# Test de sortie

## Exercice 1 :

Montrer si les fonctions suivantes admettent un prolongement par continuité aux points où elles ne sont pas définies.

1. $f_1(x) = \frac{(x-1)\cos x}{x^2-1}$.
2. $f_2(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$.
3. $f_3(x) = \sin\frac{1}{x}$.

## Exercice 2 :

Calculer la dérivée d'ordre $n$ des fonctions suivantes :

1. $f(x) = e^{\beta x}$.
2. $f(x) = \sin(x)$.
3. $f(x) = \cos(x)$.
4. $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

## Exercice 3 :

Soit la fonction $f(x)$ telle que :

$$f \quad : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \to (x + z, x + y)$$

1. Montrer que $f$ est une application linéaire.
2. Déterminer $Kerf$ le noyau de f, puis en déduire $\dim(Kerf)$.
3. Donner $\dim(Imf)$.

# Corrigé de test de sortie

## Exercice 1 : Prolongement par continuité.

1. $f_1(x) = \frac{(x-1)\cos x}{x^2-1}$.

$f_1$ n'est pas définie aux points 1 et $-1$,

$\lim_{x\to 1} f_1(x) = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\cos x}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\cos x}{(x-1)(x+1)} = \frac{\cos 1}{2}$.

$$\lim_{x\to -1} f_1(x) = \lim_{x\to -1} \frac{(x-1)\cos x}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\cos x}{(x-1)(x+1)} = \infty$$

Donc $f_1$ admet un prolongement par continuité au point 1, mais $f_1$ n'est pas prolongeable par continuité au point$-1$.

2. $f_2(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$

$f_2$ n'est pas définie au point1.

$\lim_{x\to 1^-} f_2(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-(x-1)}{x-1} = -1$.

$\lim_{x\to 1^+} f_2(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)}{x-1} = 1$.

$\lim_{x\to 1} f_2(x)$ n'existe pas. Donc $f_2$ n'est pas prolongeable par continuité.

3. $f_3(x) = \sin\frac{1}{x}$

$f_3$ n'est pas définie en 0 et la $\lim_{x\to 0} f_3(x)$ n'existe pas.

Alors $f_3$ n'est pas prolongeable par continuité.

**<u>Exercice</u> 2 :** La dérivée d'ordre $n$ des fonctions suivantes.

1. $f(x) = e^{\beta x}$ , on dérive $f'(x) = \beta e^{\beta x}$, $f''(x) = \beta^2 e^{\beta x}$.
   On déduit la dérivée d'ordre $n$ par $f^{(n)}(x) = \beta^n e^{\beta x}$. (Formule à démontrer par récurrence).

2. $f(x) = \sin(x)$. On dérive $f'(x) = \cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$,
   $f''(x) = -\sin(x) = \sin(x + \pi)$, $f^{(3)}(x) = -\cos(x) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$,
   $f^{(4)}(x) = \sin(x) = \sin(x + 2\pi)$,
   On déduit la dérivée d'ordre $n$ par $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$, (Formule à démontrer par récurrence).

3. $f(x) = \cos(x)$. On dérive $f'(x) = -\sin(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$,
   $f''(x) = -\cos(x) = \cos(x + \pi)$, $f^{(3)}(x) = \sin(x) = \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$,
   $f^{(4)}(x) = \cos(x) = \sin(x + 2\pi)$,
   On déduit la dérivée d'ordre $n$ par $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$, (Formule à démontrer par récurrence).

4. $f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$, on dérive $f'(x) = 1(1-x)^{-2}$,
   $f''(x) = 1.2(1-x)^{-3}$, $f^{(3)}(x) = 1.2.3(1-x)^{-4}$.
   On déduit la dérivée d'ordre $n$ par $f^{(n)}(x) = n!\,(1-x)^{-(n+1)}$
   (Formule à démontrer par récurrence).

**Exercice 3 :**

Soit la fonction $f(x)$ telle que :

$$f \quad : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x,y,z) \to (x+z, x+y)$$

1. Soient $u = (x,y,z)$, $v = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

$f(\alpha u + \beta v) = f\big(\alpha(x,y,z) + \beta(a,b,c)\big) = f(\alpha x + \beta a, \alpha y + \beta b, \alpha z + \beta c) = (\alpha x + \beta a + \alpha z + \beta c, \alpha x + \beta a\ \alpha y + \beta b) = \big(\alpha(x+z) + \beta(a,c), \alpha(x+y) + \beta(a,b)\big) = \alpha\big((x+z),(x+y)\big) + \beta\big((a+c),(a+b)\big) = \alpha f(u) + \beta f(v).$

Donc $f$ est une application linéaire.

2. $Ker(f) = \{u \in \mathbb{R}^3, f(u) = 0_{\mathbb{R}^2}\}$
   $f(u) = 0 \Rightarrow (x+z, x+y) = (0,0) \Rightarrow \{x = -y\ et\ x = -z\}$
   Donc $Kerf = \{u \in \mathbb{R}^3, x(1,-1,-1),\ où\ x \in \mathbb{R}\}$
   - Base de $Ker(f)$ est $B = \{(1,-1,-1)\}$
   - $\dim Kerf = 1.$
3. $\dim(Imf),$
   On sait que $\dim(\mathbb{R}^3) = 3 = \dim\big(Ker(f)\big) + \dim(Imf),$
   Et donc $\dim(Imf) = 2.$