loi des maille :

$$\sum d.d.p = \sum f.e.m \rightarrow V_C + V_L = 0$$

$$V_C = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} \int i dt \quad L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = 0$$

→

$$V_L = L \frac{di}{dt} = L \ddot{q} \quad L \ddot{q} + \frac{q}{C} = 0 \rightarrow \ddot{q} + \frac{1}{LC} q = 0$$

Du même type que $\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$

Du même type que

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

La solution est un MHS

Avec : $\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$

10. Analogies électromécanique

On observe à travers ces exemples que les oscillations harmoniques simples mécaniques ou électriques sont décrites par le même type d'équation différentielle du 2ème ordre à coefficient constant linéaire en : x ou θ ou q ... sans second membre. La solution de ce type d'équation est un MHS. On peut alors faire des analogies entre grandeurs mécaniques et électriques :

Système mécanique (masse + ressort)	Système électrique (circuit LC oscillant)
$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$	$\ddot{q} + \frac{1}{LC} q = 0$
Elongation x	Charge q
Vitesse $v = dx/dt = \dot{x}$	Courant $i = dq/dt = \dot{q}$
Accélération $\gamma = \ddot{x}$	$di/dt = \ddot{q}$
Masse m	Inductance L (ou self ou bobine)
Raideur k	$1/C$ (Condensateur C)
Période propre $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$	Période propre $T = 2\pi\sqrt{LC}$
Echange d'énergie mécanique entre masse et ressort $\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2$	Echange d'énergie électrique entre bobine et condensateur $\frac{1}{2} L i^2 + \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$

D'une autre manière, on peut dire que tout système vibratoire contient trois moyens

Système mécanique

- Moyen pour stocker l'énergie cinétique, c'est la masse.
- Moyen pour stocker l'énergie potentielle, c'est le ressort.
- Moyen de dissipation de l'énergie, c'est l'amortisseur.

Système électrique

- Moyen pour stocker l'énergie électrique, c'est le condensateur.
- Moyen pour stocker l'énergie magnétique, c'est la bobine.
- Moyen de dissipation de l'énergie, c'est la résistance électrique.

[cf. TP vibrations]

11. Exercices résolus

[cf. Exercices vibrations 1 degré résolu]

12. série de TD n°2

Série de TD n°2

[cf. res_04]

En cas d'échec cliquez *ici*

13. Polycopie de TP Ondes et Vibrations

[cf. TP vibrations]

Solutions des exercices



> Solution n°1

Exercice p. 6

Calculez la valeur de : $\sin(30^\circ)$, $\cos(45^\circ)$, $\tan(60^\circ)$

$1/2$, $\sqrt{2}/2$, $\sqrt{3}$

Pour évaluer les pré requis nécessaires avant d'aborder le chapitre 1 du module "ondes et vibrations", ce test type avec des questions couvrant les concepts de base en physique et en mathématiques.

> Solution n°2

Exercice p. 7

- Trouvez la dérivée de la fonction : $f(x)=x^3-5.x^2+4.x-2$

$3.x^2-10.x+4$

> Solution n°3

Exercice p. 10

Si la masse dans un système masse-ressort est déplacée de sa position d'équilibre et relâchée, l'amplitude des oscillations est déterminée par

- ☐ La force appliquée initialement
- ☐ La masse
- ☐ La constante du ressort
- ☒ Le déplacement initial

> Solution n°4

Exercice p. 11

Quelle est l'amplitude de la réponse en régime permanent d'un oscillateur harmonique forcé non amorti à la fréquence de résonance ?

- ☐ Finie et petite
- ☐ Finie et grande
- ☒ Infinie
- ☐ Zéro

Veuillez consulter *ce site*

> Solution n°5

Exercice p. 14

Quelle est la formule de la fréquence naturelle f_0 d'un système masse-ressort ?

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{k/m}$$

> Solution n°6

Exercice p. 14

Décrivez ce qu'est la résonance dans un système de vibrations forcées.

La résonance se produit lorsque la fréquence d'une force externe appliquée à un système est égale à la fréquence naturelle du système, entraînant une amplitude maximale des oscillations

> Solution n°7

Exercice p. 17

Résolvez l'équation différentielle : $dy/dx + 2y = 0$

$y = C \cdot e^{(-2x)}$, Où C est une constante

Un test des pré requis est nécessaires avant d'aborder le chapitre 2 du module "ondes et vibrations", ce test type avec des questions couvrant les concepts de base en physique et en mathématiques.

> Solution n°8

Exercice p. 18

- Calculez l'énergie cinétique d'un objet de 10kg se déplaçant à une vitesse de 15m/s.

$$E = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \times 10 \times (15)^2 = 1125 \text{ J}$$

En cas d'échec, cliqué *ici*

> Solution n°9

Exercice p. 19

Un système masse-ressort est composé d'une masse m et d'un ressort de constante k . Lorsque la masse est déplacée de sa position d'équilibre et relâchée, elle commence à osciller autour de cette position. La fréquence naturelle des oscillations, notée f_0 , est donnée par la formule : $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{k/m}$.

Dans cette formule, k représente la constante du ressort (en N/m) et m représente la masse de l'objet (en kg)

> Solution n°10

Exercice p. 19

La solution générale pour les vibrations libres non amorties est de la forme : $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$.

Dans cette équation, A représente l'amplitude des oscillations, ω_0 est la pulsation angulaire naturelle, et ϕ est la phase initiale.

> **Solution n°11**

Exercice p. 21

les vibrations libres non amorties

est de la forme : $x(t) = A \cos(\omega t + \Phi)$

La solution générale pour

La solution générale pour les vibrations libres non amorties est de la forme : $x(t) = A \cos(\omega t + \Phi)$

Abréviations

DDL : Degré de liberté

EDM : L'équation différentielle de mouvement

MHS : Le mouvement harmonique sinusoïdale

PFD : Le principe fondamental de la dynamique

Bibliographie



Mohamed Bendaoud, Vibrations et Ondes : cours et exercices (deuxième partie : Phénomènes de propagation), USTHB, office des publications universitaires, 1993

Pr. Djelouah Hakim, Vibration et ondes manuel de cours, Université des sciences et technologies Houari Boumediene, 2006-2007.

Jean-Paul-Mathieu, vibrations et phénomènes de propagation, Tome I, oscillateurs, Masson et Cie, Editeurs, 1974.

Julie-Anne Denis, Bernard Marcheterre, Physique : ondes, optique et physique moderne solutions et corrigé des problèmes, 3ième édition, de boeck, 2005.