تمهيد:

تعنى مسائل البرمجة غير مقيدة بمتغير واحد بإيجاد الحل الأمثل للدالة:

$$Y = f(x)$$

حيث $f(x)$ دالة غير خطية وبالمتغير المفرد x، ويكون البحث عن الأمثلية في هذه الحالة مكافئ لايجاد قيمة في الفترة غير محدودة $(-\infty,+\infty)$ التي تجعل Y أكبر (أصغر) مايمكن. واذا كان البحث مقيدا في فترة محدودة مثل المجال $[a,b]$ فإن المسألة تصبح عبارة عن ايجاد الأمثلية للدالة:

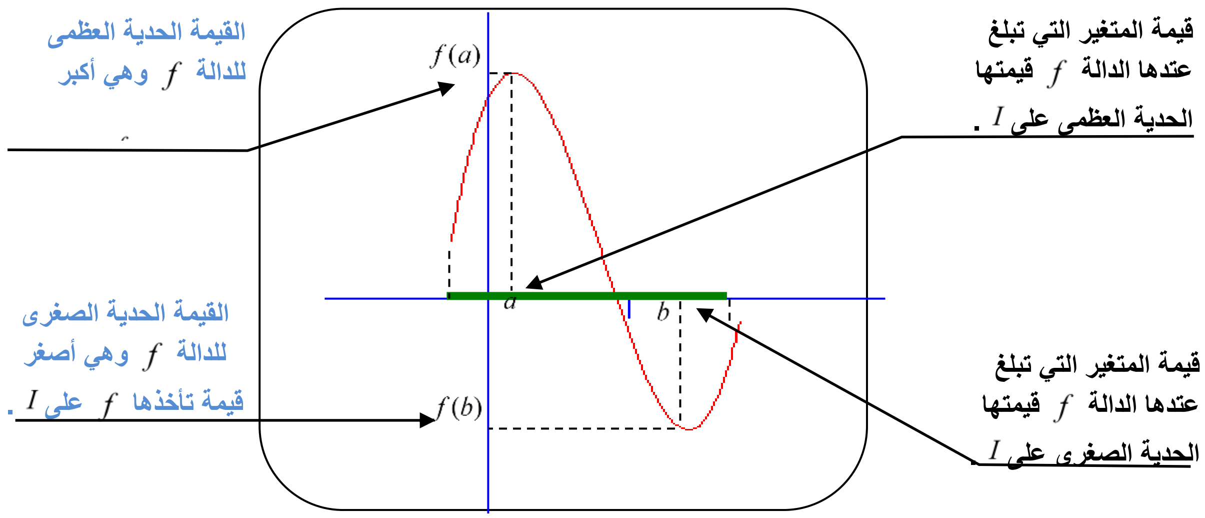
$$\begin{cases} Y = f(x) \\ ST \\ a \le x \le b \end{cases}$$

قبل الدخول الى تفاصيل الأمثلية وطرق الحل لابد من استعراض بعض المفاهيم الرياضية ذات الصلة:

أولا – القيم الحدية لدالة (القيم القصوى أو القيم المتطرفة):

f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$.

- **القيمة الحدية العظمى** للدالة f على I هي أكبر صورة $f(x)$ تبلغها f من أجل عدد a من I.
  من أجل كل x من I، $f(x) \le f(a)$
- **القيمة الحدية الصغرى** للدالة f على I هي أصغر صورة $f(x)$ تبلغها f من أجل عدد b من I.
  من أجل كل x من I، $f(x) \ge f(b)$

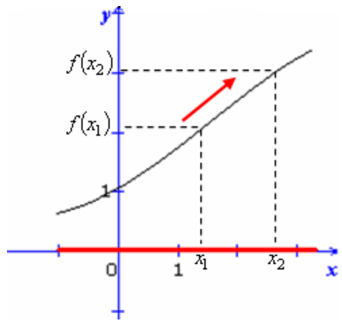


ثانيا – دالة المتزايدة والمتناقصة والثابتة

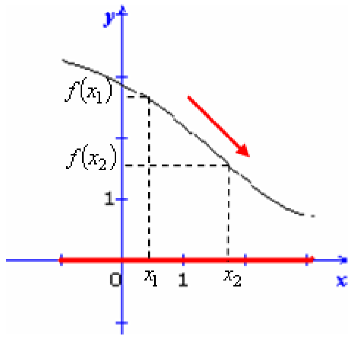
f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$.

- f **متزايدة تماما على** I **يعني**: من أجل كلّ x_1 و x_2 من I، إذا كان $x_1 < x_2$ فإنّ $f(x_1) < f(x_2)$

- f **متناقصة تماما على** I **يعني:** من أجل كلّ x_1 و x_2 من I، إذا كان $x_1 < x_2$ فإنّ $f(x_1) > f(x_2)$
- f **ثابتة على** I **يعني:** من أجل كلّ x_1 و x_2 من I، $f(x_1) = f(x_2)$



دالة متزايدة تماما



دالة متناقصة تماما

- **خطوات تحديد فترات التزايد والتناقص للدالة :**

لتحديد ما إذا كانت الدالة متزايدة أم متناقصة، يمكننا اما باستخدام الرسم البياني الخاص بها أو مشتقتها الأولى:

– على الرسم البياني للدالة المتزايدة، يتم ترتيب النقاط من الأصغر إلى الأكبر أثناء انتقالنا من اليسار إلى اليمين. ومن ناحية أخرى، في الدالة التناقصية، تقع النقاط من الأعلى إلى الأدنى في نفس الاتجاه.

– تحليل مشتقتها الأولى: إذا كانت مشتقة الدالة موجبة دائمًا في فترة ما، فإن الدالة تكون متزايدة في تلك الفترة.أما إذا كانت المشتقة سالبة دائمًا في فترة ما، فإن الدالة تكون متناقصة في تلك الفترة. أما إذا كانت الدالة متعددة الحدود، فسيتم مساواة المشتقة بالصفر لإيجاد النقاط الحرجة. النقاط الحرجة هي تلك التي تتغير فيها الدالة من التزايد إلى الانخفاض أو العكس. يمكن أن تكون هذه النقاط الحد الأقصى المحلي أو الحد الأدنى. ثم نقوم ببناء جدول بالنقاط الحرجة والفترات ذات الصلة. في الجدول، يجب إدراج قيم الدالة والمشتقة عند كل نقطة حرجة، وكذلك في نهايات الفترات. إذا كانت المشتقة موجبة، فإن الدالة متزايدة خلال تلك الفترة. إذا كانت المشتقة سالبة، فإن الدالة متناقصة وإذا كانت قيمة المشتقة صفرًا، فهذا يعني أن الدالة لها نقطة حرجة عند تلك القيمة.

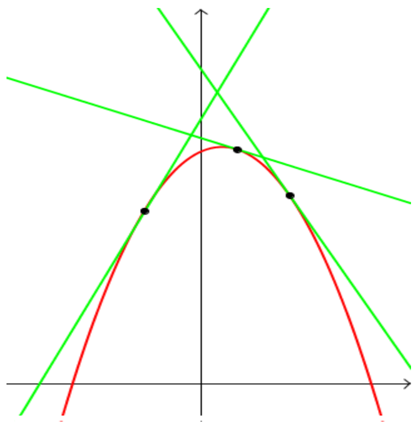
ثالثا– الدالة المحدبة والدالة المقعرة ونقطة انعطاف

أ– التقعر والتحدب:

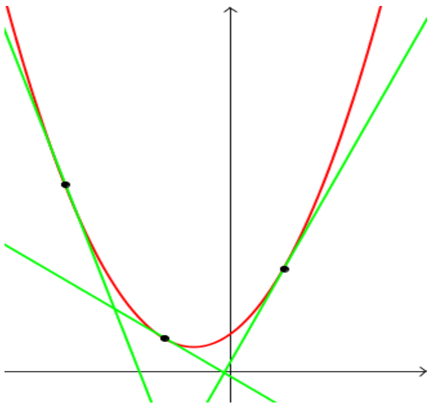
– **التعاريف:** لتكن الدالة f قابلة للاشتقاق على الفترة I.

- تكون **الدالة f محدبة** على I إذا كان المنحنى التمثيلي لها، في الفترة I، يقع بالكامل **فوق كل مماس لها**.
- تكون **الدالة f مقعرة** على I إذا كان المنحنى التمثيلي لها، في الفترة I، يقع بالكامل **أسفل كل مماس لها**.

5



دالة مقعرة
Fonction concave



دالة محدبة
Fonction convexe

نقول أن الدالة f محدبة / مقعرة على المجال $[a-b]$ عندما نثبت واحدة من الطرق التالية:

أ - **مقعرة:** $f''(x)\prec 0$ ، **محدبة:** $f''(x)\succ 0$

ب- تكون مقعرة اذا كان: $f(x)\leq f(a)'(x-a)+f(a)$ ،

وتكون محدبة اذا كان: $f(x)\geq f(a)'(x-a)+f(a)$ ،

يوجد طريقة أخرى سنتطرق اليها فيما بعد.

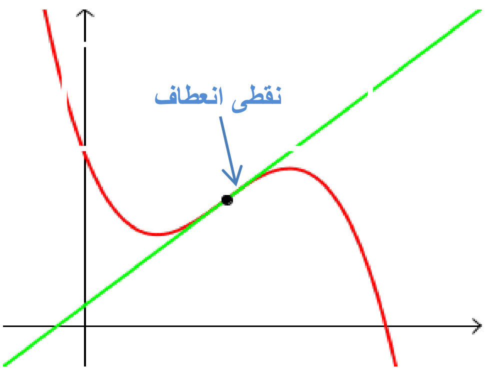
ب– نقطة انعطاف: هي نقطة على رسم بياني لدالة تتغير فيها الدالة من **محدبة** إلى **مقعرة** أو العكس.

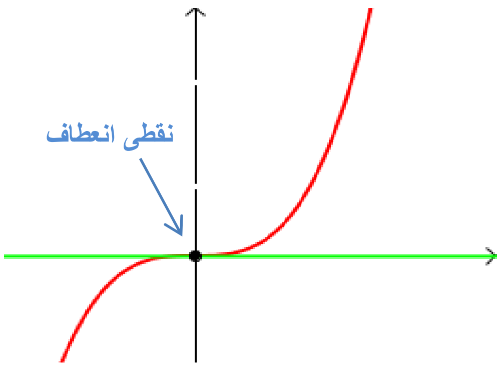
نقول أن المنحنى C_f يقبل كنقطة انعطاف $(x_0, f(x_0))$ اذا تحقق أحد الشروط التالية:

1– المشتقة الأولى للدالة $f'(x)$ تنعدم دون تغيير في إشارته عند x_0.

2– المشتقة الثانية $f''(x)$ تنعدم عند x_0 وتغيير اشارتها.

3– المماس يخترق المنحنى عند هذه النقطة.





رابعا– حل البرامج غير الخطية التي تحتوي على متغير واحد (بدون قيود)

يتم ايجاد النقاط الحرجة في هذه الحالة بطريقتين:

الطريقة الأولى اختبار المشتقة الأولى: وذلك بتقسيم خط الأعداد بالنقط الحرجة ، ثم ندرس تغير اشارة $f(x)'$ ثم نلاحظ التغير :

- إذا كان من تزايد (+) إلى تناقص (–) فيكون عند هذه النقطة الحرجة **قيمة عظمى محلية للدالة.**
- وإذا كان من تناقص إلى تزايد فعندها يكون للدالة **قيمة صغرى محلية.**
- وإذا كانت اشارة $f(x)'$ لم تتغير على خط الأعداد حول النقطة الحرجة (من + إلى + ، أو من – إلى –) فإنها ليست قصوى محلية.

الطريقة الثانية اختبار المشتقة الثانية: حتى تكون الدالة عند نهايتها العظمى أو الدنيا ينبغي توفر شرطين:

- **الشرط الضروري:** $\frac{dY}{dx}=0$

وهذا الشرط لا يوضح ما إذا كانت الدالة عند نهايتها العظمى أو الدنيا بل يوضح فقط وجود نقاط حرجة، وبالتالي لا من توفر الشرط الثاني.

- **الشرط الكافي:** وهذا الشرط يسمح بمعرفة صنف النقاط الحرجة ما إذا كانت الدالة عند هذه القيم عند نهايتها العظمى أو الدنيا. ويتحقق هذا الشرط عندما تكون قيمة المشتقة الثانية للدالة عند النقاط الحرجة كما يلي:

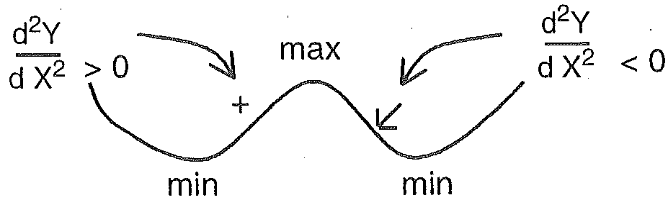
الحالة الأولى: نهاية عظمى، قيمة المشتقة الثانية سالبة، أي: $\frac{d^2Y}{dX^2} < 0$

الحالة الثانية: نهاية صغرى، قيمة المشتقة الثانية **موجبة،** أي: $\frac{d^2Y}{dX^2} > 0$

الحالة الثالثة: قيمة المشتقة الثانية **معدومة،** أي: لا يمكن القول أي معلومة.

يمكن تلخيص شروط النهايات العظمى والدنيا كما يلي:

الشرط	دنيا	عظمى
الضروري	$\frac{dY}{dx}=0$	$\frac{dY}{dx}=0$
الكافي	$\frac{d^2Y}{dX^2} > 0$	$\frac{d^2Y}{dX^2} < 0$



7

مثال: إذا إفترضنا أن دالة الربح الكلي معطاة بالمعادلة التالية:

$$\Pi = -300 - 2400Q + 350Q^2 - 8.333Q^3$$

أوجد مستوى الإنتاج الذي يعظم الربح؟

الحــــل:

$$\frac{d\Pi}{dQ} = -2400 + 700Q - 25Q^2$$

هذا هو الربح الحدى، لتحديد القيمة العظمى تساوي الربح الحدي الصفر.

$$-25Q^2 + 700Q - 24 = 0 \qquad Q = 4 et Q = 24$$

$$\frac{d^2\Pi}{dQ^2} = 700 - 50Q$$

عند مستوى الإنتاج Q = 4 فإن $\frac{d^2 II}{dQ^2}$ تساوي $700 - 200 = 500 > 0$

بما أن قيمة المشتقة الثانية موجبة، هذا يعني أن الربح الحدي متزايد عند مستوى الإنتاج 4 والربح الكلي يبلغ قيمته الصغرى.

عند مستوى الإنتاج Q = 24، قيمة المشتقة الثانية تساوي $700 - 50 \times 24 = -500 < 0$

بما أن قيمة المشتقة الثانية سالبة، هذا يعني أن الربح الحدي يتناقص عند مستوى الإنتاج 24 ومن ذلك نستنتج إن الربح الكلي يبلغ أقصى حد له.

تمارين تطبيقية للحل:

التمرين الأول: لكل من الدوال التالية جد ان وجدت النقاط الحرجة ومناطق التزايد ومناطق التناقص.

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

$$f(x) = x^3 - 3x + 2$$

$$f(x) = (2 - x)^3$$

التمرين الثاني: جد النهايات العظمى والصغرى المحلية للدوال الأتية ان وجدت.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$$

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$$

$$f(x) = 1 - (x - 2)^2$$

$$f(x) = x^3(-4 + x)$$

التمرين الثالث: لكل من الدوال التالية عين ان وجدت نقطة انعطاف ومناطق التحدب والتقعر.

1) $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$

2) $f(x) = 3x - x^3$

3) $f(x) = x^3 - 3x^2$

4) $f(x) = x^5$

5) $f(x) = (x-2)^3 + 3$

6) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2$

التمرين الرابع: اذا كانت $f(x) = x^3 + ax + 5$ لها نقطة نهاية محلية عند $x = 1$، جد قيمة (a) وبين نوع النهاية؟

التمرين الخامس: اذا كانت دالة التكلفة الكلية هي:

$$CT = Q^3 - 9Q^2 + 24Q + 15$$

أوجد حجم الانتاج الذي يخفض التكلفة الكلية لأدنى مستوياتها؟

التمرين السادس: اذا كانت دالة الطلب $Q_d = 40 - 2P$ وكانت دالة العرض $2p - Q_s = 20$. افترض أن الحكومة قد فرضت ضريبة t على كل وحدة من الوحدات المعروضة وقد قام المنتجون بتعديل دالة العرض لتتضمن هذه الضريبة. أحسب:

أ- مقدار الضريبة التي تعظم الايرادات الضريبية؟

ب- أقصى ايراد يمكن الحصول عليه؟

التمرين السابع: اذا كانت دالة الايراد الكلي هي:

$$RT = 1200Q - 2Q^2$$

وكانت دالة التكلفة الكلية هي:

$$CT = Q^3 - 61.25Q^2 + 1528.5Q + 2000$$

أ- أوجد حجم الانتاج الذي يعظم الربح.

ب- الايراد الكلي عند مستوى الانتاج الذي يعظم الربح.

ت- قيمة التكاليف الحدية عند $Q = 3$.

التمرين الثامن (وظيفة): قدرت احدى الدراسات التكلفة الاجمالية التقريبية التي يتطلبها سير العمل داخل المستشفى (بالدينار) على النحو التالي:

$$CT = 4700000 + 0.00013X^2$$

حيث X هو عدد المرضى الذي تقوم المستشفى برعايتهم يوميا.

أ- قم بوضع قاعدة للعلاقة بين تكلفة المريض في اليوم الواحد وعدد المرضى الذي يستوعبهم المستشفى يوميا.

ب- ما هو الحجم المناسب للمستشفى من حيث عدد المرضى الممكن استيعابهم في اليوم الواحد الذي من شأنه الوصول بالتكلفة الذي يتطلبها بقاء المريض في المستشفى ليوم واحد الى ادنى حد ممكن؟